BOLETIM

Junho /80

9

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Publicado sob os auspícios da
UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Dado o alto índice de aceitação dos módulos Instrucionais da Profª. Estela Kaufman Fainguelernt publicados no número anterior do Boletim, damos prosseguimento nesse número publicação dos mesmos. Transcrevemos o módulo 10 do Curso de Nivelamento em Matemática do TETRAMA (Curso de Técnicos em Transporte marítimo, Petrobrás), de sua autoria, versando sobre derivadas.

A seguir publicamos breve artigo sobre uma Geometria Dedutiva, da Profª. Moema Sá Carvalho.

Mantendo o interesse de fazer chegar aos colegas pensamentos significativos de personalidades que se destacam na área da Educação ou da Ciência, transcrevemos:

. alguns trechos de pronunciamentos do Anísio Teixeira, extraidos de seu livro "Educação não é Privilégio".
. uma palestra do Professor Howard Fehr, sobre a melhoria da Educação Matemática, traduzida por Professora Amélia Maria Noronha Pessoa de Queiroz.

Na seção Resenha apreciamos o livro recém editado "Algebra Linear e Geometria Analítica" das professoras Estela Kaufman Fainguelernt e Noelir de Carvalho Bordinhão.

MÓDULO INSTRUCIONAL Nº 10

DERIVADAS - MÁXIMOS E MÍNIMOS - CONVEXIDADE

PETROBRÁS

Curso de Técnico em transporte Maritimo(TETRAMA)

Disciplina:Nivelamento em Matemática.

4ª Parte: Elementos de Cálculo.

Supervisão: GEPEM (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática).

Autor do Módulo: Estela Kaufman Fainguelernt

1 - INTRODUÇÃO

A pedagogia dinâmica que está sendo adotada neste Curso preocupa-se com a compreensão e assimilação do que está sendo exposto. Mas isto só acontece se os conhecimentos já adquiridos são usados eficazmente e ativamente tendo em vista aplicações práticas.

Neste módulo 10 trataremos do estudo de um limite particular que é o estudo das derivadas.

Este limite tem tido muitas aplicações além da construção de tangentes; por exemplo, em Física ela. aparecem como velocidades, acelerações, densidades e correntes elétricas; em economia, como "lucro marginal", "custo marginal"; em química como velocidades de reações; em probabilidade, como densidade de probabilidade, de maneira que para o estudo das derivadas utiliza-se uma linguagem neutra, que possa ser transferida sempre que for necessário para as suas diversas aplicações.

Como no módulo 9, faremos, agora, um estudo informal deste assunto visando mais as aplicações práticas do que a construção e o desenvolvimento de uma teoria axiomatizada.

Utilizaremos também neste módulo a técnica de fichas de trabalho como nos anteriores.

Incluiremos uma atividade optativa que será efetuada por aqueles que terminarem, em menos de 10 horas-aula, as quatro atividades obrigatórias.

O pós-teste será efetuado quando o aluno tiver certeza de ter assimilado os conhecimentos contidos nas fichas de trabalho I, II, III e IV e resolvido os grupos de exercícios propostos.

2 - PRÉ-REQUISITOS

Ter sido aprovado no pós-teste relativo ao módulo 9.

3 - VISÃO GLOBAL DO MÓDULO 10

(Veja página seguinte).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ATIVIDADES	AVALIAÇÃO
1- Definir derivada de uma função - conhecer o significado geo-métrico da derivadas. - identificar outras aplica-ções de derivada. - identificar funções simples que não possuem derivadas em algum ponto.	Trabalhe na ficha I	Efetue os exercícios do Grupo I
2- Cálculo das derivadas: - conhecer as regras de deri-vação - algebra das derivadas-fórmu las de derivação para cálcu lo das derivadas.	Trabalhe na ficha II	Efetue os exercícios do Grupo II
3- Máximos-mínimos-inflexão - reconhecer a derivada como um auxílio para esboçar grá ficos. - identificar e diferenciar os pontos críticos de uma fun-ção. - determinar os pontos críti-cos de uma função. - adquirir as técnicas de cál culo desses pontos.	Trabalhe na ficha III	Efetue os exercícios do Grupo III

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ATIVIDADES	AVALIAÇÃO
4- Convexidade - definir conjuntos.convexos - identificar funções con-vexas	Trabalhe na ficha IV	Efetue os exercícios do Grupo IV
5- Séries numéricas - fórmula de Taylor - série de Taylor	(optativa) Trabalhe na ficha V	Efetue os exercícios do Grupo V

