BOLETIM

8 dezembro/79

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

Publicado sob os auspícios
da
Universidade Santa Úrsula

Í N D I C E

APRESENTAÇÃO

Inciamos esse número com um relato suscinto sobre o Projeto "Binômio Professor-Aluno na Iniciação à Educação Matemática" do GEPEM - INEP, feito pela Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes na Reunião Regional da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em Rio Claro, SP., em 04 de outubro de 1979. Assim os colegas tomam conhecimento do trabalho de pesquisa em Educação Matemática que se iniciou no GEPEM, com o patrocínio do MEC/INEP.

Publicamos também:

- Um dos módulos instrucionais, especialmente elaborados para a disciplina de Nivelamento em Matemática do Curso de Técnicos de Transportes Marítimos (TETRAMA) da Petrobrás, de autoria da Profª Estela Kaufman Fainguelernt.
- Artigo sobre a formação dos diferentes sistemas de numeração da Profª Moema Sá Carvalho.
- "A Geometria da Teoria de Relatividade de Einstein", artigo do Prof. Christovam Colombo

dos Santos, da Universidade Federal de Minas Gerais, homenageando os formandos de julho de 1979 da Escola de Minas e Metalurgia de Ouro Preto , num exemplo de como manter e transmitir acesa a chama do interesse pela cultura, que a aposentadoria, felizmente, não logrou apagar.

- Resumo da palestra do Prof. Georges Glaeser, do IREM de Estrasburgo - França, sobre Evolução da Didática de Matemática, pronunciada na sede do GEPEM, para associados e convidados.

Na Seção Resenha, são apreciados os livros:

"Matemática Aplicada",
de Trotta, Imenes e Jakubovic

e "Experiências Pedagógicas Baseadas na Teoria de Piaget",
de Luiz Alberto Santos Brasil.

Os comentários sobre esse último são de autoria da estudante Sandra Maria Alves dos Santos, do Curso de Matemática da Universidade Santa Úrsula, que os apresentou como trabalho da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar III , sob a orientação da Profª Moema Sá Carvalho.

Na Seção Notícias, transcrevemos as palavras dos Professores José Carlos de Mello e Souza e Franca Cohen Gottlieb , dirigidas aos licenciados em Matemática da Universidade Santa Úrsula, por ocasião de sua colação de grau, em dezembro de 1979, como seu paraninfo e seu patrono, respectivamente.

Encerramos com a publicação do Relatório da Secretaria do GEPEM relativo ao ano de 1979.

PARTICIPAÇÃO DA UNIVERSIDADE NO ENSINO DO 1º E 2º GRAUS: UM PROJETO GEPEM - I N E P - APRESENTADO NA REUNIÃO DA REGIONAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - RIO CLARO - SP., EM 04.10.79.

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

O desenvolvimento que, a partir do Século XIX, se registra na Matemática e em suas aplicações a uma tecnologia em grande expansão acarretou uma substancial alteração no modo pelo qual esta ciência é compreendida. Este novo enfoque, passado quase um século, refletiu-se na sala de aula. Fez-se necessário que a criança, dentro de suas características etárias, fosse aprendendo, pouco a pouco, a linguagem em que falam os matemáticos para eliminar mais tarde as dificuldades de comunicação. Ao mesmo tempo, pretendeu-se enfatizar a idéia estruturalista da Matemática. Com tal finalidade novos métodos começaram a ser experimentados e novas abordagens propostas.

Não queremos entrar em discussões estéreis a respeito da falsa dicotomia entre Matemática Tradicional e Matemática Moderna que consideramos ultrapassada . Procuraremos mostrar que existe algo mais sério e mais construtivo; um novo ramo de pesquisa que os europeus (franceses e alemães segundo as informações que possuo) denominam "Didática da Matemática" e que nós denominamos "Educação Matemática".

A partir da década dos 20, os progressos no campo da psicologia genética e da psicopedagogia deram suporte às pesquisas em Educação Matemática ao provar, experimentalmente, que uma abordagem pedagógica só atingirá os objetivos propostos se atender ao desenvolvimento das estruturas congnitivas do aluno.

