

# BOLETIM

**6** dezembro/78

**GEPEM**

---

**GEPEM**

---

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM) expressa os seus mais sinceros a agradecimentos aos órgãos competentes da Universida de Santa Úrsula que forneceram os meios materiais para a impressão deste número de seu Boletim.

A Diretoria

**GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA - (GEPEM)**

**DIRETORIA**

Presidente: Maria Laura Mouzinho Leite Lopes  
Vice-Presidente: José Carlos de Mello e Souza  
Diretor Cultural: Anna Averbuch  
Secretário Geral: Franca Cohen Gottlieb  
Secretário: Celena Maria Ferreira Cesar  
Primeiro Tesoureiro: Wilson Belmonte dos Santos  
Segundo Tesoureiro: Maria Helena de Carvalho

**ASSESSORES**

**ESTUDOS E PESQUISAS**

Maria da Conceição Gomes  
Maria José Montes

**TÉCNICO-PEDAGÓGICO**

Estela Kaufman Fainguelernt  
Amélia Maria N. de Pessoa de Queiroz

**PUBLICAÇÕES**

Moema Lavinia Mariani de Sá Carvalho  
Vera Maria Rodrigues

**INTERCÂMBIO INTERNACIONAL**

Franca Cohen Gottlieb

## ÍNDICE

	P.
APRESENTAÇÃO .....	5
SÉRIES DIDÁTICAS DE MATEMÁTICA - AUDIOVISUAL <i>Profa. Estela Kaufman Fainguelernt</i> .....	7
O ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO SECUNDÁRIO <i>Prof. Leon Lifchitz</i> .....	20
RELATÓRIO DO CURSO DE PRÁTICA DE ENSINO <i>Anna Lúcia Nunes Machado Vallier</i> <i>Fátima de Almeida</i> .....	25
OS NÚMEROS PRIMOS E AS MENSAGENS SECRETAS .....	33
NOTÍCIAS - MÓDULO INSTRUCIONAL "PRODUTO DE MATRIZES" <i>Antônio Olavo da Silva Neto</i> <i>Maria de Nazareth Jacques Gamboa</i> <i>Vera Lúcia Swertz</i> .....	38
RESENHA DE LIVROS - "O FRACASSO DA MATEMÁTICA MODERNA", MORRIS KLINE <i>Tânia Maia Querido</i> .....	48
RELATÓRIO DA SECRETARIA DO GEPEM RELATIVO AO ANO DE 1978 .....	50

## APRESENTAÇÃO

É com real satisfação que registramos a afirmação gradativa do GEPEM no universo matemático - educacional, quer através de contatos com professores e licenciandos, dos quais têm resultado enriquecedoras trocas de informações e experiências, quer através de cursos e palestras, trabalhos ou publicações.

Salientamos a cooperação neste número das estudantes do curso de Matemática da Universidade Santa Úrsula:

. Tânia Maia Querido, que faz apreciações sobre o livro "Fracasso da Matemática Moderna" de Morris Kline, após a leitura e debates realizados em classe, na disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I, ministrada pela Professora Moema Sá Carvalho.

. Anna Lúcia Nunes Machado Vallier e Fátima de Almeida que apresentam relatório sobre o curso de Prática de Ensino ministrado pela Professora Anna Averbuch.

Este número conta ainda com:

. apresentação feita por Estela Kaufman Fainguelernt, no 2º Simpósio de Teleducação e Audiovisual, realizado na Unicamp em julho de 1978, do trabalho de Amélia Maria Noronha Pessoa de Queiroz sobre "Séries Didáticas de Matemática".

. contribuição do Professor Léon Lifchitz através de artigo, publicado em 1951, que se mantém atual.

. prosseguimento da notícia, iniciada no Boletim anterior, sobre as "Reuniões Técnicas de Matemática", do CDRH, com a publicação de outro módulo instrucional elaborado por participantes do curso.

. artigo "Os Números Primos e as Mensagens Secretas" a título de amenidades.

. relatório da Secretaria do GEPEM, descrevendo as atividades do ano de 1978.

## SÉRIE DIDÁTICAS DE MATEMÁTICA - AUDIOVISUAL

Trabalho apresentado pela professora ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT no "2º Simpósio de Teleducação e Audiovisual" realizado na UNICAMP de 27 a 28 de julho de 1978, sobre as "SÉRIES DIDÁTICAS DE MATEMÁTICA", de autoria da professora AMÉLIA MARIA NORONHA PESSOA DE QUEIROZ, com a colaboração da relatora e editadas pela ENCINE Audiovisual S.A., Livraria José Olympio Editora.

Esta série é um auxílio audiovisual a ser intercalado na programação básica do ensino fundamental de primeiro grau. Os tópicos são abordados em 15 aulas, cada uma contendo 24 "slides", acompanhada de um folheto explicativo com os objetivos de cada tópico, explicação de cada "slide" e algumas sugestões.

