BOLETIM

5 abril/78

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA — (GEPEM)

DIRETORIA

Presidente: Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
Vice-Presidente: José Carlos de Mello e Souza
Diretor Cultural: Anna Averbuch
Secretário Geral: Franca Cohen Gottlieb
Secretário: Celena Maria Ferreira Cesar
Primeiro Tesoureiro: Wilson Belmonte dos Santos
Segundo Tesoureiro: Leila Alcure

ASSESSORES

ESTUDOS E PESQUISAS:

Maria da Conceição Gomes
Maria José Montes

TÉCNICO-PEDAGÓGICO:

Estela Kaufman Fainguelernt
Amélia Maria N. de Pessoa de Queiroz

PUBLICAÇÕES:

Moema Lavinia Mariani de Sá Carvalho
Vera Maria Rodrigues

INTERCÂMBIO INTERNACIONAL:

Franca Cohen Gottlieb

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Os professores Paulo Fabio Bregalda do Carmo, Claudio Thomas Bornstein, e Maria Laura Mouzinho Leite Lopes colaboraram neste número do Boletim, com:

- Uma introdução à Programação Linear, abordada a nível do ensino médio, pelos dois primeiros professores;
- Três Idéais Básicas no Ensino da Matemática, em que a Prof. Maria Laura tece considerações sobre linearidade, aproximações e probabilidades na educação matemática. (Transcrito do Jornal do Brasil — Jornal do Professor — 1978, Janeiro).

Além dessas colaborações publicamos, a título de curiosidade, uma tradução de certa carta de Galois, cujas observações, muitas delas, podem ser consideradas atuais.

Prosseguindo, inauguramos as seções:

- **Resenha Bibliográfica,** com comentários sobre textos recentemente publicados pela UNICAMP — Geometria Experimental, Funções, Equações e Inequações;
- **Notícias,** com referências sobre as "Reuniões Técnicas de Matemática", organizadas pela Fundação Centro de Recursos Humanos da Educação e Cultura, (CDRH), da Secretaria de Estado de Educação e Cultura, citando um exemplo de módulo instrucional, elaborado pelos participantes.

Esperamos, dessa maneira, continuar sendo de alguma utilidade ao ensino da Matemática, ao estabelecermos esses contatos com experiências de hoje ou de ontem, e contamos com as sugestões dos colegas, no sentido de dinamizar e aperfeiçoar nosso relacionamento.

UMA INTRODUÇÃO A PROGRAMAÇÃO LINEAR

Professores:
Claudio Thomas Bornstein
Paulo Fabio Bregalda do Carmo

ROTEIRO

1. Introdução
2. Termos da Programação Linear
3. Fundamentação Teórica do Modelo Geral de um PPL
4. O Modelo Geral de um PPL
5. Modelagem de um PPL
6. Resolução Gráfica de um PPL
   6.1 Fundamentação Teórica
   6.2 Solução e representação gráfica de problemas de Programação Linear
7. Um exemplo completo de aplicação a nível de 2.º Grau
   7.1 Determinação do modelo
   7.2 Solução gráfica do modelo
8. Conclusão
9. Referências Bibliográficas

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho é feita uma breve apresentação da Programação Linear, destinada a professores que lecionam no 2.º grau. A programação linear, que é uma área da matemática aplicada, emprega uma série de conceitos da Álgebra Linear, do Cálculo Diferencial e Integral e da Topologia. A resolução gráfica de Problema de Programação Linear, envolvendo até 3 variáveis, pode ser feita empregando conceitos que são estudados no curso de 2.º grau. A finalidade desse artigo não é a de "ensinar" Programação Linear e nem tampouco de introduzir Programação Linear no programa de 2.º grau. Pretendemos apenas ilustrar ,através de um PPL, a aplicação de conceitos como relações e funções e motivar os alunos para aprendê-los.

Por exemplo, a noção de matriz, sistemas de equações lineares, método de resolução de sistemas de equações lineares de Gauss-Jardan etc..., quando ensinados de uma forma abstrata e sem vínculo com a realidade perdem facilmente o interesse para um aluno de 2.º grau que desconhece as suas finalidades. Além disso desestimulamos uma curiosidade crítica do aluno, que justificadamente deveria se preocupar também com a razão, o objetivo e a finalidade daquilo que aprende. Através de problemas de Programação Linear, permite-se ao aluno o emprego concreto de uma série de conceitos vistos durante o curso.

A Programação Linear é uma das áreas da Pesquisa Operacional que desenvolve, fundamentalmente, técnicas de otimização aplicadas a modelos matemáticos.