Devemos ainda atentar para os seguintes fatos:

. a democratização do ensino tornou o estudo da Matemática uma necessidade básica para um número cada vez maior de indivíduos de diferentes classes sociais e de todos os níveis intelectuais;

. o estudo da Matemática é importante na formação global do indivíduo e a deficiência dos seus conhecimentos básicos pode impedir o desabrochar de vocações científicas ou tecnológicas mesmo na área das ciências humanas e sobretudo nas das ciências naturais;

. o ensino da Matemática dirigido à grande massa não deve ser confundido com aquele que se destina a uma pequena porcentagem para quem a Matemática deverá ser um instrumento de trabalho ou a parcela ínfima dos futuros Matemáticos.

Em vista destas ponderações chega-se à evidência de que deve ser efetuado um esforço no sentido de impedir o bloqueio matemático que sempre existiu e continua a existir para a grande maioria dos indivíduos. Compartilhamos da opinião dos que afirmam que tal bloqueio tem origem nos primeiros anos da escolaridade, devido, principalmente, à transferência das dificuldades apresentadas pela maioria dos professores das primeiras séries. Simultaneamente medidas devem ser tomadas para que o ensino da Matemática esteja ligado à realidade do cotidiano e que se torne um instrumento útil a todas as disciplinas que nela se apoiam.

Seria ilusório pensar que se deve esperar que todos os professores tenham um bom embasamento, tanto ao que se refere a conteúdo matemático quanto à psicopedagogia, para introduzir uma metodologia adequada desde o início da escolaridade.

Não julgamos, contudo, que os inovadores tenham encontrado a chave do problema. No nosso entender o mecanismo que esses inovadores desenvolveram consistia em apresentar:

. normas psicopedagógicas
. reformulação de currículos
. preparação de material didático

para uso de professores que aceitavam passivamente o que lhes era imposto, por falta, justamente, de conhecimentos matemáticos e psicopedagógicos. Esquecia-se que as experiências dos inovadores eram feitas com pequenos grupos e em situações peculiares, quase sempre aplicadas por eles mesmos ou por equipes selecionadas sob suas supervisões.

Cumpriram eles, contudo, sua missão histórica; cabe a nós outros procurar os nossos próprios caminhos sem que, com isso, desprezemos as suas experiências. Uma das premissas para nos orientar será obrigatoriamente ter consciência de que:

<u>a inadequação dos métodos pedagógicos ao nível do desenvolvimento mental do aluno, à sua linguagem e à sua realidade conduz ao fracasso.</u>

Urge, além disso, promover, com continuidade, a preparação matemática do professor e, principalmente, dar-lhe informações acerca das novas tendências do ensino da Matemática. Poderíamos dizer que existem modismos em Ciência e só alguém com conhecimento mais profundo e habituado à pesquisa poderá orientar o professor do 1º e 2º graus. Chegamos, assim, a explicar o título da nossa palestra:

"A PARTICIPAÇÃO DA UNIVERSIDADE NO ENSINO DO 1º e 2º GRAUS: UM PROJETO GEPEM/INEP".

que foi sugerido pelo trecho do documento do MEC que se segue, elaborado este ano - <u>Política da Educação Superior</u> - e publicado no Jornal do Brasil:

"... a efetiva participação das universidades no ensino do primeiro e segundo graus, mediante o assessoramento aos órgãos da administração estadual do ensino e pela participação de universitários em programas sócio-educacionais..."

Já havia o GEPEM, em outubro de 1978, encaminhado ao INEP um projeto de pesquisa cujo conteúdo estava implícito no título:

"Pesquisa, diagnóstico e atendimento em Educação Matemática em Escolas do 2º Grau com Curso de Formação de Professores no Município do Rio de Janeiro".

Tal projeto foi aprovado pelo INEP, dando-lhe apoio técnico-financeiro. Está em pleno desenvolvimento agora com um título mais conciso:

> "Binômio professor-aluno na Iniciação à Educação Matemática".

sob a coordenação conjunta da Profª Anna Averbuch e minha.

Os enunciados dos objetivos e das hipóteses do projeto explicam a razão pela qual podemos falar na participação da Universidade no ensino do 1º e 2º graus.

