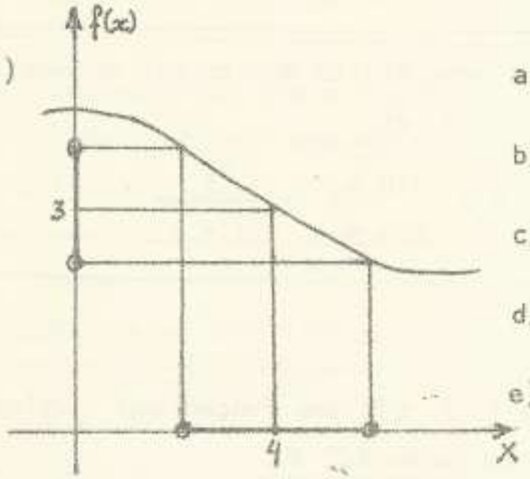
B - Limites laterais

B.1 - Preliminares

B.1.1 - Observe os gráficos e assinale as afirmações corretas.

1)



a) ( ) $\lim_{x \to 4_-} f(x) = 4$

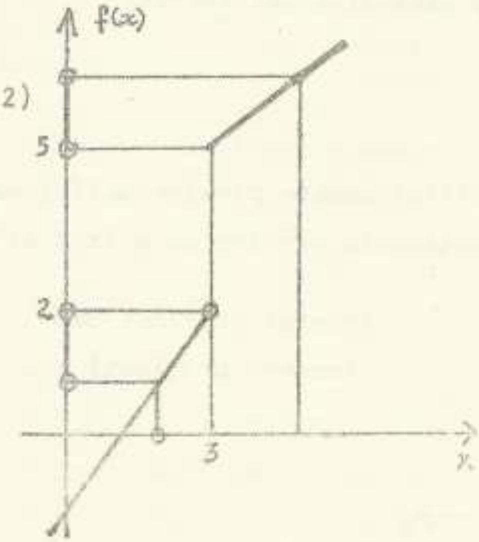
b) ( ) $\lim_{x \to 4_-} f(x) = 3$

c) ( ) $\lim_{x \to 4_+} f(x) \neq 3$

d) ( ) $\lim_{x \to 4_-} f(x) = \lim_{x \to 4_+} f(x) = 3$

e) ( ) $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$

2)



a) ( ) $\lim_{x \to 3_-} f(x) = 5$

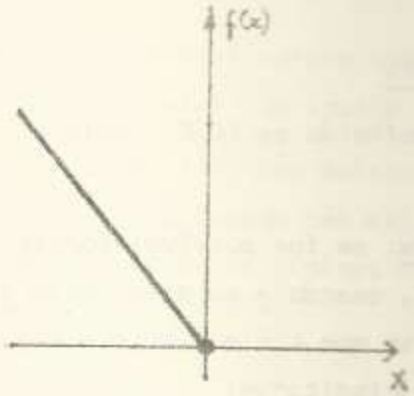
b) ( ) $\lim_{x \to 3_-} f(x) = 2$

c) ( ) $\lim_{x \to 3_+} f(x) = 5$

d) ( ) $\lim_{x \to 3_-} f(x) = \lim_{x \to 3_+} f(x)$

e) ( ) $\lim_{x \to 3_-} f(x) \neq \lim_{x \to 3_+} f(x)$

3)



a) ( ) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$

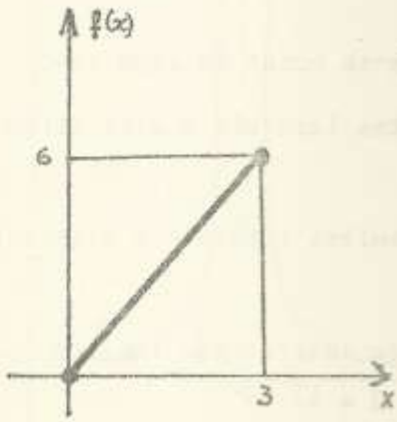
b) ( ) $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 0$

c) ( ) $\exists \lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$

d) ( ) $\nexists \lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$

e) ( ) $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 3$

4)



a) ( ) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$

b) ( ) $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = -1$

c) ( ) $\nexists \lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$

d) ( ) $\exists \lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$

e) ( ) $\lim\limits_{x \to 6_-} f(x) = 3$

B.2 - Definição

B.2.1 - Limites laterais

Seja $f(x)$ uma função definida em $E \subset \mathbb{R}$. Seja a um ponto de acumulação de E.

Definição 1) Limite à esquerda: se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próxima de L, quando x se aproxima de a por valores inferiores a a, diz-se que L é o limite à esquerda de $f(x)$, para x tendendo a a, e indica-se:

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = L$$

Definição 2) Limite à direita: se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próxima de L quando x se aproxima de a por valores superiores a a diz-se que L é o limite à direita de $f(x)$, para x tendendo a a, e indica-se:

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = L$$

Da observação dos gráficos pode-se notar em cada caso:

1) que podem existir dois limites laterais e eles serem iguais. (gráfico 1)

2) que podem existir os dois limites laterais e eles serem diferentes (gráfico 2)

3) que a existência de um limite lateral não implica na existência do outro. (gráficos 3 e 4)

Diz-se que:

1º) O limite de f(x) existe quando existem os dois limites laterais e eles são iguais.

2º) O limite de f(x) não existe quando não existe o limite à direita ou quando não existe o limite à esquerda ou quando existem os limites laterais e eles são diferentes.

C - Limites finitos e infinitos

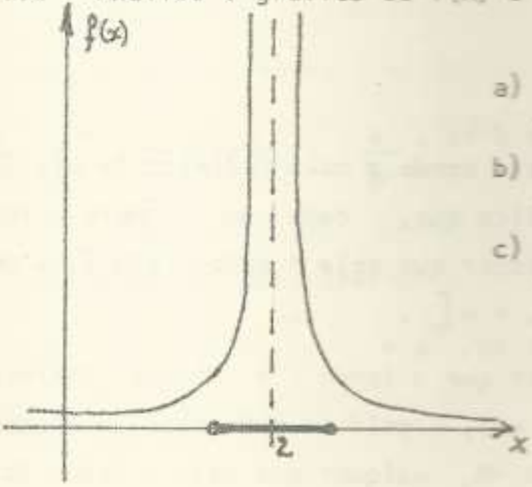
C.1 - Preliminares

C.1.1 - Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

de que ponto a f(x) se aproxima quando x cresce indefinidamente?