Os tópicos abordados nem sempre obedecem a uma sequência de programa. É difícil selecionar assuntos para uma série de 15 aulas que cubram o que há de mais importante para o ensino de matemática neste nível e, certamente, mais difícil ainda, encontrar unanimidade de opiniões sobre tal seleção. Por isso, este trabalho foi baseado na experiência da autora, de mais de 20 anos de magistério, não apenas com alunos, mas também com professores, para tentar atender aos problemas maiores que emergem do processo ensino-aprendizagem de matemática, à adequação à realidade do ensino.

Em muitos dos assuntos abordados nesta série foram utilizados materiais simples, de fácil aquisição, que poderão sugerir aos professores e alunos, outros exemplos fáceis de confeccionar.

O folheto da primeira aula, além das explicações a ela referentes, contém também uma listagem dos símbolos utilizados em matemática, com seu significado e um dicionário explicando o sentido de certos termos usados.

#### AULA 1: Identificação do Espaço

Nela são sugeridas algumas situações do cotidiano em que as noções topológicas, em nível de pré-escolaridade, podem ser aplicadas. Estimula-se a criança a observar o que está à sua volta, localizar os objetos em relação a si mesma, e uns em relação aos outros.

Por exemplo, para identificar o sentido de uma direção, foram usadas projeções mostrando viadutos, ruas de mão única etc.

*Objetivos:* - Identificar objetos vizinhos, inte

rior e exterior de uma região.

- Identificar as relações de tempo: antes e depois.
- Identificar direita e esquerda a partir de diferentes pontos de vista.
- Identificar grande, pequeno, alto e baixo.
- Identificar o sentido de uma direção.
- Fazer corresponder elementos de dois conjuntos distintos para identificar o número de elementos.

## AULA 2: Noções Básicas sobre Conjuntos

Neste capítulo está a base de todo o desenvolvimento das estruturas matemáticas. Dão-se as primeiras noções de conjunto, ainda de maneira intuitiva, mostrando a necessidade de bem determinar os elementos de um conjunto para definir a relação de pertinência.

A criança, desde o pré-escolar, pode iniciar este estudo com material concreto e, no primeiro ano, quando estiver alfabetizada, já pode designar os elementos por letras e números e representar os conjuntos pelo diagrama.

*Objetivos:* - Definir conjunto por compreensão e por enumeração.

- Reconhecer os elementos que pertencem ou não a um conjunto dado.
- Deduzir as propriedades das operações com conjuntos.
- Identificar pares, pares ordenados, conjunto unitário, conjunto vazio.
- Representar conjunto por diagrama.

## AULA 3: Operações com conjuntos

As operações com conjuntos começam a ser dadas

com o material concreto, pedindo-se que a criança contorne elementos que pertençam a um *ou* a outro dos conjuntos dados, que pertençam a um *e* a outro dos conjuntos dados ou ainda, que pertençam a um deles mas não pertençam ao outro.

Quando a criança se alfabetiza, pode começar a formar conjuntos com letras, números e operar sobre eles. Mais tarde podem ser introduzidos os símbolos para as operações.

Esta aula utiliza o material didático "PLACO", feito em acetato transparente, que facilita a visão da operação com os conjuntos concretamente. Pode ainda a criança tocar os elementos dos conjuntos. As placas podem ser também usadas pelo professor no retroprojetor.

O material didático "PLACO" foi elaborado pela professora AMÉLIA MARIA NORONHA PESSOA DE QUEIROZ, em colaboração com a professora ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT e consta de 32 placas transparentes com contornos de conjuntos e elementos (letras e números) feitos em plástico adesivo.

*Objetivos:* - Representar conjuntos por diagramas, utilizando, inicialmente, as placas transparentes, partindo de situações concretas para o desenho (representação por diagramas) até chegar ao raciocínio abstrato, usando uma linguagem formalizada.

- Reconhecer as propriedades da reunião, da interseção e da diferença de conjuntos.
- Representar as operações por tabelas.

#### AULA 4: Relações. Produto Cartesiano.

Iniciamos esta aula com relações bem simples e de fácil compreensão, tiradas do dia a dia da criança, na maioria das vezes, relações de equivalência (apesar de não serem apresentadas às crianças como tal nas primeiras séries e sim, só mais tarde, após a 5a. série) e relações de ordem. A criança deve fazer corresponder (associar) ele

mentos de um conjunto aos de outro conjunto, e de um conjunto para ele mesmo. Este tipo de exercício já é bastante explorado na alfabetização.

Nas primeiras séries do primeiro grau, as crianças podem observar as propriedades das relações, mas, só a partir da quinta série, formalizarão este estudo. Elas perceberão que, tanto faz reunir o conjunto A com o conjunto B, como o B com o A que terão o mesmo resultado. Assim procederão com as demais propriedades, usando o material concreto, passando, depois, para o diagrama e a partir da 5a. série, para a linguagem formal.

Esta aula servirá de base para o estudo das funções.

*Objetivos:* - Determinar correspondência entre conjuntos.

- Representar relações por meio de flechas.
- Representar as relações através de linguagem matemática.
- Reconhecer e definir o produto cartesiano.
- Representar um produto cartesiano através de vários tipos de gráficos, preparando-se inclusive, para as representações cartesianas e gráficos estatísticos.
- Determinar as propriedades das relações.
- Expressar as propriedades das relações através de linguagem formal.