4- Fluxograma

5 - FICHAS DE TRABALHO

5.1 FICHA I - Derivada de uma função

A. Introdução à Derivada

A.1 Preliminares

A.1.1 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2$$

a) Represente graficamente esta função.

b) Calcule $f(x_o)$ para $x_o = \dfrac{1}{2}$

c) Marque no gráfico um ponto qualquer $P = (x, f(x))$ e o ponto $P_o = \left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$. Trace a reta que passa por esses dois pontos.

d) Calcule $f(x) - f(x_o)$ e $x - x_o$; indique essas diferenças no gráfico.

e) Calcule $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ (Este quociente é chamado relação incremental da função f e representa a inclinação da reta que passa pelos pontos P e P_o).

f) Calcule $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$; (lembre-se das propriedades operatórias de limite); procure levantar a indeterminação $x \neq x_o$

Observação:

Calculando o limite acima você verifica que, quando x se aproxima de $\frac{1}{2}$, o ponto $P = (x, x^2)$, descrevendo a curva, se aproxima de $P_o = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$,

g) Resolvendo os itens acima e analisando o gráfico que você traçou, você será capaz de dizer o que acontece com a reta que passa pelos pontos P e P_o quando P tende P_o sobre a curva ?

A.2 Definições

A.2.1 Você concluiu dos exemplos acima que quando o ponto P se aproxima do ponto P_o, descrevendo a curva, a reta L que passa por P e P_o se aproxima da reta que passa pelo ponto P_o, e cuja inclinação (ou coeficiente angular), é:

$$m = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ quando o limite existe.

A reta, passando por P_o, e cuja inclinação seja esse limite é dita "reta tangente à curva em P_o".

O limite, quando existe, é dita a derivada da função f(x) em x_o e é representada por $f'(x)$.

Exemplo:

1) Seja $f(x) = x^2 + x$. Calculemos $f'(x_o)$.

$$f(x) - f(x_o) = (x^2 + x) - (x_o^2 + x_o) = x^2 + x - x_o^2 - x_o$$

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{x^2 - x_o^2 + x - x_o}{x - x_o} = \frac{(x - x_o)(x + x_o) + (x - x_o)}{x - x_o}$$

donde

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{(x - x_o)(x + x_o + 1)}{(x - x_o)} = x + x_o + 1$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} (x + x_o + 1) = 2x_o + 1$$

2) Seja $f(x) = x^2 + x$. Calculemos $f'(x_o)$ para $x_0 = 3$

$f'(x_o) = f'(3) = 2x3 + 1 = 7$ usando o resultado do exemplo 1.

$f'(3) = 7$

3) Seja $f(x) = x^2$. Calculemos $f'(x_o)$ para $x_o = 3$.

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} (x + x_o)$$

$$= \lim_{x \to x_o} (x + x_o) = 2x_o = 2 \times 3 = 6 \; ; \; f'(3) = 6$$

Observe que:

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ pois

$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ e $f(3) = 3^2 = 9$

A.2.2 Observamos dos exemplos que, $f(x) = x^2$ é derivável em qualquer ponto $x_o \in R$ e que $f'(x_o) = 2x_o$, e já sabemos que $f(x) = x^2$ é continuo em R (módulo 9)

Se $f(x)$ é uma função definida e contínua em um intervalo E, se $f(x)$ é derivável em todos os pontos x de um intervalo $E_1 \subset E$, então existe uma função $f'(x)$ que associa a cada $x \in E_1$ o número $f'(x) \in R$. Esta nova função, chama-se função derivada de $f(x)$ ou por abuso de linguagem, derivada de $f(x)$.

Por definição:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \qquad (1)$$

A derivada da função $y = y(x)$, também é indicada por y' ou por $\frac{dy}{dx}$.

Podemos indicar também: $x - x_o = \Delta x \Rightarrow x = x_o + \Delta x$.

Substituindo em

$$f(x) - f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \Delta y.$$

donde (1) pode ser escrito

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A.3 Propriedade:

Se uma função $f(x)$ é derivável no ponto x_o de seu domínio, então $f(x)$ é contínua no ponto x_o.

Você já sabe o que é função derivável no ponto x_o de seu domínio e também já conhece a definição de função contínua no ponto x_o (módulo 9). Tente achar exemplos que ilustrem estas propriedades.