C.1.2 - Analise o gráfico da f(x) e calcule:

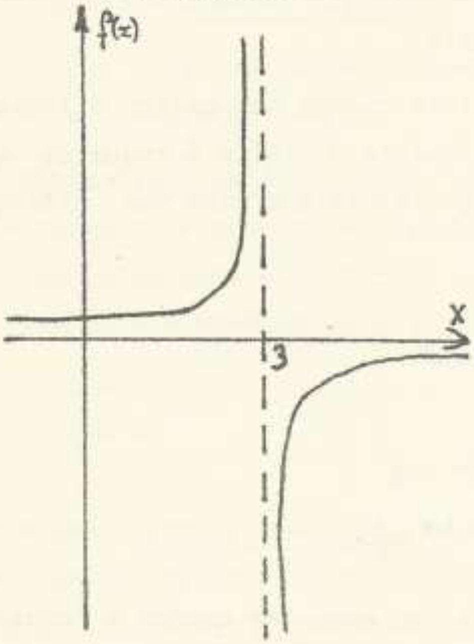


a) $\lim\limits_{x \to 2_-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 2_+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

C.1.3 - Oberve o gráfico da $f(x)$ e assinale as afirmações verdadeiras.



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ( )

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ( )

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ( )

d) $\lim\limits_{x \to 3_-} f(x) = -\infty$ ( )

e) $\lim\limits_{x \to 3_-} f(x) = +\infty$ ( )

$\lim\limits_{x \to 3_+} f(x) = -\infty$ ( )

f) $\exists \lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ( )

Dos gráficos analisados, vocês verificaram que existem <u>limites no infinito</u> (exercício C.1.1) e <u>limites infinitos</u> (exercício C.1.2).

C.2 - <u>Conclusão</u>:

C.2.1 - Dizer que x tende a mais infinito ($+\infty$), (indica-se $x \to +\infty$), significa que, dado um número real $M > 0$ $\exists x \mid x > M$, qualquer que seja M dado, isto é, x percorre o intervalo $]M, +\infty[$.

Analogamente, dizer que x tende a menos infinito ($-\infty$) (anota-se $x \to -\infty$), significa que, dado um número real $M > 0$, $\exists x \mid x < -M$, qualquer que seja M dado, isto é, x percorre o intervalo $\left]-\infty, -M\right[$.

D - Propriedades: Pode-se demonstrar que:

D.1.1 - Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então ele é único.

(unicidade do limite)

D.1.2 - Sejam f(x) e g(x) duas funções definidas num mesmo conjunto D e tais que: $\lim_{x \to x_o} f(x) = a$ e

$\lim_{x \to x_o} g(x) = b$

1) limite da soma:

$$\lim_{x \to x_o} \left[f(x) + g(x)\right] = a + b$$

2) limite do produto:

$$\lim_{x \to x_o} \left[f(x) \,.\, g(x)\right] = a.b$$

3) limite do quociente:

$$\lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}, \text{ se } b \neq o$$

4) limite de uma potência:

a) $$\lim_{x \to x_o} \left[f(x)\right]^n = a^n, \text{ se } a \geqslant 0$$

b) se $a < 0$ $\begin{cases} n \text{ é ímpar } \lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x)\right]^n = a^n < 0 \\ n \text{ é par } \lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x)\right]^n = -a^n\ 0> \end{cases}$

5) limite de uma raiz:

$$\lim_{x \to x_o} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}, \text{ se } a \geqslant 0$$

6) limite do logarítimo: se $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a$ e $a > 0$ então

$$\lim_{x \to x_o} \left[\log f(x)\right] = \log - \left[\lim_{x \to x_o} f(x)\right] = \log a$$

D.1.3 - Como um dos objetivos do nosso curso é fornecer subsídios para o cálculo de limites, enumeraremos algumas outras propriedades que podem ser utilizadas:

Não daremos as demonstrações pois este não é o nosso objetivo, mas o aluno que estiver interessado poderá encontrá-las em qualquer livro de cálculo ou Análise Matemática.

Daremos o final do módulo uma bibliografia para aqueles que quiserem aprofundar os seus estudos.

Propriedades:

1) Se $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ e $f(x) \neq 0$ então $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

2) Se $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0$

3) Se $\lim\limits_{x \to x_o} | f(x) | = b \neq 0$ e $\lim\limits_{x \to x_o} | g(x) | = +\infty$ então

$$\lim_{x \to x_o} | f(x) \, . \, g(x) | = +\infty$$

D.1.4 - Cálculo de alguns limites fundamentais

I - <u>Função Polinomial</u>

a) $\lim\limits_{x \to c} P(x) = \lim\limits_{x \to c} (a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) =$

$= a_o c^n + a_1 c^{n-1} + \ldots + a_n$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} (-2x^2 + 3x - 5) = -2.1^2 + 3.1 - 5 = -4$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \begin{cases} +\infty & \text{se n é par} \\ -\infty & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_o x^n$

com $a_o \neq 0$

Exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 1) = \lim_{x \to +\infty} 3x^6 = +\infty$$

II - Função Racional

a) Para o cálculo do limite da função racional

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ para $x \to c$, consideraremos três casos:

1º caso: c não é raiz de $Q(x)$ isto é $Q(c) \neq 0$

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \frac{P(c)}{Q(c)}, \text{ com } Q(c) \neq 0$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{2x-1}{x^2-5}\right] = \frac{P(3)}{Q(3)} = \frac{2 \times 3 - 1}{3^2 - 5} = \frac{5}{4}$$

2º caso: c não é raiz de $P(x)$ e é raiz do $Q(x)$ isto é
$P(c) \neq 0$ e $Q(c) = 0$.