A Pesquisa Operacional surgiu durante a segunda guerra mundial, através do estudo de um grupo de matemáticos, estatísticos e economistas que desenvolveram e aplicaram modelos matemáticos para United States Air Force. Deste grupo de trabalho fazia parte um matemático chamado DANTIG que formulou o problema geral de Programação Linear e criou o eficiente **Método Simplex** cuja publicação foi feita em 1951. Rapidamente a Pesquisa Operacional difundiu-se no mundo inteiro e passou a ser usada em quase todas as áreas do conhecimento humano. Todas as grandes firmas do mundo a usam para resolver seus problemas econômicos, sistêmicos, estruturais, estratégicos, políticos, de decisão, de planejamento etc. Sua grande aplicabilidade e eficiência garantem um lugar de destaque dentro da matemática.

O desenvolvimento da Pesquisa Operacional foi possível devido ao advento da moderna geração de computadores que possibilitou a resolução de problemas reais de grande porte. Como a maioria das técnicas de otimização utiliza métodos iterativos é compreensível que estes dificilmente poderão ser resolvidos manualmente. Daí a necessidade do uso dos computadores.

Daremos como exemplo de aplicação num curso de 2.º grau, um problema real envolvendo duas variáveis. Para resolução deste problema usaremos apenas termos matemáticos bastante comuns no nosso programa.

2. TERMOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

A **Programação Linear** visa fundamentalmente encontrar a melhor solução de problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. A sua grande aplicabilidade e simplicidade devem-se à **Linearidade** do modelo.

A tarefa da **Programação Linear** consiste na **Maximização** ou **Minimização** de uma função linear, denominada **Função-Objetivo,** respeitando-se um sistema linear de igualdades e/ou desigualdades, que recebem o nome de **Restrições** do modelo. A função objetiva representa a **Meta** a ser atingida. Quando, por exemplo, ela representa o lucro de uma firma, trata-se de um problema de **Maximização** e, quando representa o custo, o problema é de **Minimização.** As restrições do modelo representam em geral limitações de recursos disponíveis (capital, mão-de-obra, recursos minerais ou fatores de produção) ou então exigências e condições que devem ser cumpridas no problema. Essas restrições determinam um semi-espaço ao qual dá-se o nome de conjunto das soluções viáveis. A melhor das soluções viáveis, isto é, aquela que maximiza ou minimiza a função objetivo denomina-se a **solução ótima.** O objetivo (meta) da programação linear consiste na determinação da solução ótima.

O problema de programação linear, chamado resumidamente de PPL, é **estático,** isto é, as condições estabelecidas para o modelo são invariantes no tempo.

Dois passos são fundamentalmente necessários num PPL. O primeiro passo é a **modelagem** do problema e o segundo é a **resolução** do modelo. O método mais utilizado para resolver um PPL é o **simplex.**

Não existem técnicas precisas nem "receitas" que permitam o estabelecimento do modelo de um problema. Cabe aí, principalmente, bom-senso, transferência dos conceitos adquiridos, capacidade de análise e síntese.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO MODELO GERAL DE UM PPL

Vamos estabelecer alguns conceitos nos quais a Programação Linear se apoia. O instrumental usado é a Álgebra Linear. Colocaremos esses conceitos apenas para dar o modelo geral de um PPL. No entanto, essa parte pode e deve ser omitida quando aplicarmos um PPL no curso de 2.º grau. Veremos mais adiante como isso poderá ser feito, apenas usando conceitos já pré-estabelecidos, a nível de 2.º grau.

Definição 1

Sejam V e U espaços vetoriais sobre o corpo **R**. Uma função $F:V \longrightarrow U$ é chamada de **Função** (ou **Transformação Linear**) de V em U se:

quaisquer sejam $v_1, v_2 \in V$ quaisquer sejam $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$
$F(a_1v_1+a_2v_2) = a_1F(v_1) + a_2F(v_2)$

Essa definição está condensada em apenas uma condição. Mas, poderia, para melhor visualização, ser dada através de duas condições:

i) para todo $v_1, v_2 \in V$
$F(v_1+v_2) = F(v_1) + F(v_2)$
ii) para todo $v \in V$, para todo $a \in \mathbf{R}$
$F(av) = a\,(Fv)$

EXEMPLO 1

A função $F:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tal que

$F(x,y) = (2x-y,x+y)$ é Linear.