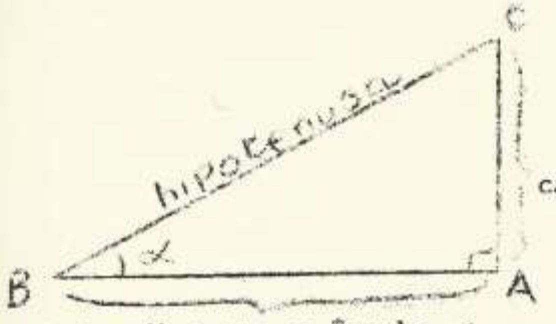
Observação: A afirmação A.3 é muito importante no estudo das derivadas; não daremos a sua demosntração por fugir aos objetivos desse curso mas ela pode ser encontrada em qualquer livro de Análise Matemática (ver bibliografia no final do módulo 12). O método usado nesta atividade para dar a idéia de derivada de uma função é o método de Fermat.

B-Significado Geométrico da derivada

B.1 Preliminares

B.1.1 Recordemos aqui algumas noções dadas no 2ºgrau.

a) Consideremos um triângulo retângulo em A.



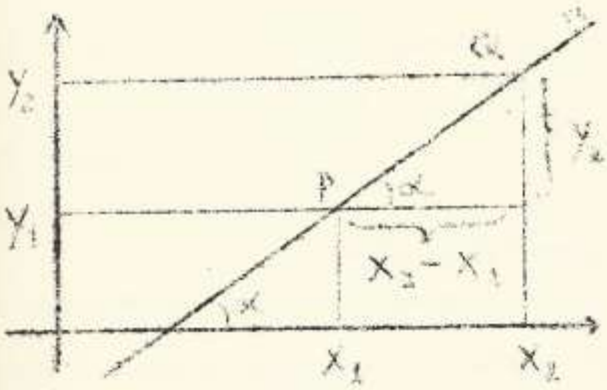
cateto oposto ao ângulo α

cateto adjacente ao ângulo α

Chama-se tangente do ângulo α, e indica-se tg α, a razão entre a medida do cateto oposto e a do cateto adjacente.

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

b) Coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abcissas (eixo do x)

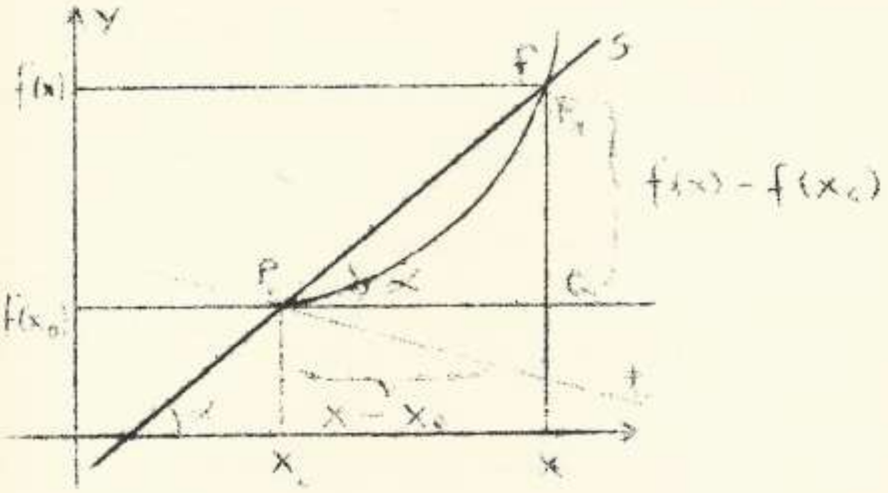


$P = (x_1 , y_1)$

$Q = (x_2 , y_2)$

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

B.1.2 Observe o gráfico de f.



(figura 1).

a) Quais as coordenadas dos pontos P_o e P_1 ?

b) Quais os pontos que estão determinando a reta s ?

c) O que acontece com a reta s quando o ponto P_1 , percorrendo o gráfico da f , se aproxima do ponto P_o?

d) Calcule a razão incremental de f (x) relativa ao ponto x_o

e) Calcule o coeficiente angular da reta s , isto é, calcule

(tg α)

f) Compare os itens d e e.

g) Complete:

f (x) é derivável no ponto x_o, então para $x \to x_o$ o ponto P_1 tende para o ponto .... , e consequentemente, a reta s tende para a posição limite, que é a reta cuja inclinação é a derivada da função f calculada em P_o; é a reta dita <u>tangente</u> à curva em P_o

B.2 Conclusão:

B.2.1 A existência de $f'(x_o)$ significa que o gráfico de f tem tangente única t em P_o e que o coeficiente angular, da reta t (figura 1) será:

$$f'(x_o 0 = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o},$$

. A equação da tangente, t, que passa pelo ponto P_o é:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

B.2.2 A derivada de uma função f (x), quando existe, assume em cada ponto x_o um valor que é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico cartesiano de f (x), no ponto de abcissa x_o.