$$\lim_{x \to c} \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| = \lim_{x \to c} \left| \frac{P(x)}{P(x)} \right| \cdot \left| \frac{1}{Q(x)} \right| = +\infty$$

com $P(c) \neq 0$

$Q(c) = 0$

recai na propriedade 3 de D.1.3

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{x^2+4x-5}$$ (1 anula o denominador e não anula o numerador)

então $$\lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{x^2+4x-5} = +\infty$$

$P(x) = 3x+2 \Longrightarrow P(1) = 5$

$Q(x) = x^2 + 4x - 5 \Longrightarrow Q(1) = 0$

3º caso: $\underline{c}$ é raiz de $P(x)$ e de $Q(x)$ isto é $P(c) = 0$ e $Q(c) = 0$;

simplificamos $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dividindo sucessivamente

por $(x-c)$ até que um dos polinômios não seja mais divisível por $(x-c)$, recaindo em um dos casos anteriores.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 3} \left[\frac{(x-3)\ (x+3)}{(x-3)\ (x-2)}\right] = \lim_{x \to 3} \left[\frac{x+3}{x-2}\right] = 6$$

$P(x) = x^2 - 9 \Longrightarrow P(3) = 0$

$Q(x) = x^2-5x+6 \Longrightarrow Q(3) = 0$

b) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_o x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_o x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_o x^m}{b_o x^n}$$

logo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } m > n \\ \dfrac{a_o}{b_o} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

Exemplos:

1) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4-5x+2}{3x^3+3x^2-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4}{3x^3} = +\infty$$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2}{2x^3} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2-7x+1}{3x^2+5x-2} = \dfrac{4}{3}$

III - Função exponencial

a) $\lim\limits_{x \to c} a^x = a^c$

b) se $a > 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \end{cases}$

se $0 < a < 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$

IV - Função logarítmica

a) $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$

e

$\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ se $a > 1$

e

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ se $0 < a < 1$

V - Limites das funções trigonométricas

$\lim\limits_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$ $\quad \lim\limits_{x \to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c$ se $c \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$ e $K \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to c} \cos x = \cos c$ $\quad \lim\limits_{x \to c} |\operatorname{tg} x| = \infty$ se $c = \frac{\pi}{2} + K\pi$ e $K \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

VI - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$e = 2,71\,82\ \ldots$ (número irracional)

algarismo Neperiano (número e)

5.3 - Ficha III

Continuidade

A - Conceito de continuidade

A.1 - Preliminares

A.1.1 - Consideremos dois tipos de computadores

1) Computadores digitais - sistemas digitais que representam informações por símbolos, de maneira descontinua.

2) Computadores analógicos representam números por variáveis tais como voltagens, correntes ou decibéis que variam continuamente.

Responda:

a) Os pianos e as máquinas de escrever são sistemas digitais ou analógicos? São contínuos ou descontínuos?

b) Os violinos e as réguas de cálculo são sistemas digitais ou analógicos? São contínuos ou descontínuos?

A.1.2 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x-1$$

a) Faça o gráfico dessa função f

b) Calcule:

1º $f(3) =$

2º $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

c) o $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existe e é igual ao valor de $f(x)$ para $x = 3$?

Sim ( )

Não ( )

A.1.3 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{para } x \neq 3 \\ 7, & \text{para } x = 3 \end{cases}$$

a) Faça o gráfico dessa função

b) Calcule:

1º $f(3) =$

2º $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

c) O $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existe e é igual ao valor da $f(x)$ para $x = 3$?

Sim ou não?

A.2 - Definição

A.2.1 - Uma função $f(x)$ é contínua num ponto a do seu domínio, se existir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e for igual ao valor de $f(x)$ para $x = a$.

(a ponto de acumulação do domínio da f).

Em outras palavras:

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ diz-se contínua, no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que se torne x suficientemente próximo de a

Só faz sentido indagar se f é contínua no ponto a, quando a pertence ao domínio da f. O mesmo não acontece em relação a existência do limite, pois quando calculamos o limite num ponto a, o ponto a é de acumulação do domínio da função e pode ou não pertencer a esse domínio (exercício A.1.2).

A.2.2 - Diremos simplesmente, que $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ é contínua quando f for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 1$

B - Propriedades

B.1. Preliminares

B.1.1 - Sejam $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ e $g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2^x \end{cases}$

duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Pergunta-se:

$h: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2^x \end{cases}$ é contínua?

B.1.2 - Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$

uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Pergunta-se:

$h: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + a \end{cases}$ é contínua?

B.2 - Propriedades:

B.2.1 - Se as funções $f, g: X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então:

I) a função soma $f(x) + g(x)$

II) a função diferença: $f(x) - g(x)$

III) a função produto: $f(x) \cdot g(x)$

IV) a função $a.f(x)$ produto da função $f(x)$ por $a \in \mathbb{R}$ (a escalar)

V) a função quociente: $\frac{f(x)}{g(x)}$ com $g(a) \neq 0$ são funções contínuas em a.

Estas propriedades resultam das propriedades operatórias dos limites.

Exemplo:

se $f(x)$ é contínua no ponto a então $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (1)$$

se $g(x)$ é contínua no ponto a então $\exists \lim_{x \to a} g(x)$ e

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \qquad (2)$$

De (1) e (2) temos:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a)+g(a)$$

B.2.2 - Sejam: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f(x)$ é contínua no ponto a e $g(x)$ é contínua no ponto $b = f(a)$ então a função composta $g\left[f(x)\right]$ é contínua em a.

Exemplo:

Sejam: $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+2 \end{cases}$ $\quad g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

funções contínuas, calculemos

$$h = g\left[f(x)\right] = g(3x+2) = (3x+2)^2$$

$h = 9x^2+12x+4$ que é uma função contínua $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE O APARECIMENTO DOS NÚMEROS E DOS DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

(REFLEXÕES SOBRE O ENFOQUE DIDÁTICO)

MOEMA SÁ CARVALHO

> Uma boa maneira de se desfrutar satisfatoriamente dos conhecimentos científicos da atualidade é utilizá-los na abertura que proporcionam ao se investigarem os passos mais significativos que conduziram à sua própria conquista. Os conhecimentos históricos assim adquiridos refletem uma boa luz na melhor compreensão das teorias e técnicas atuais.