Sejam $v_1 = (x_1,y)$ e $v_2 = (x_2,y) \in \mathbf{R}^2$

Aplicando as regras de soma de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar, temos quaisquer sejam a_1, $a_2 \in \mathbf{R}$:

$$F(a_1v_1+a_2v_2) = F(a_1(x_1,y_1) + a_2(x_2,y)) =$$
$$= F((a_1x_1,a_1y_1) + (a_2x_2,a_2y_2)) = F(a_1x_1+a_2x_2,a_1y_1+a_2y_2) =$$
$$= (2(a_1x_1+a_2x_2) - a_1y_1-a_2y_2,\ a_1x_1+a_2x_2+a_1y_1+a_2y_2) =$$
$$= (2a_1x_1+2a_2x_2-a_1y_1-a_2y_2,\ a_1x_1+a_2x_2+a_1y_1+a_2y_2) =$$
$$= (2a_1x_1-a_1y_1,\ a_1x_1+a_1y_1) + (2a_2x_2-a_2y_2,\ a_2x_2+a_2y_2) =$$
$$= a_1\ (2x_1-y_1,\ x_1+y_1) + a_2\ (2x_2-y_2,\ x_2+y_2) =$$
$$= a_1\ F(x_1,y_1) + a_2\ F(x_2,y_2) = a_1\ F(v_1) + a_2\ F(v_2)$$

EXEMPLO 2:

A função $G: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $G(x) = x+2$ não é linear

quaisquer sejam $v_1, v_2 \in \mathbf{R}$, quaisquer sejam a_1, $a_2 \in \mathbf{R}$

$$G\ (a_1v_1+a_2v_2) = a_1v_1+a_2v_2+2 =$$
$$= a_1v_1+2a_1 + a_2v_2 + 2a_2 - 2(a_1+a_2-1) =$$
$$= a_1G\ (v_1) + a_2G(v_2) - 2\ (a_1+a_2-1) \neq a_1\ G\ (v_1) + a_2\ G\ (v_2)$$

OBSERVAÇÃO

Na primeira definição de função linear se fizéssemos $a_1 = a_2 = 0 \longrightarrow$
$F(a_1v_1 + a_2v_2) = F(0 \,.\, v_1 + 0 \,.\, v_2) = F(\bar{o}) = 0 \,.\, F(v_1) +$
$+ 0 \,.\, F(v_2) = \bar{o}$. ou seja$F(\bar{o}) = \bar{o}$.

Isto é, toda função linear "leva" o vetor nulo ($\bar{o}$) no vetor nulo. A recíproca, no entanto, não é verdadeira.

Baseado nesse fato poderíamos garantir de imediato que a função do exemplo 2 não é linear, pois
$G\ (x+2) \longrightarrow G\ (\bar{o}) = 2 \neq \bar{o}$

DEFINIÇÃO 2

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo **R**. Uma função $Q: V \longrightarrow \mathbf{R}$ é um Funcional Linear (ou Forma Linear) se:

quaisquer sejam $v_1, v_2 \in V$ e quaisquer sejam $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$
$\mathbf{Q}\ (a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\ \mathbf{Q}\ (v_1) + a_2\ \mathbf{Q}\ (v_2)$

Isto é, um **Funcional Linear** é uma função linear de V em **R**.

EXEMPLO 3

A função **Q**: $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $Q(x,y) = 2x - 3y$ é um Funcional Linear.

Basta mostrar que **Q**: $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ é linear.

Para todo $v_1 = (x_1,y_1)$, $v_2 = (x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2$ e para todo a_1, $a_2 \in \mathbf{R}$, temos:

$\mathbf{Q}(a_1v_1 + a_2v_2) = \mathbf{Q}(a_1(x_1, y_1) + a_2(x_2, y_2)) =$
$= \mathbf{Q}(a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2) = (2a_1x_1 + 2a_2x_2 - 3a_1y_1 - 3a_2y_2)$
$= a_1(2x_1 - 3y_1) + a_2(2x_2 - 3y_2) = a_1\mathbf{Q}(x_1, y_1) + a_2\mathbf{Q}(x_2,y_2) =$
$= a_1\mathbf{Q}(v_1) + a_2\mathbf{Q}(v_2)$

DEFINIÇÃO 3

Uma **Desigualdade (ou Inequação)** Linear é uma desigualdade da forma:

$F(x) \geqslant b$ ou
$F(x) \leqslant b$ ou
$F(x) > b$ ou
$F(x) < b$

Onde $F: V \longrightarrow \mathbf{R}$ é um funcional linear, $x \in V$ e $b \in \mathbf{R}$.