#### AULA 5: Subconjuntos. Partições.

Este tópico deverá ser abordado com os demais, primeiro com o material concreto, depois com o diagrama e, a partir da quinta série, com a linguagem formal.

Nesta aula, o aluno é preparado para reconhecer o todo e as partes, as relações de partes para partes e a noção de complementaridade.

*Objetivos:* - Reconhecer o todo e as partes.

- Definir subconjuntos e representá-los pelo diagrama.
- Aplicar as propriedades das relações à inclusão de conjuntos.
- Construir partições de um conjunto.
- Justificar afirmativas de acordo com definições dadas.

#### AULA 6: Cardinais.

Depois de bem preparar o aluno em todas as fases que precedem a aquisição desta noção, passamos para o estudo de equipotência de conjuntos afim de estudar os números naturais. Daí, o aluno deve rá começar a operar sobre os números: adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. O professor a crescentará à parte visual destes "slides", problemas sobre estas operações, procurando usar sítuações do dia-a-dia da criança para despertar-lhe o interesse.

*Objetivos:* - Identificar número como representante de propriedade da equipotência de conjuntos.

- Verificar que a cardinalidade possui as mesmas propriedades de uma relação de equivalência.
- Identificar o conjunto dos números naturais.
- Reconhecer os conjuntos infinitos enumeraveis.
- Operar (adicionar, subtrair, multiplicar , dividir) com números naturais.

#### AULA 7: Funções. Monóides. Grupos.

Nesta aula foram incluídos dois tópicos importantes:

- 1) Funções.

## 2) Monóides e Grupos.

### *Funções* ("slides" 1 a 19).

O professor pode apresentar vários tipos de funções encontradas no cotidiano do aluno. Utilizando a aula 4, pode fazer com que os alunos, partindo do conceito intuitivo de função, cheguem à sua definição. Em seguida pode passar de uma análise de certas funções, tais como a afim e a quadrática, à sua representação gráfica. Isto pode ser trabalhado na sétima ou oitava série.

*Objetivos:* - Identificar funções como subconjunto de relações.

- Iniciar o uso de linguagem formal.
- Reconhecer o domínio e o contradomínio de uma função.
- Interpretar, analisar e representar graficamente uma função.
- Discernir funções que possuem ou não inversa.
- Classificar uma função como injetora, sobrejetora e bijetora.
- Representar uma função pelo gráfico cartesiano.

### *Grupos* ("slides" 20 a 24)

Desde que já tenham sido apresentados os conjuntos, as operações com conjuntos e as propriedades das operações, estamos preparando o aluno para identificar estrutura de grupo.

*Objetivos:* - Identificar a estrutura de grupo dos conjuntos para certas leis de composição.

## AULA 8: Blocos Lógicos de Dienes.

Os vários tipos de jogos com os blocos lógicos acompanham o desenvolvimento cognitivo da criança.

*Objetivo:* - Introduzir a lógica através de jogos.

- Ordenar, classificar, seriar.
- Identificar a cardinalidade de um conjunto.
- Trabalhar com os conectivos não, e, ou.
- Trabalhar com tabelas de dupla entrada.
- Usar símbolos para representar as características ou atributos das peças.

#### AULA 9: Frações.

A partir do estudo feito com o conjunto dos números naturais o aluno chegará ao conjunto dos números fracionários. Poderá observar e explorar que o inteiro pode ser também representado por grandes descontínuas, pois estas, na maioria das vezes, pertencem ao mundo da criança.

O conceito de frações foi estendido em vários "slides" por acharmos que está aí o maior problema para a compreensão dos números fracionários. Não foi possível inserir aqui toda a gama de exercícios sobre frações decimais, a representação dos números fracionários na reta, etc,.

A partir do que foi visto, o professor pode continuar sua programação sem maiores dificuldades.

*Objetivos:* - Identificar os números fracionários.

- Reconhecer frações equivalentes.
- Comparar frações.
- Operar com números fracionários.
- Reconhecer o conjunto dos números fracionários como um conjunto infinito enumerável.

#### AULA 10: Plano e Reta.

A introdução da geometria se faz intuitivamente nos primeiros anos do primeiro grau. Inicialmen

te, a criança percebe as diferentes figuras geométricas, suas diferentes posições no espaço e transformações simples.

A abordagem da geometria, foi feita no plano, considerando-se a reta como conjunto de pontos, estudando-se as diferentes posições da reta no plano.

*Objetivos:* - Adquirir a noção intuitiva de plano e reta.

- Reconhecer o plano como conjunto infinito de pontos.
- Identificar curvas abertas e fechadas.
- Identificar as posições da reta no plano.
- Ter noção de direção como conjunto de retas paralelas.
- Identificar as propriedades da relação de paralelismo.
- Identificar retas (conjuntos infinitos de pontos).
- Identificar semi-retas, segmentos de retas, intervalos.
- Orientar uma reta.