O uso e a construção da Matemática começaram juntos, na elaboração de modelos capazes de interpretar situações, a fim de facilitar uma inter-atuação do homem com a situação defrontada.

Um passo importante na construção de toda uma teoria matemática pode ter-se dado no momento em que o homem primitivo construiu um modelo singelo para representar uma situação simples do seu dia a dia.

O exemplo do pastor a controlar o seu rebanho atra vés das pedrinhas que colocava em uma sacola, cada pedrinha correspondendo a uma ovelha, é esclarecedor como utilização de um modelo.

Esse modelo singelo, concreto, tangível,é um exemplo bem simples da utilização de uma correspodência bijetiva, no embrião do processo de contagem.

Modelos palpáveis, concretos, cederam lugar a outros, abstratos, não tão simples, em decorrência de situações novas, com maior grau de complexidade. À medida em que as situações se tornem mais complexas os modelos se enriquecem, ou se sofisticam, chegando comumente a ultrapassar as necessidades práticas motivadoras de sua construção; o que não significa um desperdício, já que o modelo assim construido pode levar a estudos mais aprofundados da situação de origem, ou a projeções da mesma.

Esse mecanismo se repete na História da Matemática.

Assim nasceu e cresceu o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais, dando, posteriormente, origem ao conjunto dos inteiros, dos racionais, dos reais e dos complexos, para citar um exemplo.

A construção de $\mathbb{N}$ foi lenta e se arrastou por milênios, a despeito da frase de Kronecker de que "O conjunto dos números naturais nos foi dado por Deus, tudo o mais foi feito pelo homem", provavelmente, para expressar a maneira espontânea e natural da construção de $\mathbb{N}$.

> "A ideia do número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência: os homens adquirirem os números para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram se formando lentamente pela prática da contagem. A imagem do homem, criando de uma maneira completa a idéia de número, para depois aplicá-la à prática da contagem, é cômoda mas falsa". - (*)

Na construção gradativa de $\mathbb{N}$ encontramos subjacente o conceito de correspondência 1 a 1 entre conjuntos ou o conceito de ordem, em sucessões cronológicas de eventos.

Nos sistemas de numeração que se foram formando apareceram por vezes dificuldades nem sempre contornadas ou solucionadas com eficiência imediata. O sistema de numeração que usamos hoje, com notação posicional em base dez, é o resultado de um longo evoluir de notações e bases de numeração diferentes.

Os sistemas numéricos, como os idiomas, as artes, as técnicas e os usos, em geral, mostram os efeitos das interações de várias culturas.

(*) Bento de Jesus Caraça - Conceitos Fundamentais da Matemática

Achados arqueológicos permitiram que se concluisse que povos pré-históricos, antes mesmo de possuirem uma linguagem escrita, contavam e grafavam o resultado de suas contagens ou o próprio ato da contagem.

Um osso de animal pré-histórico, avalia-se que com cerca de 30.000 anos, encontrado na Tchecoslováquia, segundo Karl Assolon, em 1937, faz-nos pensar na existência da prática da contagem nessa época. Os 55 traços aí encontrados, dispostos em grupos de 5, induzem-nos a pensar que alguma coisa deveria estar sendo contada, representando cada risco uma unidade. Mantida essa hipótese, estariam utilizando a base cinco, como parecem indicar os traços no osso?

Os egípcios, 3.000 anos a.C., escreviam números bem grandes. Usavam base dez, como fazemos hoje, mas não adotavam notação posicional.

A base dez não aparece como uma constante na evolução dos sistemas de numeração; outras bases também foram usadas; o mesmo acontece com a notação posicional.

Os babilônios, por exemplo, contavam num misto de base sessenta e base dez. Usavam uma notação posicional em que faltava precisão: como não tinham inventado um símbolo que representasse o papel que zero desempenha em nossa notação, sua representação posicional era ambígua. Num período posterior, passaram a usar um símbolo para zero, porém, restringindo o seu uso para colocação entre dois dígitos; nunca no final de um número.

Outras civilizações posteriores, como a dos Maias, no México pré-colombiano, fornecem exemplos do uso de base de numeração diferente de dez; os maias usavam base vinte, notação posicional e faziam uso de zero.

Estudos antropológicos, datados de 1889, revelam a existência de tribo primitiva, não possuidora de linguagem escrita àquela época e que contava em base dois.

Examinando a notação que usamos comumente, que é posicional, base dez, e a notação posicional em outra base, podemos não somente evidenciar com maior clareza os princípios básicos em que se apoia uma notação posicional base a, com a > 1, a $\in \mathbb{N}$, como testar o seu uso nas diferentes civilizações.

Tomemos, por exemplo, escrito na base dez, como habitualmente o fazemos, o números 30.529. Interpretemos o que está escrito, evidenciando as potências de 10 que aparecem na composição desse número:

$30.529=30.000+500+20+9 = 3\times10^4+0\times10^3+5\times10^2+2\times10^1+9\times10^0$

Tomemos agora o número 9, que, interpretado como escrito em base dez, é 9×10^0 e que pode também ser escrito como resultante de adição de convenientes potências de dois: $9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0$.

Convenciona-se representar essa adição pelo símbolo $(1001)_2$ e diz-se que esse símbolo representa o número em questão na base dois, em notação posicional.

Destacaremos os princípios gerais:

1. Qualquer número natural, maior que um, pode servir como base de sistema de numeração:
2. É necessário dispor-se de uma coleção de símbolos (dígitos ou algarismos) para representar os números menores que a base, incluindo o zero.
3. Usa-se o princípio multiplicativo posicional; i. é, se a base é a, o algarismo b, colocado na n-ésima posição, da direita para a esquerda, deverá representar o produto de b pelo número a elevado à potência n-1.
4. Usa-se o princípio aditivo; i.é, o número é a soma dos produtos indicados na sua representação.
5. Usa-se a extensão desse princípio para potência da base com expoente negativo, marcando com um sinal (vírgula, por exemplo) a separação da parte inteira da parte menor que um.