Como sabem, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática - GEPEM - é uma associação civil sem vínculo oficial que congrega professores universitários do Rio de Janeiro, alguns com militância no 1º e 2º graus e também professores dos diferentes níveis de ensino. Por isso, trabalhamos com as escolas de 2º grau, da rede particular que preparam os professores do 1º segmento do 1º grau ou seja, professores primários.

Pelos dados fornecidos pelo Instituto de Informática da SEEC/RJ, Cadastro de Estabelecimentos Escolares,existem no Município do Rio de Janeiro 118 escolas do 2º grau,cujo profissionalizante é o magistério com mais de 11.000 alunos enquanto que só existem 6 oficiais.

Concluimos que a nossa amostragem extraída de tais estabelecimentos é bastante expressiva.

Transcrevemos os objetivos e a hipótese do projeto apresentado ao INEP.

OBJETIVOS

1. Avaliar a qualidade do ensino da Matemática nos Cursos de Formação de Professores da rede particular do Município do Rio de Janeiro, para detectar as necessidades de reformulação.

2. Determinar os principais fatores que influem no processo ensino-aprendizagem de Matemática das primeiras séries do primeiro grau, a fim de servirem como indicadores para a metodologia a ser sugerida e/ou alternativas de procedimento a serem propostas aos futuros professores dessas séries.

3. Identificar qualidade do ensino da Matemática como um dos principais fatores que influem no processo educacional.

4. Apresentar alternativas de procedimento para aplicação de metodologia adequada à realidade de cada escola, mediante os resultados obtidos nos ítens 1,2 e 3.

5. Elaborar metodologias que proporcionem melhor eficiência e eficácia da Educação Matemática no Município do Rio de Janeiro, com possível projeção para o Brasil, desde que adaptadas às diferenças regionais.

HIPÓTESE

Uma coordenação vertical de Matemática excercida por um professor universitário, com experiência pedagógica , atuando junto aos professores de Matemática, de Prática de

Ensino e de Didática da Matemática do curso de formação de professores, bem como aos professores regentes de turma , pode determinar uma substancial transformação no modo de agir desses professores.

HIPÓTESES OPERACIONAIS

A coordenação vertical deverá atuar junto aos professores de modo a:

. conscientizá-los das teorias matemáticas subjacentes às atividades por eles desenvolvidas;

. aguçar-lhes o interesse pela pesquisa e atualização;

. incentivar seu espírito criativo;

. capacitá-los a aplicar os conhecimentos matemáticos a situações do cotidiano e procurar a integração do ensino da Matemática com o das outras disciplinas;

. melhorar a interrelação pessoal com os alunos, atendendo-os através do conhecimento de sua problemática vivencial.

Em agosto, aplicamos pré-testes a uma turma de CA (pré), 1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries de cada uma das 6 escolas selecionadas para participar do projeto.

A escolha das escolas baseou-se nas conclusões das visitas às mesmas e em entrevistas com seus Diretores e/ou

Coordenadores. Queríamos trabalhar apenas com entidades e pessoas realmente interessadas na experiência.

A seleção dos 30 professores regentes de turmas foi feita mediante entrevistas e análise de questionários respondidos por 117 professores de 9 escolas que consideramos passíveis, pela primeira triagem, de participar do projeto.

Foram entrevistadas e respoderam a um questionário 40 alunas do 2º grau a fim de serem escolhidas 21 estagiárias. Levou-se em conta, também, a apreciação dos seus professores de Prática de Ensino e de Didática.

O projeto terá duração de 20 meses, tendo começado em março de 79. Há uma multiplicidade de problemas que devemos analisar e contamos chegar a algumas conclusões quanto a maneira de influenciar no enfoque de ensino da Matemática:

. entendendo o mecanismo da aquisição de certos conhecimentos;

. procurando melhorar a preparação do futuro professor primário;

. colhendo dados para aperfeiçoar a avaliação.

MÓDULO INSTRUCIONAL Nº 9

LIMITE E CONTINUIDADE

Profª Estela Kaufmann Fainguelernt

Esse módulo instrucional foi elaborado para utilização na disciplina de Nivelamento em Matemática do Curso de Técnicos em Transporte Marítimo - Petrobrás, dado sob a supervisão do GEPEM, em abril de 1977.