Exemplo:

Qual a equação da reta tangente à parábola de equação $y = x^2$ em seu ponto de abcissa $x_o = 3$?

Solução:

$$x_o = 3 \to y_o = x^2 = 3^2 = 9 \to P(3, 9)$$

A derivada da função $y = x^2$ é $y' = 2x$ no ponto' de abcissa 3, temos:

$$y' = 2 \times 3 = 6$$

e a equação da reta tangente ao gráfico cartesiano de f (x) no' ponto de abcissa $x_o = 3$ é:

$$y - \underset{y_0}{9} = \underset{y'}{6}\,(x - \underset{x_0}{3})$$

$y - 9 = 6x - 18$; $y = 6x - 9$ equação da tangente no ponto de coordenadas $(3\ ,\ 9)$

. Tente fazer o gráfico desse exemplo.

C-Aplicações de derivadas

C.1 Preliminares:

C.1.1 Física - Cinemática

Sabemos, pelo estudo da Cinemática, que a equação horária do movimento de um ponto material que descreve uma trajetória (curva) λ é:

$$s = f\ (t)$$

onde s é a abcissa do ponto móvel, medida na curva λ , no instante t.

Chama-se velocidade média v_m, entre os instantes t_o e t , a razão incremental

$$v_m = \frac{f\ (t) - f\ (t_o)}{t - t_o} = \frac{s - s_o}{t - t_o} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

e velocidade no instante t_o , o limite

$$v_{t_o} = \lim_{t \to t_o} v_m = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} =$$

$$= t = t_o$$

CONCLUSÃO : Dada a equação horária $s = f(t)$, a sua derivada $\frac{ds}{dt}$ indica em cada instante t_o a velocidade do ponto material.

C.1.2 Por outro lado, dada a função $v = \frac{ds}{dt} = v(T)$, chama-se aceleração média a_m , entre os instantes t_o e t a razão incremental

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} = \frac{v - v_o}{t - t_o} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e aceleração no instante t_o o limite:

$$a_{t_o} = \lim_{t \to t_o} a_m = \lim_{t \to t_o} \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$t = t_o$$

CONCLUSÃO: A derivada $\frac{dv}{dt}$ da função $v = v(t)$ indica em cada instante t_o a aceleração do ponto material.

C.1.3 Se você leu com atenção o que foi escrito em C.1.1 e C.1.2 resolva:

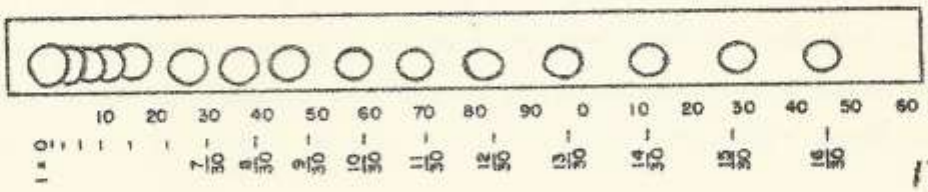
Um ponto material se desloca numa reta e sua equação horária é $s = t^2 + 3t$. Determinar a posição (s), a velocidade (v) e a aceleração (a) do móvel nos instantes 0, 1 e 2 do movimento. Unidades M K S .

Faça o gráfico indicando o percurso. Leia o exemplo com atenção e complete usando os resultados anteriores.

C.1.4 Exemplo 1

Uma bola de bilhar cai livremente ao lado de uma régua e sua posição é gravada sobre um filme por meio de uma luz que pisca cada 1/30 segundos, com os resultados mostrados na figura 1.48. Suponha que começamos a medir o tempo quando a bola está na posição marcada t=0. Então, com toda a exatidão que é possível obter da figura, vamos que s(6/30)=22; s(7/30)=30 s(8/30)=39; etc. Assim a velocidade média de t=6/30 a t=8/30 será........................

e a velocidade média t=1/3 a t=1/2 será.........................



Não podemos calcular a velocidade propriamente dita em um certo instante, a partir de uma figura, como a Fig.1.48, mas obtemos uma aproximação tomando a velocidade média sobre intervalos curtos. Por exemplo, podemos aproximar a velocidade $s(7/30) = s'(7/30)$ tomando as velocidades médias.

Eperamos então que a velocidade no instante $t = 7/30$ seja igual a um certo número entre estes dois valores ; digamos em torno de 255.

Isso é uma estimativa um pouco grosseira. Para obter aproximações melhores, exigiríamos medidas sobre intervalos mais curtos, estas aproximações tenderiam para a velocidade $v(7/30)$.