Convenciona-se, em geral, indicar a base que está sendo usada, colocando-a abaixo do parêntese que deve encerrar a representação do número. A ausência dessa indicação explícita, deve ser interpretada como sendo dez a base de numeração que está sendo usada.

Exemplos:

$(123)_a = a^2 + 2 \times a + 3 \times a^0$; $(2034)_5 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 \times 5^0$

$(1,23)_7 = 1 \times 7^0 + 2 \times 7^{-1} + 3 \times 7^{-2} = 1 + \frac{2}{7} + \frac{3}{7^2}$

$5,23 = 5 + 2/10 + 3/10^2$

A extensão dos princípios, mencionada em 5, só foi realizada por volta de 1600 d.C. na Europa Ocidental, como veremos adiante.

Antes de atingi-la vários outros povos deram suas contribuições diferentes à representação dos números naturais e dos racionais.

Os gregos (cerca de 600 a 300 a.C.) usavam o princípio aditivo e o multiplicativo na representação dos naturais.

Os romanos usavam um sistema de numeração de base dez cujos algarismos são amplamente conhecidos em nossa época, já que, mantendo a tradição, continuamos a usá-los em ocasiões ou designações especiais. Utilizavam princípios repetitivo, aditivo, multiplicativo, não posicional.

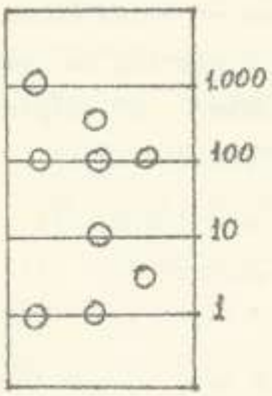
Por exemplo: III era 3, VI era 6, $\bar{X}$ era 1.000, etc . Mais tarde passaram a usar o princípio subtrativo (IIII evoluiu para IV).

Os romanos não possuiam símbolo para zero, o que lhes dificultava o cálculo. Usavam frações de denominador doze. A moeda romana "as" era subdividida em doze "onças" . Não faziam uso dos princípios 3 e 5 citados da nossa atual notação posicional.

Como seu sistema de numeração não lhes facilitava os cálculos, recorriam a instrumentos auxiliares,os "abacus".

O ábaco era um quadro ou taboleiro, com ranhuras, nas quais colocavam contas ou pedrinhas ("calculi"), que lhes facilitavam efetuar as operações. Era o seu modelo mate mático tangível.

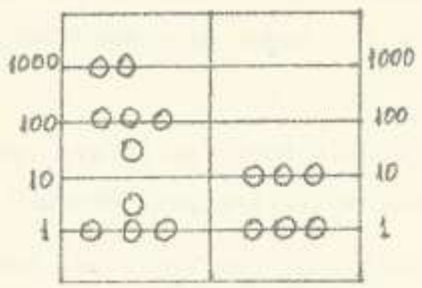
No manejo dos ábacos os romanos usavam um misto de base cinco e base dez. Colocavam as pedrinhas nas ranhuras, nunca mais do que quatro em cada ranhura. O número cinco era representado por um pedrinha entre duas ranhuras: a ranhura das unidades e a ranhura das dezenas. O número cinquenta por uma pedrinha entre a ranhura das dezenas e a das centenas, e assim por diante. No quadro que segue está representado o número 1.817.

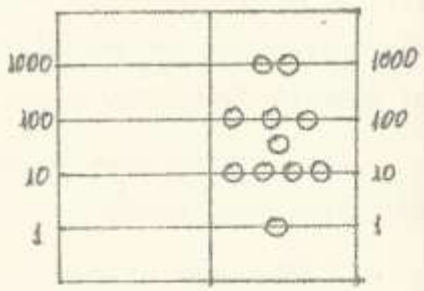


Como faziam as adições:

Colocavam as pedrinhas correspondentes às duas parcelas, cada parcela de um dos lados de uma linha divisória longitudinal do ábaco. Em seguida passavam as pedrinhas, da esquerda para a direita, respeitando os princípios de base cinco e base dez.

Por exemplo. A soma de 2.358 com 33 era obtida segundo os passos indicados nas duas figuras seguintes:





Esse modo de armar a conta, observe-se, corresponde de uma notação posicional, em que o espaço vago entre as ranhuras, quando se faz necessário, desempenha o papel do zero no nosso sistema de numeração.

O uso didático do ábaco está voltando à moda para o ensino das quatro operações, designado por "aritmética tangível" ou "palpável".

O sistema de numeração usado hoje por quase todos os povos do ocidente, o hindu-arábico, vem-nos da India, através dos povos árabes em sua época de conquistas. Os números hindus mais antigos datam do Século 3º a.C. Seu sistema de numeração se assemelhava ao dos gregos. Não usavam notação posicional, não possuiam símbolo para zero. Mais tarde, cerca de 500 d.C. (ou 700) é que foi desenvolvido um sistema posicional, incluindo o zero.

Os algarismos arábicos começaram a ser usados na Europa Ocidental a partir do Século X d.C.

As pedrinhas dos ábacos romanos foram gradativamente sendo substituidas por discos onde eram gravados os números, nos símbolos hindu-arábicos. Essa substituição encontrou resistências. Era mais fácil calcular com o auxílio de pedrinhas que se deslocavam, do que abstratamente, através de símbolos.

Vencida a resistência, por volta do ano 1.000, a Itália foi a pioneira em adotar de maneira mais sistemática os novos símbolos, por necessidade do seu comércio, já que era, na ocasião, um centro importante de trocas.

Leonardo de Pisa, difundiu em livro esse novo processo, que penetrou na Alemanha em 1200, na França e Inglaterra em 1300.