#### AULA 11: Áreas e Volumes.

Esta aula foi inserida aqui pela possibilidade de seu assunto ser tratado com menos rigor e tendo em vista que, para um aprendizado inicial de áreas e volumes, podemos nos basear no fato de que a medida constitui o deslocamento de uma unidade, relacionando-a com as outras partes da totalidade.

Na quarta série pode-se começar o estudo dos perímetros, das áreas e dos volumes de uma maneira informal, fazendo variações nos comprimentos dos segmentos de linhas, para perceber a conservação do todo. Variar o comprimento e a largura de um retângulo, variar o comprimento a largura e a altura de um paralelepípedo, para verificar a conservação ou não da área e do volume, respectivamente.

te.

*Objetivos:* - Comparar comprimentos, áreas e volumes.

- Determinar unidades para medir comprimentos, áreas e volumes.
- Reconhecer as unidades de medida mais comuns.
- Medir comprimentos, áreas e volumes de figuras simples.

#### AULA 12: Transformações do Plano.

O estudo das transformações do plano, as translações, simetrias, homotetias, rotações, pode vir sendo feito desde as primeiras séries do 1º grau através de jogos simples.

Pode-se brincar, deslocando os alunos, ou, instruindo-os para deslocar figuras, segundo determinadas regras. Comparar suas posições ou as das figuras, após estes deslocamentos, com os da posição inicial.

As translações podem ser trabalhadas com mais rigor na 5a. série, as simetrias e homotetias na 6a. e 7a. séries, as isometrias e rotações na 8a. série.

*Objetivos:* - Reconhecer os pares ordenados equipolentes.

- Identificar as diferentes transformações do plano conforme a lei que as determina e reconhecer as suas propriedades.
- Aplicar as translações para o estudo dos triângulos.
- Identificar segmentos equipolentes.
- Determinar o ponto médio de um segmento por equipolência.
- Trabalhar nas projeções paralelas, para re

lacionar sua aplicação à representação cartesiana.

#### AULA 13: Vetores - Teorema de Tales.

Prepara-se aqui, o estudo da geometria métrica. O teorema de Tales e os triângulos são estudados através das transformações do plano e da graduação da reta.

Podemos então construir a geometria afim e, mais facilmente, a geometria Euclídeana. Este tópico pode ser abordado na sétima série, dando sequência ao que foi visto na projeção da aula 12.

*Objetivos:* - Definir vetor, vetor nulo.

- Adicionar vetores.
- Identificar  $(\mathbb{R}, +)$  como um grupo comutativo.
- Graduar a reta.
- Graduar uma reta a partir da graduação de outra, conservando as abscissas numa mesma razão.
- Estudar as medianas de um triângulo.

#### AULA 14: Homotetias - Simetrias centrais - Simetrias Axiais - Rotações - Ângulo

Usando jogos, partindo de situações concretas, ou de observações de objetos de arte e da natureza, o professor poderá levar o aluno a chegar aos conceitos das transformações do plano aqui mencionadas. Estes conceitos poderão ser definidos formalmente e suas propriedades identificadas na oitava série.

Podemos utilizar a aula 12 para motivar esta aula.

*Objetivos:* - Construir homotetias, conhecidos o centro e a razão.

- Identificar as transformações do plano: si

- metrias centrais, axiais, rotações.
- Definir ângulos.

**AULA 15: Geometria métrica - Distância entre dois pontos**  
- Adição de Vetores - Produto escalar de dois vetores - Teorema de Pitágoras

Na oitava série espera-se que o aluno esteja em condições de estudar o produto escalar, com suas aplicações na trigonometria e relações métricas nos triângulos.

Introduz-se a graduação e subgraduação da reta para chegar a uma primeira abordagem dos números reais.

*Objetivos:* - Medir distância de um par ordenado num determinado referencial métrico - norma de um vetor.

- Definir um vetor por suas coordenadas num determinado referencial.
- Adicionar vetores expressos por suas coordenadas.
- Definir produto escalar de dois vetores.
- Chegar ao Teorema de Pitágoras.
- Estabelecer relações entre os lados dos triângulos utilizando o produto escalar de vetores.

A apresentação deste trabalho visou dar uma ideia da utilização de métodos audiovisuais e sua viabilidade. Esperamos que sirva de motivação para o desenvolvimento das aulas e para o aprofundamento dos conteúdos, estimulando a criatividade e conseqüentemente o desenvolvimento do raciocínio do educando. Desta forma o ensino da matemática será cada vez mais interessante e desafiador.

## O ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO SECUNDÁRIO \*

LEON LIFCHITZ

Tenho observado e colecionado casos durante o tempo que venho lecionando a Matemática; que há uma verdadeira idiosincrasia ou, melhor dito, um "medo" da Matemática, medo este consequência apenas do desconhecimento da matéria e porque não dizer do método usado ao lecionar a matéria.

Longe de mim a intenção de ferir susceptibilidades e mais longe ainda o propósito de achar que tudo está errado. Na Matemática devemos empregar todos os meios para combater o medo e acabar com ele de uma vez.