1. Introdução

No Curso de Técnico de Transportes Marítimos cuja finalidade é aprimorar e desenvolver os conhecimentos de seus alunos, iniciamos, agora, o estudo de "Elementos de Cálculo" que constitui a 4ª parte do Curso de Nivelamento em Matemática.

Até o presente, procurou-se dar uma sequência harmoniosa aos conceitos que fazem parte do conteúdo programático. O mesmo não ocorreu quando esses conceitos surgiram para atender às dificuldades e às necessidades de cada época.

Podemos enfatizar duas atitudes em face da ciência:

1) Aspecto de um todo harmonioso como "<u>coisa criada</u>", onde os conceitos se encadeiam em ordem, sem contradições.

2) Acompanhamento progressivo da sua elaboração, aparecendo conceitos novos para resolver dificuldades com hesitações, dúvidas e contradições.

... "No primeiro aspecto, a ciência parece bastar-se a si própria, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só a necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da ciência"... (*)

Assim o cálculo diferencial e integral, criado por Newton e Leibniz, solucionou as dificuldades da época em relação ao problema da causa física do movimento. É um dos alicerces para o trabalho que os alunos desse curso se propõem a desempenhar.

Os conceitos de limite e continuidade que serão abordados no módulo 9 são de grande importância e aplicação para qualquer ciência. Estes conceitos serão desenvolvidos nas fichas de trabalho I, II e III.

"O problema de continuidade é dos mais importantes da ciência e dos que mais têm sido estudados e debatidos".

"Todos nós temos a noção intuitiva da continuidade como a de uma variação que se faz por gradações insensíveis. Quer seja o movimento de um automóvel sobre uma estrada , comparado com o movimento que teria sobre a estrada um can

---

(*) Bento de Jesus Caraça, "Conceitos Fundamentais da Matemática", Lisboa 1951.

gurú; quer seja a variação de comprimento de uma barra metálica com a temperatura, comparada com a variação que se obteria cortando ou soldando pedaços da barra; em qualquer fenômeno a respeito do qual falemos de continuidade, entendemos sempre variação por graus insensíveis.

"Mas, na continuidade, há mais alguma coisa que isso: naquilo que para nós é a imagem ideal da continuidade - a linha reta - há mais do que variação por gradações insensíveis. A reta ultrapassa, em riqueza interior de estrutura, esse simples variar gradualmente sem saltos, como habitualmente se diz, sem soluções de continuidade.

"Reconhecemos que para adquirir a noção de continuidade, é necessário sabermos o que se passa num ponto, o que só pode ser entendido quando conhecemos o que se passa em pontos vizinhos bem próximos. Baseado no que foi dito acima salientamos como é importante o conceito de limite - "dizemos que uma sucessão a_n tem limite L se a_n é vizinho de L quando n é tão grande quando se queira (vizinho de infinito)". (*)

Outra expressão que é empregada em linguagem corrente é a de "tender para" que significa aproximar-se de; para nós é muito mais do que isso - é aproximar-se de, no sentido infinitesimal, isto é, de modo que a distância entre um ponto fixo determinado e qualquer outro ponto que se aproxime dele se torne tão pequena quanto se queira.

(*) Bento de Jesus Caraça, "Conceitos Fundamentais da Matemática", Lisboa 1951.

Usaremos aqui o mesmo critério adotado nas outras partes do Curso; isto é, o objetivo final do módulo 9 é capacitar o aluno a utilizar corretamente as noções de limite e continuidade e a aplicar as suas propriedades operatórias.

Os conhecimentos adquiridos ao realizar estas atividades não serão avaliados no pós-teste. Este será efetuado quando o aluno tiver certeza de ter assimilado os conhecimentos contidos nas fichas I, II e III - (que não podem passar de 7 horas-aula).