Embora os europeus nessa época usassem sistema de numeração com base dez, para os naturais, as frações eram escritas em base sessenta:

$$1/60, \ 1/60^2 \text{ etc.}$$

Só em 1.600 é que apareceu a idéia de se escreverem as frações em base decimal. O belga Stevins, (1548-1620), foi o primeiro a esclarecer sobre as vantagens do uso de uma numeração decimal completa, que se estendesse à representação das frações.

É interessante observar as etapas percorridas por ele. Não utilizava vírgula nem ponto, mas indicava de alguma maneira a ordem de grandeza, como veremos a seguir. O número que hoje escrevemos como 89,233, por exemplo, foi sucessivamente sendo escrito como:

$$89^{⓪}\,{}_{2}{}^{①}\,{}_{3}{}^{②}\,{}_{3}{}^{③}$$

$$89_{⓪}\,{}^{2}\,①\,{}^{3}\,②\,{}^{3}\,③$$

$$89 \quad 233 \quad ③$$

$$89^{⓪}\,233$$

$$89_{⓪}\,233$$

Atribuiu-se a Leibniz (1646-1716) e a Harriot (1560-1621) a generalização sistemática do tratamento posicional.

Leibniz mostrava-se especialmente interessado na base dois para os sistemas de numeração. Interpretava os dois únicos símbolos, 0 e 1, dessa base, como sendo uma representação do nada (0) e de Deus (1), dos quais tudo se criava. Abraçava uma teoria segundo a qual os seres eram constituídos por "Mônadas", regidas por uma harmonia pré-estabelecida, o que o aproximava da escola pitagórica, para quem o número era a essência de todas as coisas. A esse filósofo e matemático também se deve, assim como,a Newton, as bases do cálculo diferencial.

Aplicações práticas do cálculo infinitesimal se desenvolveram através dos Séculos XVII e XVIII, nas avaliações de áreas, volumes, comprimento de curvas, centros de gravidade, velocidade, aceleração, etc. Nessa época foram desenvolvidos processos mecânicos de auxílio nos cálculos.

Apesar do desenvolvimento e uso difundido do cálculo diferencial, suas bases teóricas permaneceram incompletas. A falta de rigor lógico permitia que se cometessem erros de interpretação e tornava o procecimento matemático da época vulnerável a uma série de críticas, feitas por filósofos e matemáticos mais exigentes.

Cauchy (1789-1857), Riemann (1826-1866), Weierstrass (1815-1897) e outros matemáticos do início do Século XIX procuraram estabelecer uma base teórica, para os estudos

dos limites e do cálculo, em que o rigor se fizesse notar.

Caracterizou-se a continuidade dos reais através de sucessão de intervalos encaixantes, ou do conceito de seqüências fundamentais, com Cauchy. Cantor e Dedekind (1831-1916), esclareceram o conceito de continuidade, através da idéia do "corte de Dedekind".

Essas foram caracterizações matemáticas precisas para o conceito de continuidade, até então baseado apenas nas idéias intuitivas.

Estabeleceu-se nessa época o que ficou conhecido como uma aritmetização da análise; construiram-se axiomatização para $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

É digno de nota observar-se que o conjunto dos números naturais, o primeiro a aparecer empiricamente, somente no Século passado tenha vindo a ser reconstituído em bases lógicas, por uma axiomatização. Intuitivo e simples, foi, talves por isso mesmo, de axiomatização delicada. Convém, no entanto, não esquecer que foi, partindo de $\mathbb{N}$, que se construiram e conseguiram as posteriores abstrações e generalizações. Das operações introduzidas em $\mathbb{N}$, de suas características básicas, tirou-se o esqueleto de sustentação de estruturas algébricas, das mais simples às mais sofisticadas.

Após os milênios do seu uso empírico, um tratamento axiomático para $\mathbb{N}$ se deve a Peano (1858-1932), matemático italiano. Em seus axiomas Peano admite a existência de um conjunto de elementos não definidos, ditos "números natu mais", a existência de um elemento "zero", o conceito não definido de "sucessor" e os relaciona em uma lista de cinco axiomas, dos quais se podem deduzir todas as propriedades de ℕ.

Outro tratamento teórico de ℕ foi feito por Cantor , matemático alemão (1845-1918), através da teoria dos conjuntos. Estabelece o conceito de "cardinal", de cujo relacionamento com o de "número natural" se podem deduzir as propriedades de ℕ.

Talvez se possa afirmar que as duas maneiras teóricas de construção de ℕ correspondam, respectivamente, aos procedimentos históricos:

- da criação dos números naturais através de comparação de quantidades (cardinalidade)
- da criação dos naturais traduzindo uma sucessão cronológica de eventos (ordinalidade).

As construções axiomáticas dos inteiros e dos racionais, podem ser feitas a partir de ℕ (por simetrização ou por classes de equivalência), e a dos reais, por classes de equivalência de sucessões fundamentais definidas em ℚ , ou pelos axiomas de continuidade.

Refletindo sobre o exposto, sentimos como é importante a construção empírica de ℕ seguida da de ℚ no curso primário. Devem eles constituir base intuitiva, firme, o alicerce de toda uma teoria, além de ser um instrumento prático indispensável do dia a dia. Uma teoria inoportuna, precipitada, antecedendo com regras e propriedades formais, a intimidade que deve se estabelecer entre as crian ças e os números, só pode ser prejudicial à formação dessa base intuitiva que se almeja obter como alicerce dos progressos futuros.

O manuseio, os agrupamentos, as separações, as distribuições, as comparações, são indispensáveis à formação dessa intimidade e à aquisição de conceitos de maneira abrangente e não apenas formal.

A criança deverá perceber que a Matemática foi construida para auxiliar e não para atrapalhar, como tantas vezes pode parecer, em aulas herméticas e totalmente desligadas da capacidade ou interesse do aluno.

"A GEOMETRIA DA TEORIA DE RELATIVIDADE DE EINSTEIN"

Reflexões do Prof. Christovam Colombo dos Santos em homenagem aos formandos de julho de 1979, da Escola de Minas e Metalurgia da U.F.O.P.