Achamos mais conveniente o método asséptico, isto é, um tratamento profilático, tendente a impedir que surja ainda, em tenra idade, o medo da Matemática.

Creio, porém, que com um esforço comum por parte dos professores da citada disciplina, conseguiríamos resultados bem mais aproveitáveis não só em benefício do professor e dos alunos que muito lucrariam, como também o ensino se tornaria mais útil e menos oneroso e não chegaríamos ao cúmulo de encontrar alunos do ciclo colegial, que mal trabalham com frações ou não conseguem realizar uma operação de divisão com números decimais.

O Prof. Felix Auerbach, da Universidade de Jena, comentando o mesmo assunto, cita-nos casos de grandes homens como Goethe, Schopenhauer, que além de desprezarem a Matemática tinham verdadeiro horror da

*\*Transcrito de "Atualidades Pedagógicas" - nº 9 - Maio e Junho de 1951 - ANO II.*

mais exata das ciências e que o último, levado pelo seu cego furor contra a Matemática, não teve pejo de falsificar, da maneira mais grosseira, uma opinião do genial matemático, físico e filósofo que foi Lichtenberg, para fazê-la valer em seu favor.

Ora, este horror é um hábito adquirido e não inato. Adquirido pelo constante ouvir que a Matemática é difícil de aprender e que só cérebros privilegia dos conseguem penetrar nos seus mistérios.

Mas o horror é devido ao desconhecimento, é o verdadeiro "mêdo do desconhecido", isto é, o indivíduo tem mêdo do que não conhece.

É necessário que o professor de Matemática procure transmitir ao aluno o que êle necessita saber e não ir para a sala de aula mostrar conhecimentos.

O desconhecimento da Matemática é devido à Escola. Eu devia, ao afirmar isto, ser mais cuidadoso e colocar a frase no passado, dizendo que foi devido à Escola. Realmente, não se pode negar que atualmente a situação é melhor sob muitos aspectos. Mas a verdade é que ainda não é boa, e boa neste caso como em tantos outros significa mais que melhor. Já em tempos passados houve professores e certamente hoje em dia os há verá em maior número, que ensinavam a Matemática de excelente maneira, pelo que se refere ao conteúdo material e às suas particularidades; mas, há muito poucos, e antes talvez não houvesse um só, que satisfizessem à condição primeira que é ao mesmo tempo a mais importante, ou seja, começar por onde se deve necessariamente fazê-lo, para que todo o ensino encontre interesse e compreensão: pelo problema do sentido e essência da Matemática. "O que de princípio se descuida nunca mais poderá ser remediado".

O grande equívoco pelo qual a Escola é em grande parte responsável, consiste em considerar a arte de calcular e a Matemática iguais na sua essência ou pelo menos coisas semelhantes, como se a Matemática não fosse mais que a continuação da tabuada. Que isto é inteiramente errado, prova-o já o fato de se poder ser um bom matemático e todavia um mau calculista, fa

to que é confirmado pelo caso de muitos matemáticos célebres (Newton, Poincaré, etc). Como ninguém também quererá dizer que os grandes calculistas Adam Riese ou Zacharias Dase fossem grandes matemáticos.

A arte de calcular é uma habilidade como outra qualquer. A Matemática é algo elevado e sublime pelo seu acentuado caráter de generalidades e se iguala e em muitos aspectos é superior à rainha das ciências: a Filosofia. Este fato em nada altera na sua essência pela circunstância de a Matemática frequentemente se servir do cálculo. Do mesmo modo que, se eu tomar um automóvel para chegar mais rapidamente a meu destino, significa seja eu necessariamente um automóvel.

O professor Young nos ensina que a aula deve ser dividida em três partes de duração respectivamente: 10 minutos, 25 minutos e 10 minutos.

Os 10 (dez) primeiros minutos são dedicados à introdução da aula, devendo o professor sintetizar a aula anterior, para dar sequência à sua aula do dia. Os 25 minutos constituirão o corpo da aula, que é o assunto a ser tratado na aula do dia, e os 10 minutos restantes servirão para tirar as dúvidas que ficaram da aula dada.

Mas, em se tratando de ensinar, as regras inflexíveis tem que ser evitadas a todo custo, pois as reações das turmas são as mais diversas possíveis e é impossível aplicar com tamanha rigidez a divisão da aula, mas que a aula deve ter estas três partes, isto é imprescindível.

Não é possível continuarmos a dar apenas o programa, pois a Matemática disciplina o cérebro e habitua o aluno a soluções mais ou menos rápidas, além das aplicações práticas que são inúmeras.

Recordo-me de uma frase, pronunciada pelo prof. Achille Bassi, quando dava a introdução ao estudo da Topologia. A Matemática era como um alfaiate que fazia ternos sob medida, para as outras ciências, mas, com o seu desenvolvimento passou a ser como uma casa de roupas feitas, onde o cliente procura, dentro

das teorias já existentes, aquela que se aproxima do fenômeno em estudo.