Da mesma maneira, Igualdade Linear é uma igualdade da forma $F(x) = b$

EXEMPLO 4

DESIGUALDADES LINEARES:

a) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots \ldots + a_nx_n \geqslant a_0$

Onde: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$a_i \in \mathbf{R}$ (para todo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$)

b) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 \leqslant 5$

IGUALDADES LINEARES:

a) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = a_0$

b) $5x_7 - 2x_5 + 10x_8 - 7x_1 = -3$

4. O MODELO GERAL DE UM PPL

A **Programação Linear** consiste na **Maximização** ou **Minimização** de um **Funcional Linear**, a **Função Objetivo**, respeitando-se um conjunto de **Igualdades** e/ou **Desigualdades** Lineares.

A **Forma Geral** de um PPL é, portanto:

Min. $\mathbf{Q}(x) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$
Sujeito A:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geqslant o \text{ (para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\}) \end{cases}$$

A solução do problema será o ponto $x^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \in \mathbf{R}^n$, chamado de Ponto Ótimo, que satisfaz a todas as restrições do problema e fornece o menor valor à função objetivo $\mathbf{Q}(x)$.

5. MODELAGEM DE UM PPL

Mostraremos nesta seção, através de um exemplo, como obter o **Modelo** ou como **Equacionar** um problema de Programação Linear.

EXEMPLO 5 — O PROBLEMA DA DIETA

Um nutricionista precisa estabelecer uma dieta contendo, pelo menos, 10 unidades de vitamina A, 30 unidades de vitamina B e 18 unidades de vitamina C. Essas vitaminas estão contidas em quantidades variadas em 5 alimentos, que vamos chamar de S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5. O quadro seguinte dá o número de unidades das vitaminas A,B e C em cada unidade desses 5 alimentos, bem como o seu custo, em cruzeiros, por unidade

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A	0	1	5	4	3
B	2	1	0	3	2
C	3	1	0	9	0
custo	4	2	1	10	5

Ache as quantidades dos cinco alimentos que devem ser incluídos na dieta diária, a fim de se encontrar esses teores de vitamina com o menor custo.

ESTABELECIMENTO DO MODELO

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, o número de unidades dos alimentos S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, respectivamente, de uma dieta diária.

O teor de, pelo menos, 10 unidades de vitamina A pode ser expresso da seguinte maneira:

$$x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geqslant 10$$

Analogamente, indicamos os outros teores mínimos, respectivamente, da seguinte forma:

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geqslant 30$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_4 \geqslant 18$$

Como não podemos consumir uma quantidade negativa de unidades dos alimentos, temos também:

$$x_1 \geqslant 0 \text{ , } x_2 \geqslant 0 \text{ , } x_3 \geqslant 0 \text{ , } x_4 \geqslant 0 \text{ , } x_5 \geqslant 0$$

O custo por dia desta dieta, em cruzeiros, será expresso pelo Funcional Linear:

$$Q(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5$$

Nosso problema é, portanto, determinar o ponto $x^* = (x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4, x^*_5) \in R^5$ (Ponto Ótimo) tal que satisfaça a todas as Restrições (inequações lineares) e minimize, ao mesmo tempo, o valor da função $Q(x)$ (Função Objetivo). Isto pode ser indicado, resumidamente, da seguinte maneira:

$$\text{Min. } Q(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5$$

Sujeito A:

$$\left|\begin{array}{lllll} & x_2 + & 5x_3 + & 4x_4 + & 3x_5 \geqslant 10 \\ 2x_1 + & x_2 + & & 3x_4 + & 2x_5 \geqslant 30 \\ 3x_1 + & x_2 + & & 9x_4 & \geqslant 18 \\ x_1 \text{ , } & x_2 \text{ , } & x_3 \text{ , } & x_4 & \text{ , } x_5 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

6. RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PPL

6.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

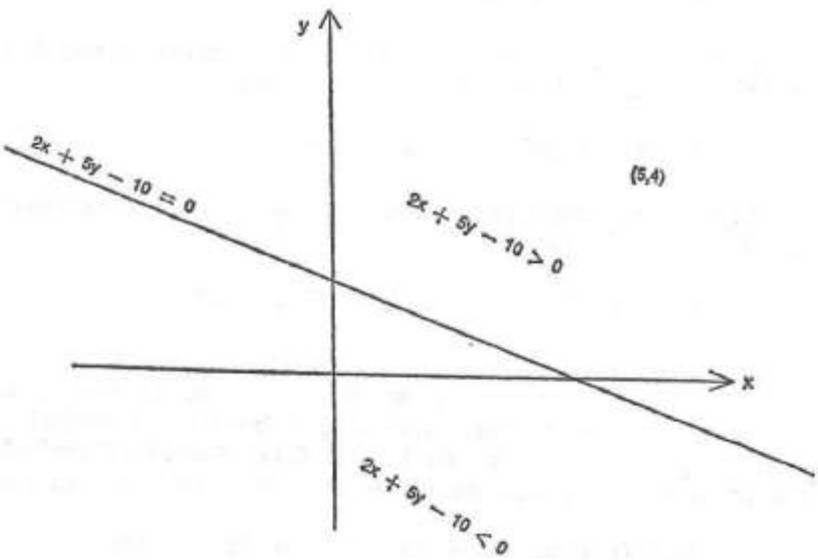
DEFINIÇÃO 4

No $\mathbf{R}^2$ (plano) a **Equação da Reta** é da forma $ax + by + c = 0$ com a, b, c $\in$ **R** e a e b não simultaneamente nulos.

Uma reta separa o plano em duas regiões que chamamos de **semi-planos.**

A inequação $ax + by + c > 0$ representa um dos semi-planos e a inequação $ax + by + c < 0$ representa o outro semi-plano.

EXEMPLO 6



Para sabermos qual é o semi-plano, por exemplo, da inequação $2x + 5y - 10 > 0$ tomamos um ponto qualquer, que não pertença à reta $2x + 5y - 10 = 0$, para **Teste.** Seja esse o ponto (5,4). Substituindo na inequação, temos $2.5 + 5.4 - 10 > 0$. Como o ponto (5,4) satisfaz à inequação $2x + 5y - 10 > 0$ ele, evidentemente, pertence ao semi-plano por ela representado.

Se tivéssemos tomado o ponto $(0, -2)$ teríamos $2.0 + +5.(-2) - 10 < 0$. Logo, $(0, -2)$ não pertence ao semi-plano $2x + 5y - 10 > 0$.

Da mesma forma verificamos que o ponto $(5,0)$, por exemplo, pertence à reta $2x + 5y - 10 = 0$.

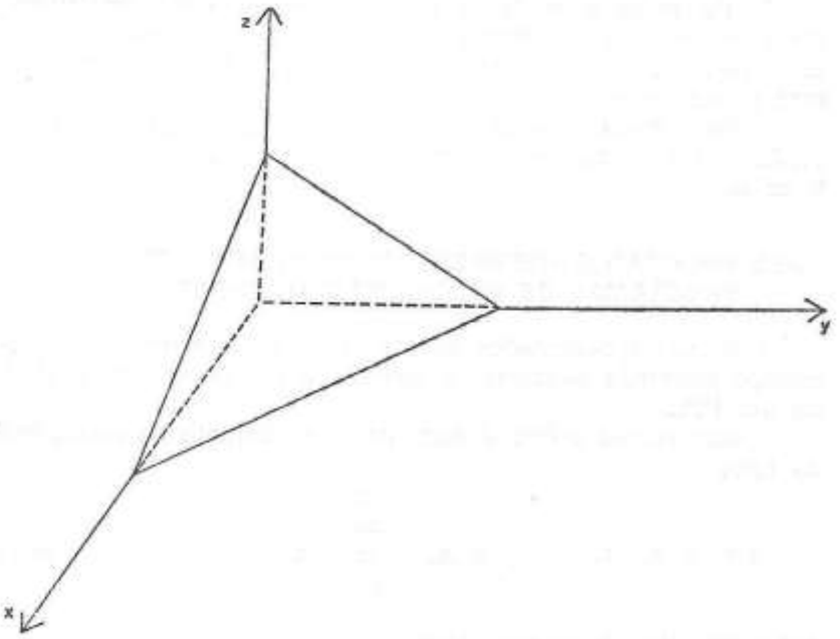
DEFINIÇÃO 5

No $\mathbf{R}^3$ a Equação do Plano é da forma $ax + by + cz + + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Um plano separa o $\mathbf{R}^3$ em duas regiões que denominamos semi-espaços.

A inequação $ax + by + cz + d > 0$ representa um dos semi-espaços e a inequação $ax + by + cz + d < 0$ representa o outro semi-espaço.

EXEMPLO 7



O plano $6x + 4y + 3z = 12$ (representado graficamente na figura pelo triângulo) divide o $\mathbf{R}^3$ em dois semi-espaços que são representados pelas inequações $6x + 4y + 3z > 12$ e $6x + + 4y + 3z < 12$. Para sabermos a qual das regiões refere-se a inequação, tomamos, como no exemplo anterior, um ponto de teste.