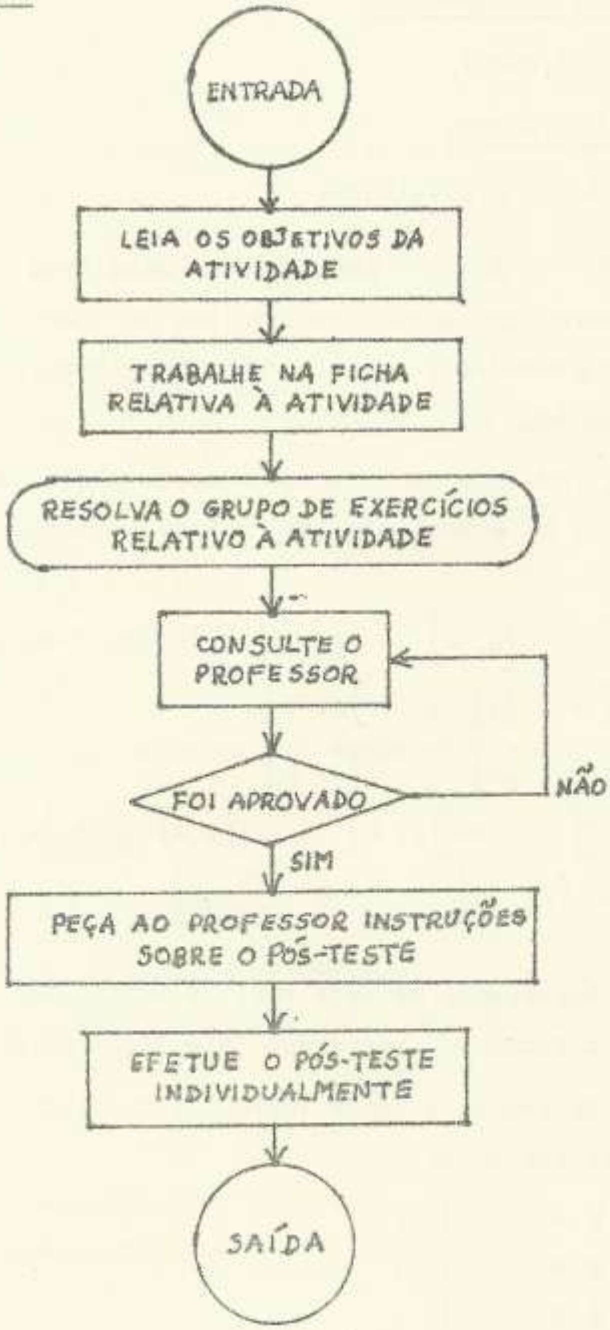
A atividade 4 constituirá um trabalho que levará ao domínio total do conteúdo e será efetuado se o aluno tiver completado as atividades 1,2e3 em tempo menor que o previsto.

2 - Pré-Requisitos - Os conhecimentos adquiridos e a aprovação nos módulos anteriores.

3 - Visão Geral do Módulo 9.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ATIVIDADES	AVALIAÇÃO
1. Identificar e utilizar noções de: Vizinhança na reta real Conjunto limitado Supremo e ínfimo Ponto de acumulação.	1. Trabalhe na Ficha I (pg ...)	Efetue os exercícios do grupo I (pg ...)
2. Adquirir a noção de limite . Adquirir a noção de limites laterais . Identificar limites finitos e infinitos . Conhecer e aplicar as propriedades.	2. Trabalhe na Ficha II (pg ...)	Efetue os exercícios do grupo II (pg ...)
3. Identificar a continuidade de uma função num ponto e no seu domínio. . Propriedades.	3. Trabalhe na Ficha III (pg ...)	Efetue os exercícios do grupo III (pg ...)
4. Aplicar as noções de limites ao estudo das sucessões de números reais.	4. (optativa) Trabalhe na Ficha IV (pg ...)	Efetue os exercícios do grupo IV (pg ...)

4 - Fluxograma



5 - Fichas de Trabalho

5.1 - Ficha I

A - Vizinhança

A.1 - Preliminares

A.1.1 - Considere o ponto 4 na reta real e os seguintes conjuntos constituidos de todos os números reais compreendidos entre os números citados, com a seguinte convenção:

$]a; b[$ indica o conjunto de números reais compreendidos entre a e b e distintos de a e de b; é dito intervalo aberto.

$[a; b] = \{a; b\} \cup]a; b[$; é dito intervalo fechado.