O que não deixa dúvidas é que a aprendizagem da Matemática como modelo de raciocínio, deve começar desde a escola primária, para que a mente da criança não adquira falsos conceitos e maus hábitos de pensar que possam viciar sua vida mental futura.

O estudo da Matemática requer que a compreendamos e aprendamos. O que parece uma redundância, mas não é. Os teoremas são deduzidos de forma tão detalhada e com razões tão necessárias para cada passagem, que compreender a marcha do raciocínio resulta muito claro e está ao alcance de qualquer um, mas compreender esse raciocínio não significa saber-lo.

Se o raciocínio matemático é metódico e bem fundamentado e o aluno vai compreendendo o porquê de cada passagem e como e quando deve fazê-lo, encontrará-se um dia naturalmente apto para manejá-lo com espontaneidade e começará a gozar o jogo puro com os conceitos abstratos regidos pelos sensíveis princípios da lógica.

É tão sensível o raciocínio matemático, que não são necessárias condições inatas, nem configurações cranianas especiais para compreendê-lo. Haverá algumas pessoas que encontrem naturalmente mais facilidade de nesse raciocínio, mas ninguém estará impedido de fazê-lo.

E os que estão mais longe desta ciência se aperceberam depois da necessidade deste exercício intelectual.

O que há é a falta de conhecimentos básicos para progredir no aprendizado desta ciência, e a falta destes conhecimentos é devida à má orientação dada desde a escola primária, inculcando no espírito da criança que a Matemática é difícil e não dá acesso ao comum dos homens. "A Matemática é uma forma corrente de pensar", já o disse o Prof. Young.

O fato científico está em que as crianças não são naturalmente nem "boas", nem "más". Nascem apenas com

reflexos e uns tantos instintos: fora disso é pela ação do meio que os hábitos se formam - hábitos que poderão ser saudáveis ou mórbidos.

O professor deve amar seus discípulos acima de tudo. Nem o caráter nem a inteligência se desenvolvem a contento, quando o mestre não revela amor; e, neste caso, o amor consiste em "sentir" a criança como um fim em si mesmo.

Já é tempo de olharmos a instrução como coisa útil e não como um complemento perfeitamente dispensável e chegarmos ao ponto de poder aplicar o método heurístico, isto é, ser, o professor, orientador da classe, provocando a eclosão do raciocínio de seus alunos, como já o fez Sócrates, e não obrigar o aluno a memorizar meia dúzia de fórmulas que ele não sabe de onde vieram.

**RELATÓRIO DO CURSO DE PRÁTICA DE ENSINO  
MINISTRADO PELA PROFESSORA ANNA AVERBUCH**

Anna Lúcia Nunes Machado Vallier  
Fátima de Almeida  
Alunas do Curso de Matemática da  
Universidade Santa Úrsula

O curso de Prática de Ensino principiou com duas tarefas:

1. observação às aulas nos Colégios Santa Úrsula e Eliezer Steinberg e no Instituto de Educação.
2. crítica a uma coleção didática, escolhida pelos alunos. Essa crítica teve como fonte de consulta o Programa Oficial, e deu oportunidade aos alunos de analisarem a coleção, não só no sentido de observar se cumpre o Programa Oficial, mas também analisar a apresentação do conteúdo didático e os exercícios.

A partir disso, os alunos marcaram aulas nos Colégios com a finalidade de apresentarem um trabalho próprio. Para a realização dessa tarefa, o aluno manteve contato com o professor da turma escolhida, a fim de tomar conhecimento do assunto a ser trabalhado na sala de aula. Essas aulas perfizeram o total de três, sendo avaliadas pela Coordenadora de Matemática e o professor da turma.

O curso trouxe uma bagagem muito boa em termos de apreciação do Ensino da Matemática.

"O Ensino está em crise!" é o que mais se fala e no entanto, nem todos tomam uma iniciativa no sentido de tentar solucionar os problemas do Ensino.

Hoje em dia, notamos a falta de motivação por par

te dos alunos. Culpa deles? Não acredito. Creio que o problema se encontra entre nós, professores. Que tipo de trabalho fornecemos aos nossos alunos? Quantas aulas são dadas na base do "quadro-giz"? Damos, realmente, oportunidade aos nossos alunos de raciocinarem? Por que mantemos muitas vezes uma certa distância entre nós e nossos alunos? Pelo que observei nestes Colégios, uma distância praticamente inexistente entre o professor e o aluno, resulta positivamente. Pois o professor é um elemento que orienta. O tipo de trabalho desenvolvido é bem mais positivo, quando oferece ao aluno a oportunidade de participar ativamente nas aulas, dando-lhe oportunidade de *raciocinar*, de *externar* o que conclui, mesmo que não tenha concluído acertadamente. Nesse caso a dúvida será, através do professor, devolvida à turma. O professor, nesse caso, não chega sozinho à conclusão, ele leva o grupo a isso. A esse tipo de trabalho a reação dos alunos é muito boa, e corresponde às expectativas do professor, pois cria o espírito de colaboração entre os alunos.