DEFINIÇÃO 6

Estendendo para o R^n, as definições 4 e 5, podemos definir **Hiperplano** como o conjunto de pontos da forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tais que $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = a_o$ com $a_o, a_1\, a_2, \ldots, a_n \in R$.

Como anteriormente, podemos dizer que o hiperplano divide o R^n em dois Semi-espaços representados pelas inequação ou desigualdades lineares:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n > a_o$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n < a_o$$

OBSERVAÇÕES

i) A **Reta** é, portanto, o **Hiperplano** no R^2 e o **Plano** é o **Hiperplano** no R^3.

ii) Podemos entender a equação $ax = b$ de um **Hiperplano** como sendo o **Produto Escalar** entre os vetores $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, já que o produto será o escalar b.

iii) O **Hiperplano** $ax = b$ contém o vetor nulo $\bar{o} = (0,0, \ldots, 0)$, isto é, passa pela origem dos eixos, se e somente se, $b = o$.

6.2 SOLUÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Uma vez apresentados os conceitos de hiperplano e semi-espaço podemos examinar a solução e representação gráfica de um PPL.

Como vemos o PPL é dado por um conjunto de restrições do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in}x_n \quad \begin{matrix} \geq \\ \text{ou} \\ = \\ \text{ou} \\ \leq \end{matrix} \quad b_i \tag{6.1}$$

condições de não-negatividade

$$x_i \geq 0 \tag{6.2}$$

e uma função-objetivo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = Q(x) \tag{6.3}$$

(ver item 4 — modelo geral de um PPL)

Evidentemente, as restrições (6.1) e as condições de não-negatividade (6.2) podem ser representadas por um conjunto de hiperplanos e semi-espaços que vão determinar um conjunto de pontos do espaço $\mathbf{R}^n$ denominado CONJUNTO DE SOLUÇÕES VIÁVEIS. Também a função-objetivo representa uma família, isto é, um conjunto de hiperplanos paralelos entre si. A cada ponto do conjunto de soluções viáveis está associado, um e somente um, hiperplano da família (6.3).

GEOMETRICAMENTE, o problema de programação linear consiste, portanto, em encontrar dentre o conjunto de pontos ou soluções viáveis, delimitado pelos hiperplanos (6.1) e (6.2), aquele ponto pelo qual passe um hiperplano da família (6.3) que otimize o valor Q (x) a ele associado.

Evidentemente que a representação e solução gráfica deste problema só é possível no $\mathbf{R}^2$ e no $\mathbf{R}^3$. Portanto somente problemas com um máximo de 3 variáveis podem ser solucionados por este método.

A importância do método gráfico não consiste em encontrar a solução do problema, mas sim permitir visualizar o método algébrico do qual o método SIMPLEX, é o mais conhecido.

Como veremos, graficamente a solução do PPL consiste em uma busca do VÉRTICE que otimiza a função-objetivo (o conceito de vértice é usado aqui como um conceito primitivo).

Daremos a seguir alguns exemplos de resolução gráfica de PPL:

EXEMPLO 8

Seja o seguinte modelo de um PPL com duas variáveis:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leqq 15 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqq 6 \\ x_1 \geqq 0 \text{ , } x_2 \geqq 0 \\ 2x_1 + x_2 = Q(x) \longrightarrow \text{MAX.!} \end{cases}$$

Cada restrição do modelo representa um **Semi-plano** no $\mathbf{R}^2$. Como queremos os pontos que satisfazem as cinco restrições o CONJUNTO DAS SOLUÇÕES VIÁVEIS será a interseção desses cinco semi-planos. Esse conjunto também é chamado de POLITOPO.