$[a; b[= \{a\} \cup]a; b[$

$]a; b] = \{b\} \cup]a; b[$

$A = [1, 7]$; $B =]2, 6[$; $C =]0, 4]$; $D =]4, 7[$;

$E = [4, 10[$; $F =]5, 8]$

a) Represente na reta real os intervalos acima, localizando o ponto 4. Verifique esta localização.

b) Determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes sentenças:

$4 \in A$ ( )

$4 \notin B$ ( )

$4 \in C$ ( )

$4 \in D$ ( )
$4 \notin E$ ( )
$4 \in F$ ( )

c) Compare os ítens a e b acima e justifique as respostas dadas no ítem b.

A.1.2 - Considere os conjuntos A, C, E e F do exercício A.1.1:

a) localize o ponto 5

b) Dê o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes setenças:

$5 \in A \cap C$ ( )
$5 \notin E \cup F$ ( )
$5 \in E \cup F$ ( )
$5 \in A \cap F$ ( )

c) Justifique as respostas dadas no ítem b.

A.2 - Definição

A.2.1 - Vizinhança

Dado um ponto a pertencente à reta, chama-se vizinhança do ponto a qualquer intervalo aberto que contem a.

Notação:

$V(a)$ = Vizinhança do ponto a.
V_a = Vizinhança do ponto a.

A.2.2 - Vizinhança lateral

Qualquer intervalo aberto do qual a é extremo é dito uma vizinhança lateral de a, distinguindo-se a vizinhança à direita e a vizinhança à esquerda.

Exemplo

1) 

Este intervalo é chamado vizinhança à direita de a (a é a origem do intervalo) $[a, a+4[$

2) 

Este intervalo é chamado vizinhança à esquerda de a. (a é a extremidade do intervalo). $]a - 3, a]$

B - Conjuntos limitados

B.1 - Preliminares

Observe o seguinte exemplo: No conjunto $M = [2,5]$, 2 é chamado origem ou extremidade inferior e 5 extremidade superior ou simplesmente extremidade.

B.1.1 - Considere os seguintes conjuntos:

$A = [2,3]$ $\qquad$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \{\ldots, -4. -3, -2, -1, 0, 1\}$

$E = \mathbb{Z}$

$F =]1, 7[$

a) Entre os conjuntos acima, quais são aqueles que têm extremidade superior e/ou inferior representados por um número?

b) Você será capaz de dizer, usando o significado comum da palavra limitado, quais dos conjuntos acima são limitados?

c) Se você concluiu que A , B e F são limitados, você acertou; indique as extremidades deles.

d) O que você poderá dizer a respeito dos conjuntos C, D e E?

B.1.2 - Dê dois subconjuntos de R, que sejam limitados.

B.1.3 - Dê dois subconjuntos de R, que não sejam limitados.

B.2 - Definições:

B.2.1 - Conjunto limitado superiormente

Dizemos que um subconjunto A da reta é limitado superiormente se existe um número real a tal que para todo x pertencente a A, x é menor ou igual a a.

Simbolicamente podemos escrever:

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in A \longrightarrow x \leq a$$

Por exemplo:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

2) $B = \left]-\infty, 0\right]$

3) $C = \{\ldots, -2, -1\}$

4) $\mathbb{Z}_-$

são conjuntos limitados superiormente

Analogamente:

B.2.2 - Conjunto limitado inferiormente

Um subconjunto B da reta é limitado inferiormente, se existe um número real b tal que para todo x pertencente a B, x é maior ou igual a b.

Simbolicamente podemos escrever:

$$\exists b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in B \longrightarrow x \geqslant b$$

Por exemplo:

1) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

2) $D = \left[-1, \infty\right[$

3) $\mathbb{N}$

4) $\mathbb{Z}_+$

são conjuntos limitados inferiormente.

Finalmente:

B.2.3 - Conjunto limitado

Um subconjunto C da reta é limitado se, e somente se, ele é limitado superiormente e inferiormente.

Simbolicamente

$$\exists a, b \in R, a < b \mid \forall x \in C \rightarrow a \leq x \leq b$$

Por exemplo:

1) $\{ x \in N \wedge x \leq 10 \}$

2) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

3) $[2, 8]$

4) $]-5, 3[$

são conjuntos limitados.