Se não fornecemos aos alunos de hoje a oportunidade de raciocinarem, exprimirem o que pensam, de trabalharem em equipe, ajudando-se mutuamente o que esperamos deles no futuro? Trabalhando em termos mais coerentes com o que nossos alunos na realidade necessitam, a Escola não se afastará, em hipótese alguma, de seu objetivo: "preparar para a Vida".

Finalizando, tivemos a oportunidade de assistir duas palestras dadas pelo Prof. Georges Glaeser, de Estrasburgo: O ENSINO ATRAVÉS DE SITUAÇÕES PROBLEMAS e HEURÍSTICA, cujos resumos damos a seguir.

## O ENSINO ATRAVES DE SITUAÇÕES PROBLEMAS

Palestra do Prof. Glaeser  
(18/10/78)

Ao iniciar a palestra, encontramos um quadro elaborado pelo Prof. Glaeser, com diversos tipos de exercícios e referente aos mesmos o comportamento do aluno e do professor.

É-o:

Tipo de exercício	Comportamento do aluno	Comportamento do professor
exercício de documentação	aprender ou informar-se	ensinar ou informar
exercício de pesquisa ou problema	pesquisar	estimular a curiosidade
exercício didático	exercitar	adestrar ou treinar
tarefa técnica	adquirir responsabilidade	exigir meticulosidade
manipulação	fazer e refletir	motivar o abstrato pelo concreto
modelização	aplicar a Matemática à situação prática	apresentar situações matematizadas
teste de avaliação	mostrar suas qualidades e esconder seus defeitos	avaliar ou estimular

Restringimo-nos a copiar o quadro, deixando-o como motivo de reflexão e de discussão.

## HEURÍSTICA

Palestra do Prof. Glaeser  
(20.10.78)

Heurística: estudo dos fenômenos de compreensão. Há uma equivalência entre Heurística e Didática da Matemática (aquisição do mecanismo de não automatismo). A "Procedologia" é diferente do Algoritmo heurístico. Esta começa quando se pode criar truques que não são só matemáticos. A "Procedologia" é um conjunto de receitas.

Diferentes concepções da palavra "Heurística": (Georges Polya)

- Arte de resolver um problema.
- Solução eficaz do problema.
- Ver os fatores que levam ao problema.
- Dar o problema e observar o indivíduo resolvê-lo.

O Professor Glaeser, particularmente, se interessa pelo que ele chama de Heurística Clínica: reúne os estudantes, dá um problema e os observa. Não observa só a resolução do problema, mas principalmente os obstáculos que o aluno encontra na resolução. Há oito anos ele faz esse tipo de observação: Reune um grupo de mais ou menos vinte alunos, separa-os em grupo de três, encoraja-os a se comunicarem o máximo possível. Esta comunicação deve se restringir aos componentes do grupo, não devendo haver contato algum entre os grupos. A razão disso é que ele não quer que o problema fique "poluído" pelas idéias que venham de outro grupo. No fim da sessão (1 hora e meia), ele e seus colaboradores, pois o Professor Glaeser não trabalha sozinho nestas sessões, dão os componentes da Heurística:

- (1) - Um caminho geral - esquema
- (2) - Temas heurísticos.

... de pesquisa: observando um grupo de alu

nos, é sempre possível reconhecer os diferentes domínios de pesquisa. O importante é saber quais são esses domínios. Por exemplo: se o problema for "onde coloquei minha carteira de dinheiro?". O primeiro domínio de pesquisa será procurar a carteira nos lugares onde é possível que ela esteja. Por exemplo, ele não vai procurar na geladeira, ou debaixo da cama etc... Segundo domínio de pesquisa: quando foi a última vez que mexi na minha carteira? Lembro-me de tudo que fiz até perder a carteira. Retrocedendo no tempo lembro que um amigo veio me visitar, e talvez tenha feito uma brincadeira comigo. Terceito domínio de pesquisa: procuro a carteira dentro do piano e a acho!

Cada ciclo se faz por um domínio de pesquisa. Podemos descrever o que se passa em um ciclo por esse quadro:

- |                                    |   |                         |
|------------------------------------|---|-------------------------|
| (1) - Preparação - motivação       | } | compreender o enunciado |
|                                    |   | compreender o problema  |
| (2) - Manipulação                  |   |                         |
| (3) - Incubação                    |   |                         |
| (4) - Inspiração - "micro-eureka". |   |                         |
| (5) - Verificação                  |   |                         |

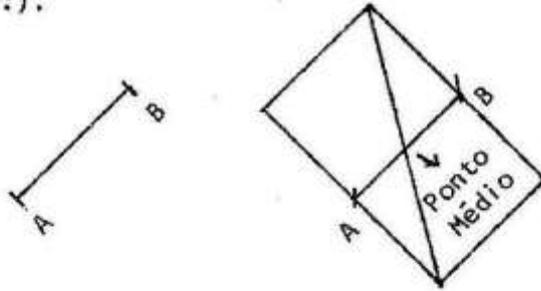
Já se encontra alguma coisa desse gênero nos livros de John Dewey (como pensamos etc...). Lendo John Dewey o Prof. Glaeser encontrou algumas analogias, mas não é a mesma coisa.