Em 1906, um ano depois da publicação da Teoria da Relatividade, Hermann Minkonwski, professor de Einstein na Universidade de Berna, tinha introduzido o formalismo tetradirecional, adaptado à representação dos princípios da Relatividade de Einstein.

Conforme o pensamento de Minkonwski, "o tempo e o espaço em si mesmos, desvanecem-se como puras sombras".

Maurício Schlick, no seu livro "O espaço e o tempo na Física contemporânea, completa o pensamento minkonwskiano, dizendo: "Só a combinação do espaço e do tempo constitui a realidade. Cada um desses termos, por si mesmo, é uma abstração".

A princípio, Einstein pareceu reticente em relação ao formalismo de seu mestre. Reconheceu, porém, logo a sua utilidade, dando-lhe cabal adesão. Vamos aqui expor claramente o que se chamou "O espaço-tempo ou, simplesmente , "Universo" de Minkonwski.

O UNIVERSO DE MINKONWSKI

Consideramos um espaço de quatro dimensões, x,y,z,u, em que a quarta dimensão é imaginária: $u = ict$, c, sendo a velocidade da luz e i, a unidade complexa.

A escolha de notações imaginárias, a princípio, deu lugar a muitas conclusões. Nos começos da Relatividade , intérpretes e comentadores mal informados concluiram que isto enfraqueceria a realidade das noções de tempo ou de espaço-tempo.

Devemos, porém, aqui sublinhar que a realidade de uma grandeza se traduz por fenômenos que ela permite interpretar e não depende de modo nenhum das notações que lhe convencionemos aplicar. Utilizar um sistema de notações diferentes, ainda que imaginárias não pode alterar a realidade de um conceito, e eventualmente, pode mesmo permitir que certas propriedades alcancem nova maneira mais cômoda e intuitiva de serem descritas, assim como observa Tonelat, no seu livro "História da Relatividade". As notações imaginárias no espaço-tempo tetradimensional evocam as imagens intuitivas e generalizam o formalismo simples das relações no espaço usual.

Era preciso indicar aqui o papel representado pelas notações imaginárias e acentuar as simplificações tanto formais quanto intuitivas que elas permitem obter.

Quero citar como exemplo a notação que traduz a rotação de um vetor da Geometria plana, quando sofre o giro de um ângulo y, variando este de zero a 2π.

$$\vec{b} = e^{iy}\vec{a} = (\cos y + i \operatorname{sen} y)\,\vec{a}$$

Esta, a expressão simbólica de um vetor que sofre a rotação y. Ela contém formalmente a mais bela fórmula da Matemática.

Para $y=\pi$, resulta $e^{i\pi} + 1 = 0$

Esta fórmula institui a aliança inesperada entre os números de alta hierarquia _e_ e π e as unidades real e imaginária, juntos com o indispensável número zero (*)

O operador e^{iy} , como se sabe, gera uma dilatação modular seguida de uma rotação dada pelo ângulo y.

UM NOVO INVARIANTE

Em Geometria, a cada grupo de transformações, corresponde um invariante. Para as transformações ditas movimentos rígidos, o invariante é a distância espacial de dois pontos. Para as homotetias, o ângulo é o invariante. Para as transformações afins, o invariante é o paralelismo, ou mais sofisticadamente, a reta do infinito ou reta imprópria.

A colinearidade, isto é, a permanência da linearidade é o invariante da projetividade, afinal, na Topologia são invariantes a ordem e a continuidade. A passagem das transformações de Galileo para as de Lorentz, estas, mais ge-

---

(*) - Liouville em 1844 demonstrou a existência de números transcendentes. Hermite, em 1873 demonstrou a a transcendência do número e. Lindemann provou , em 1882 a transcendência de π .

rais e mais precisas, foi o ponto de partida da Teoria da Relatividade.

A Cinemática clássica é a caractrizada pelo grupo galileano. Suponhamos que os dois sistemas Galileanos R e R', estão em movimento, um em relação ao outro, com a velocidade v.

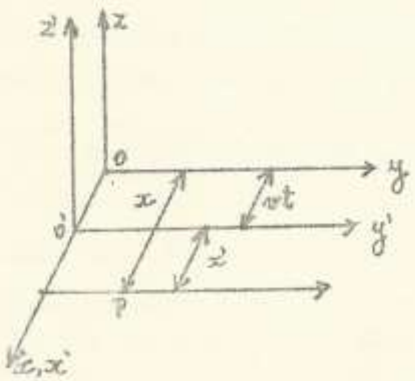
Suponhamos para maior simplicidade, que o eixo O'X' desliza sobre OX, paralelamente à velocidade v, permanecendo os eixos O'Y' e O'Z', respectivamente, paralelas a OY e OZ, durante todo o curso de translação.

Se (x,y,z,t) são as coordenadas espaciais e o tempo de um acontecimento em relação a R, e (x',y',z', t') são as coordenadas e o tempo do mesmo acontecimento, em relação a R', subsistem as relações:

1) $x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$

$x = x' + vt,\ y = y',\ z = z',\ t = t'$

FIGURA 1



(1) São as equações da Cinemática clássica. Adotando a mesma origem para medir os tempos e supondo que as origens do espaço coincidem na origem dos tempos, ter-se-á:

$$x = 0, \text{ para } t = 0; \; x' = 0, \text{ para } t' = 0$$

Combinando a transformação (1) com uma transformação espacial que conserve o tempo, por exemplo: uma rotação , obtemos a transformação mais geral, que permite em Mecânica clássica, passar das coordenadas e tempo de um acontecimento, em uma referência inercial R, às coordenadas e tempo do mesmo acontecimento, estudado em outra referência R'.

O conjunto de todas as transformações contidas em (1) forma um grupo. Quer dizer: Dados três sistemas R_1, R_2, R_3, para passar de R_1 a R_3 posso passar, primeiramente, de R_1 para R_2 por uma transformação do tipo (1) em seguida passar de R_2 para R_3 por uma transformação do mesmo tipo; ou passar, diretamente, de R_1 para R_3, por uma única transformação do mesmo tipo. Além disso, existe uma transformação inversa que permite passar de R_3 a R_1, de R_3 a R_2 e de R_2 a R_1.