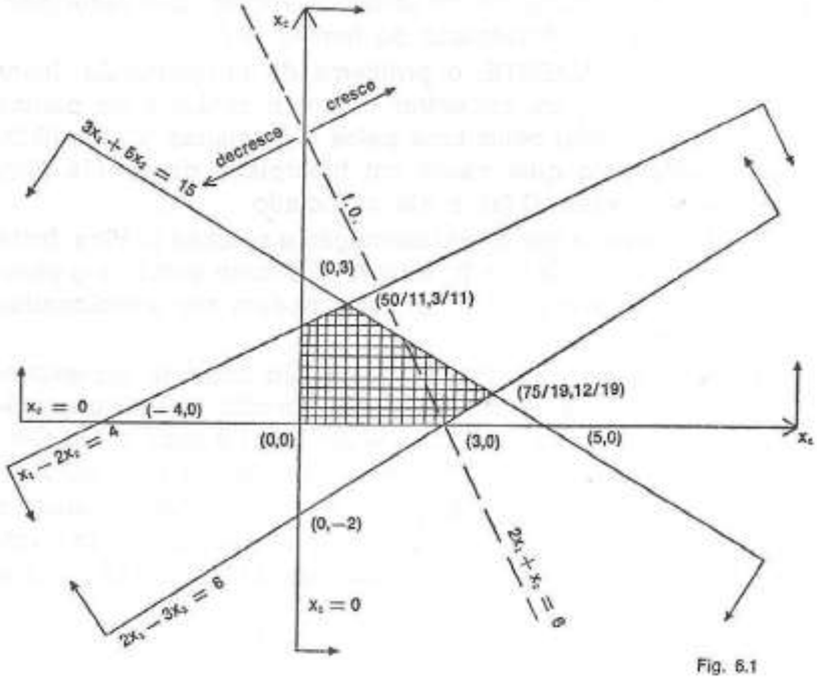


Fig. 6.1

Vamos agora determinar qual (ou quais) o(s) ponto(s) que pertence(m) ao conjunto viável e que ao mesmo tempo fornece(m) o MAIOR valor para a função objetivo $Q(x) = 2x_1 + x_2$.

Como a função-objetivo representa uma família de retas paralelas, vamos tomar uma qualquer e verificar a relação existente entre a reta e o valor $Q(x)$ correspondente. Fazendo $Q(x) = 6$ obtemos a reta $2x_1 + x_2 = 6$, que está representada de uma forma tracejada na figura 6.1. Verificamos que ao deslocar a reta paralelamente a si mesma, para a direita, isto na verdade implica em fazer crescer o valor de $Q(x)$. O nosso problema consiste portanto em procurar o ponto pertencente ao conjunto viável, tal que por ele passe a reta que maximiza Q(x). Este ponto é determinado tangenciando-se, à direita, o politopo pela função-objetivo.

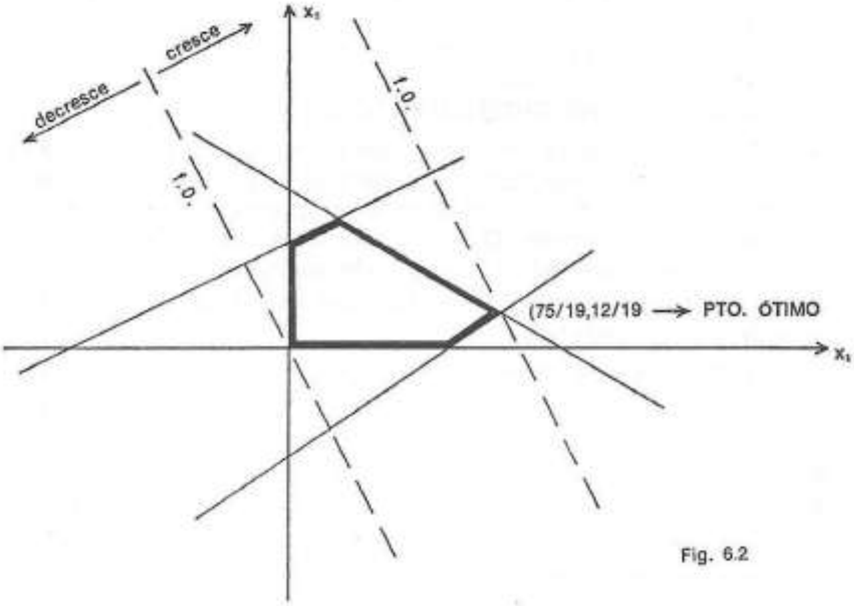


Fig. 6.2

Portanto, a solução ÓTIMA é:

$$x_1 = 75/19 \text{ e } x_2 = 12/19$$

$$\text{MAX. } Q(x) = 2 \cdot \frac{75}{19} + 1 \cdot \frac{12}{19} \Rightarrow \text{MAX. } Q(x) = \frac{162}{19}$$

OBSERVAÇÕES:

i) Para determinarmos o sentido de crescimento ou decrescimento da função objetivo basta tomarmos um ponto situado em um dos semiplanos definido pela reta que representa a função objetivo, e verificarmos se este ponto implica ou não em um crescimento da função-objetivo. Saberemos assim o lado para o qual esta cresce ou decresce.

Para garantirmos o fato de que a função objetivo cresce sempre num sentido determinado, podemos nos apoiar num teorema do cálculo diferencial e integral que diz que se uma função $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ é diferenciável então o vetor $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, em cada ponto $x \in \mathbf{R}^n$, aponta no sentido do MÁXIMO CRESCIMENTO DA FUNÇÃO.