C - Supremo e Ínfimo

C.1 - Preliminares

C.1.1 - a) seja $A =]3, 5[$; determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes sentenças:

$3 \in A$	( )	$5 \in A$	( )
$3 \notin A$	( )	$5 \notin A$	( )
$4 \in A$	( )	$\frac{9}{2} \notin A$	( )
$\frac{45}{10} \in A$	( )	$\frac{16}{5} \in A$	( )

b) Escreva o conjunto A usando a definição em compreensão.

c) No conjunto A, qualquer elemento x pertencente a A é maior que três e menor que cinco? Justifique.

d) Represente na reta real o conjunto A.

Observe que no ítem b podemos escrever o conjunto A usando a definição em compreensão:

$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$

Sabe-se também que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leqslant 3$; existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $z \geqslant 5$, $y \notin A$ e $z \notin A$. Você acabou de verificar que qualquer elemento de A é maior que 3 e menor que 5, logo 3 é a maior das cotas inferiores do conjunto A e 5 é a menor das cotas superiores do conjunto A.

e) Escreva em linguagem simbólica o conjunto das cotas superiores de A e o conjunto das cotas inferiores de A.

f) Esses conjuntos encontrados no ítem e são intervalos da reta real?

C.1.2 - Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 10\}$

$C =]3, 7]$

a) Escreva em linguagem simbólica o conjunto das cotas inferiores .

b) Indique a maior das cotas inferiores.

c) Escreva em linguagem simbólica o conjunto das cotas superiores.

d) Indique a menor das cotas superiores.

C.2 - Definições

C.2.1 - Supremo de um conjunto

Seja $E \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente.Um elemento b $\in \mathbb{R}$ chama-se supremo do subconjunto E quando b é a menor das cotas superiores do conjunto E em $\mathbb{R}$.

O supremo de um conjunto, quando existe, é único.

O supremo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. Quando pertence, ele é também chamado de máximo.

Notação:

Sup E significa supremo do conjunto E.

Exemplos:

1) $M =]-5, 3[$

Sup M = 3

2) $S = [2, 8]$

Sup S = 8 = máximo de S.

Analogamente:

C.2.2 - Ínfimo de um conjunto

Um elemento a $\in \mathbb{R}$ chama-se ínfimo de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$, limitado inferiormente, quando a é a maior das cotas inferiores de K.

O ínfimo de um conjunto, quando existe, é único.

O ínfimo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. Quando pertence ele é também chamado de mínimo.

Notação:

inf K significa ínfimo do conjunto K.

Exemplos:

1) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Inf $\mathbb{N} = 0$ = mínimo de $\mathbb{N}$

2) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

Inf de $S = 5$

D - Ponto de acumulação

D.1 - Preliminares

D.1.1 - Seja $E = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{n^2} \ldots\}$

Responda:

a) E é limitado superiormente?

b) E é limitado inferiormente?

c) Qual é o maior elemento pertencente ao conjunto E ?

d) Você é capaz de determinar o menor elemento pertencente ao conjunto E?

e) Zero pertence ao conjunto E?

f) Determine uma vizinhança à direita do elemento zero. Ela possue elementos do conjunto E?

g) O conjunto E possui ínfimo? Ele é mínimo?

h) O conjunto E possui supremo? Ele é máximo?

D.2 - Definição

D.2.1 - Seja $E \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se ponto de acumulação do conjunto E quando toda a vizinhança de centro a contém algum ponto $x \in E$ e $x \neq a$.

Voltando à atividade D.1.1, vocês verificaram que zero é o ínfimo do conjunto E e zero não pertence a E; $E \subset \mathbb{R}$

e toda vizinhança de zero possui elementos de E bem próximos de zero. Portanto zero é ponto de acumulação de E.