A preparação é muito importante para o professor de Matemática. É preciso que o professor faça esse trabalho de preparação para que os alunos tenham vontade de trabalhar. Nesse tipo de trabalho o Prof. Glaeser não tem muita experiência porque os alunos que chegam até ele já estão suficientemente motivados para trabalhar. Mas ele constata que é muito triste que certos alunos não queiram refletir nem pensar, e por isso esse trabalho de preparação do professor torna-se muito importante.

1. Compreender o enunciado.

II. Compreender o problema. (Já é um ciclo por ele mesmo).

Exemplo: Um professor chega na sala de aula e propõe o problema: tenho uma régua suficientemente longa, sem ser graduada. Tenho também uma folha de papel e um lápis. Marcam-se dois pontos no papel e pede-se para marcar o ponto médio. Primeira pergunta: podemos usar a régua: Sim, e ligamos com um traço os dois pontos. Assim os alunos compreendem qual é o enunciado, e começa a manipulação (o aluno começa a chutar!).



Começa então o segundo ciclo: o professor vai ver o que está impedindo os alunos de resolver o problema. Por exemplo, se os pontos estão próximos não posso colocar a régua entre eles. E os alunos trabalham...

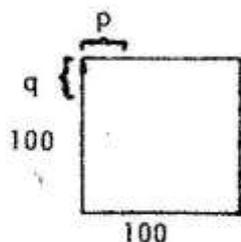
Quais são os dados do problema? Quais as condições restritivas? Quando o problema é muito difícil, começa-se a estudar casos particulares. Nesta fase tudo é permitido, até que o aluno se familiarize com a solução do problema.

III. Incubação: quando o aluno para um pouco, vai almoçar ou tomar um café. Às vezes depois de um repouso, o aluno consegue resolver o problema. Nos últimos anos a teoria do sono fez um progresso muito grande; é objeto de pesquisas experimentais e há um laboratório na França que trabalha só com isso, com a fisiologia do sono.

O Prof. Glaeser pessoalmente tem outra explicação: na primeira fase a pessoa faz muitos cálculos e fica muito cansada após várias tentativas. Na manhã seguinte, se esta pessoa está descansada, ela não se

cansará tanto refazendo as tentativas do dia anterior. Assim, cada ciclo acaba até que cheguem-se a uma "micro-eureka". Após cada "micro-eureka" ela constata o que está certo e o que está errado. Esta é a verificação. A resposta final passará a ser a eureka.

Outro exemplo, que foi dado nas Olimpíadas Russas: Temos uma matriz  $100 \times 100$  formada por elementos positivos e negativos. Considera-se a operação fundamental: toma-se uma coluna e trocam-se todos os sinais dos elementos dessa coluna. A segunda operação fundamental é fazer a mesma coisa com uma linha da matriz. Fazendo essas duas operações fundamentais repetidamente, é possível encontrar... 1970 sinais negativos?



Como essa matriz  $100 \times 100$  é muito grande, experimenta uma matriz pequena para ver qual o mecanismo. Por exemplo, a matriz  $4 \times 4$ .

Ao fim de certo tempo, o professor observará que certos alunos escreveram a seguinte expressão:

$$p(100 - q) + q(100 - p) = 1970$$

Há de início algumas pessoas que trocam as  $q$  linhas e as  $p$  colunas e daí passam a procurar os sinais negativos. Depois de várias tentativas, os alunos começam a perceber que as operações comutam, e tomam consciência que não podem fazer as operações aleatoriamente, mas que tem de sistematizar.

Segundo ciclo: Observação dos alunos na resolução da equação acima. Neste momento eles param de falar em matrizes, e se dedicam às operações. Se eles são cuidadosos e fazem uma boa verificação eles acrescentam que:

$$0 \leq p \leq 100$$

$$0 \leq q \leq 100$$

O aluno trabalha então com as equações diofantinas. Outros tentam colocar  $p$  em função de  $q$ :

$$2pq - 100(p + q) + 1970 = 0$$

$$2pq - 100p = 100q - 1970$$

$$p(2q - 100) = 100q - 1970$$

$$p = \frac{100q - 1970}{2q - 100}$$

Terceiro ciclo: os alunos chegam à conclusão que a resolução desse problema é impossível. É impossível achar 1970 elementos negativos. Eles não sabem que se trata de uma hipérbole equilátera, pois esse tópico não faz parte do currículo estudantil.

## AMENIDADES

### OS NÚMEROS PRIMOS E AS MENSAGENS SECRETAS

Nos tempos de Euclides já se sabia que pode ser encontrado um número primo maior que qualquer outro primo indicado; isto é, conhecia - se desde então, que existe uma infinidade de números primos.

Sabe - se também, desde Gauss, que os números primos vão se tornando mais rarefeitamente distribuídos entre os inteiros, à medida em que vão crescendo.

Para se reconhecerem números primos o método mais antigo e, provavelmente, o mais simples, é o Crivo de Eratóstenes, que todo criança aprendia no curso primário.