Quando a função for linear, como no nosso caso, o vetor $\nabla f(x)$, chamado GRADIENTE da função f, é CONSTANTE isto é, para todo $x \in \mathbf{R}^n$, $\nabla f(x)$ aponta sempre no mesmo sentido.

No nosso exemplo $\mathbf{Q}(x) = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \nabla \mathbf{Q}(x) = (2,1)$ que é o vetor que dá o sentido de máximo crescimento de $\mathbf{Q}(x)$. Podemos observar também que ele é perpendicular à reta da função objetivo.

ii) Podemos demonstrar que a solução ótima, quando existe, sempre ocorre num dos vértices do POLITOPO e que esse politopo é sempre CONVEXO. Assim sendo a tarefa de busca da solução ótima fica bastante simplificada, pois, basta que determinemos o VÉRTICE que otimiza a função objetivo.

Podemos imaginar o método de solução de um PPL da seguinte maneira: começamos pela origem e tomamos a direção que otimiza a função-objetivo. Seguimos assim de vértice em vértice tomando sempre a direção que permite o máximo crescimento (ou decrescimento) da função-objetivo. Prosseguimos desta forma até que não seja possível melhorar o valor desta última. Neste caso o vértice atingido é a solução ótima do problema e podemos parar.

Este processo, visualizado aqui graficamente, representa de uma maneira geral a forma de atuação do SIMPLEX.

EXEMPLO 9

Daremos, apenas como ilustração, a solução gráfica de um PPL com 3 variáveis. O leitor poderá verificar que esse método gráfico, para problemas com 3 variáveis, ainda é possível de ser realizado. Porém, requer uma certa habilidade de desenho e uma boa visão espacial, o que o torna desaconselhável.

Seja o seguinte modelo de um PPL com 3 variáveis:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqq 0 \\ x_1 + x_3 \leqq 10 \\ x_2 \leqq 6 \\ x_3 \leqq 6 \\ x_1 \geqq 0 \ : \ x_2 \geqq 0 \ ; \ x_3 \geqq 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = \mathbf{Q}(x) \Rightarrow \text{MAX.!} \end{cases}$$

Determinando o POLITOPO (CONJUNTO DAS SOLUÇÕES VIÁVEIS) definido pela interseção das 7 restrições do modelo e a seguir o ponto ótimo, temos:

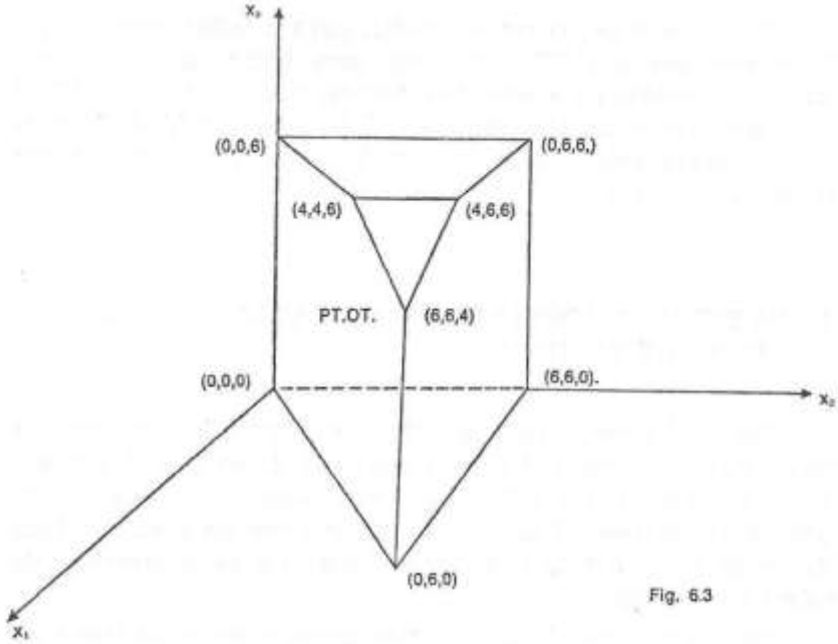


Fig. 6.3

Traçando o plano da função objetivo $\mathbf{Q}(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$, o que não fizemos para não sobrecarregar o gráfico, obtemos o PONTO ÓTIMO (6,6,4).

Portanto, a solução ÓTIMA é:

$x_1 = 6$; $x_2 = 6$; $x_3 = 4$
MAX. $\mathbf{Q}(x) = 3.6 + 4.6 + 4 \Rightarrow$ MAX. $\mathbf{Q}(x) = 46$