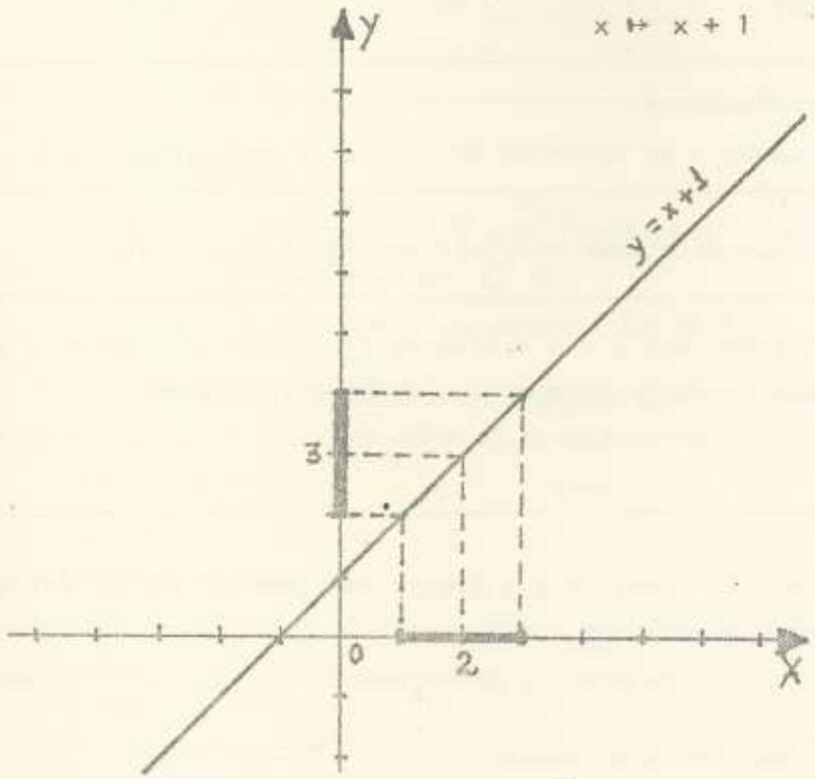
5.2 - Ficha II

Limites

A - Conceito de Limite

A.1 - Preliminares

A.1.1. - Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x + 1$



a) Calcule f(1) = f(3) =

f(1,5) = f(2,6) =

f(1,8) = f(2,5) =

f(2) =

b) O que acontece com a função f quando x se aproxima de 2 por valores maiores que 2 (isto é, pela direita?)

> Indicaremos:
> quando x se aproxima de 2 pela direita: $x \to 2_+$

c) O que acontece com a função f quando x se aproxima de 2 por valores menores que 2 (isto é, pela esquerda?

> Indicaremos:
> quando x se aproxima de 2 pela esquerda: $x \to 2_-$

d) O que você pode concluir dos ítens anteriores?

> Dizemos que 3 é o limite de f(x), quando x tende a 2 (ou quando x se aproxima de 2) e indicamos:
> $$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

A.1.2 - Considere a progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{2}$.

a) Calcule:

$a_1 + a_2 =$

$a_1 + a_2 + a_3 =$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n =$

b) Qual é o valor da soma de um número n finito de termos da P.G. anterior?

c) Para que valor tende a soma dos termos da P.G. anterior quando o número de termos cresce indefinidamente?

Vocês já sabem que: a soma finita dos termos de uma P.G. de: razão $0 < q < 1$ é:

$$S_n = \frac{a_1\ (1-q^n)}{1 - q} \quad \text{e o} \quad \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

A.2 - <u>Definição</u>:

A.2.1 - Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$.

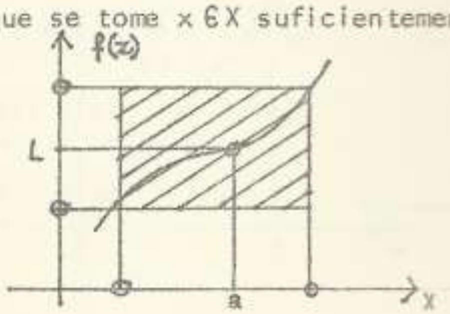
Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

Diz-se que <u>o número real L é o limite de f (x)</u> quando x se aproxima de a (x tende para a) e escreve-se:

$$\lim_{x \to a} f\ (x) = L$$

para significar o seguinte:

"é possível tornar f(x) arbitrariamente próximo de f(a) desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo de <u>a</u> $(x \neq a)$".



(pontos próximos dão imagens próximas)