Essas propriedades definem a estrutura de grupo. Assim definido, chama-se o grupo (1), "grupo galileano clássico".

No grupo galileano, o tempo é absoluto. Se num instante $t = t_0$ consideramos dois pontos (dois acontecimentos) A_1 (x_1) e A_2 (x_2), nesse instante t_0, temos:

(1) São as equações da Cinemática clássica. Adotando a mesma origem para medir os tempos e supondo que as origens do espaço coincidem na origem dos tempos, ter-se-á:

$$x = 0, \text{ para } t = 0; \; x' = 0, \text{ para } t' = 0$$

Combinando a transformação (1) com uma transformação espacial que conserve o tempo, por exemplo: uma rotação, obtemos a transformação mais geral, que permite em Mecânica clássica, passar das coordenadas e tempo de um acontecimento, em uma referência inercial R, às coordenadas e tempo do mesmo acontecimento, estudado em outra referência R'.

O conjunto de todas as transformações contidas em (1) forma um grupo. Quer dizer: Dados três sistemas R_1, R_2, R_3, para passar de R_1 a R_3 posso passar, primeiramente, de R_1 para R_2 por uma transformação do tipo (1) em seguida passar de R_2 para R_3 por uma transformação do mesmo tipo; ou passar, diretamente, de R_1 para R_3, por uma única transformação do mesmo tipo. Além disso, existe uma transformação inversa que permite passar de R_3 a R_1, de R_3 a R_2 e de R_2 a R_1.

Essas propriedades definem a estrutura de grupo. Assim definido, chama-se o grupo (1), "grupo galileano clássico".

No grupo galileano, o tempo é absoluto. Se num instante $t = t_0$ consideramos dois pontos (dois acontecimentos) $R_1(x_1)$ e $R_2(x_2)$, nesse instante t_0, temos:

$x'_2 = x_2 - vt_0$, $x'_1 = x_1 - vt_0$, donde $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$

Então, a distância entre dois pontos e o respectivo intervalo de tempo não mudam.

Como se vê, o invariante do grupo de Galileo é o mesmo da Geometria euclidiana; a distância entre dois pontos.

Vamos deduzir o invariante de um novo grupo, proposto por Lorentz, a que Poincaré deu o título de "Grupo de Lorentz", em honra do insigne inventor e colaborador da Relatividade Restrita.

EQUAÇÕES DE LORENTZ

A transformação de Lorentz equivale a uma rotação ortogonal dos eixos OX ou OU, no plano OXU, permanecendo imóveis os eixos OY e OZ. No curso desta rotação ortogonal imaginária, se m_1 $(x_1 u_1)$ e $m_2 (x_1 + dx_1 + du_1)$ designam dois pontos do plano OXU, a quantidade:

$\overline{m_1 m_2}\ 2 = dx_1^2 + du_1^2$, permanece invariante:

$$dx^2 + du^2 = (dx')^2 + (du')^2$$

Consideremos no espaço tetradimensional os pontos: M_1 (x,y,z,u) e M_2 $(x + dx, y + dy, z + dz, u + du)$.

A quantidade $\overline{M_1 M_2}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 =$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

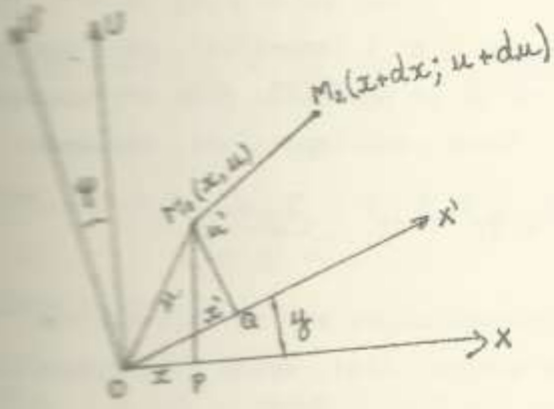
permanece invariante, em virtude de uma propriedade geral do grupo das rotações ortogonais.

Temos: $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2+du^2 = dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$.

Tal quantidade é nula quando:

$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2dt^2$.

FIGURA 2



Neste caso particular, os dois acontecimentos, representados pelos pontos M_1 e M_2 correspondem à propagação de uma onda eletromagnética de velocidade igual a c no tempo dt.

(Os dois pontos são ligados por um raio luminoso que parte de M_1 e vai a M_2, no tempo dt, com velocidade c).

A distância $\overline{M_1M_2}$, dos dois acontecimentos coincide com a distância de propagação cdt, da onda luminosa de velocidade c, no tempo dt.

Se, ao contrário, os dois acontecimentos são ligados

por um sinal, ou por um ponto material, de velocidade n
cessariamente menor do que c, ($w < x$) então:

$$(2)\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 < 0$$

Com efeito, se o sinal ou o ponto tem uma velocidade $w < c$
então:

$$w^2dt^2 < c^2dt^2; \qquad (w^2 - c^2)\ dt^2 < 0$$

O terceiro caso, $w > c$ é impossível, pois que a velocid
de de um sinal ou de um ponto não pode ultrapassar a vel
cidade da luz. Nesse caso impossível, teríamos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 > 0$$

Os dois acontecimentos seriam tais que não poderia
ser ligados por nenhum sinal, mesmo eletromagnético.

Considera-se, em geral a quantidade:

$$d\sigma^2 = - ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Os relativistas dão os nomes do é do gênero tempo, se
$d\sigma < 0$; $d\sigma$ é do genêro espaço, se positivo.

O modelo tetradimensional da Relatividade Restrita cha
ma-se "Espaço tempo" ou "Universo" de Minkonwski.

Se OPM e OQM_1 são os respectivos contornos das coor
denadas nos sistemas OXU e OX'U', (Figura 2), onde
$OP = X$, $OQ = u$, $DQ = X'$, $QM_1 = u'$, como ambos tem a mesma
resultante OM_1, as projeções ortogonais sobre qualquer ei