Nas aplicações, encaramos a derivada como a "taxa de variação". A diferença $s(t) - s(t_v)$ é uma mudança de posição. Dividindo-a pelo tempo $t - t_o$ gasto pata atingir a nova posição temos a taxa de variação média de s sobre o intervalo de t_o a t. Tomando o limite desta razão quando o intervalo de t a t_o diminui para zero, encontramos a taxa de variação no instante t_o.

C.1.4 ECONOMIA - LUCRO MARGINAL . CUSTO MARGINAL

Se y é o custo total da produção e venda, de x unidades de um determinado produto, e assumindo-se para ser uma função sòmente de x, então a função do custo total pode ser representada por $y=f(x)$. Vários tipos de funções são usadas para representar a curva do custo total; em geral as suas curvas têm as seguintes tendências:

1. Quando nenhuma unidade é pruduzida, o custo total é zero ou positivo, isto é: $f(0) \geq 0$. Se $f(0) > 0$, isto representa ' mão de obra ou custo fixo de produção.

2. O custo total aumenta quando x aumenta, assim $f'(x) > 0$.

3. O custo da produção em quantidades extremamente grandes, usualmente alcança um ponto do qual el aumenta, aumentando-se a taxa. Então a curva do custo total tem eventualmente a concavidade voltada para cima, isto é

$$f''(x) > 0 ;$$

enquanto que em uma limitada classificação, a curva do custo total é frequentemente côncava para baixo, correspondendo ao decréscimo do custo marginal.

Se a função do custo total é representada por:

$$y = f(x)$$

então o custo médio por unidade é:

$$\bar{y} = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

Se a produção fôr aumentada por uma quantidade Δx, a um determinado nível de x, e se o aumento correspondente no custo fôr Δy, então a média do aumento no custo por unidade aumentada na produção será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} ,$$

e o custo marginal é definido como sendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

então o custo marginal é a derivada de f (x), da função do custo total y = f (x);

A primeira derivada do custo médio (custo marginal médio) é:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$= 0 \quad \text{se e sòmente se}$$

$$xf'(x) - f(x) = 0$$

isto é $f(x) = xf'(x) \quad \therefore \quad \frac{f(x)}{x} = f'(x)$

Então as curvas do custo médio e do custo marginal, interceptam-se no ponto em que a derivada do custo médio se anula (de mínimo do custo médio).

C.2 CONCLUSÃO

C.2.1 Além das aplicações dadas, existem muitas outras como Densidade, corrente, gradiente etc que omitiremos por fugir aos objetivos desse curso, e que podem ser encontradas em alguns livros de cálculo. (Ver bibliografia no final do módulo 12).

D Funções que não possuem derivadas em alguns pontos em que estão definidas.

D.1 Preliminares

D.1.1 Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto |x|$$

a) Calcule a razão incremental de f (x) relativa ao ponto $x_o = 1$

b) Calcule:

1) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ (já foi estudado no Módulo 9)

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

c) Analise os resultados encontrados nos itens a e b.

A derivada f' (1) existe ?

Justifique a sua resposta.

d) Repita os itens a, b, c, mas agora relativo a ponto $x_o=0$

e) A derivada f' (0) existe ?

Justifique sua resposta.

D.1.2 Consideremos a $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \longrightarrow x^{1/2}$$

a) Faça o gráfico

b) Calcule f (1)

c) O que você diz a respeito de f' (0) ?

D.2 CONCLUSÃO

D.2.1- Como vocês verificaram nos exemplos acima existem funções que não possuem derivadas em alguns pontos em que estão definidas.

Enunciaremos algumas observações importantes:

Já vimos anteriormente que

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

1) Se o citado limite não existir ou existir e fôr igual a $+\infty$ ou $-\infty$ diremos que a função f (x) não é derivável no ponto x_o, isto é, $\nexists f'(x_o)$

2) Se o limite da razão incremental existir apenas para $x \to x_o$ pela direita ou pela esquerda, diremos que a derivada é lateral. Em símbolos indicaremos:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \text{ derivada à esquerda de } x_0$$

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \text{ derivada à direita de } x_0$$

3) Se $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) := f'(x_0)$ diremos que a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0.

4) Se existem $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ mas $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ então não existe $f'(x_0)$.

5) Grupos de exercícios.

5.1 Grupo I

1) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$, examine os dados fornecidos e assinale as afirmações corretas.
Dados:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 3 \\ x_0 = 3 \\ f(x_0) = f(3) = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{2x - 6}{x - 3}$$

a) (   ) a razão incremental de f (x) relativa ao ponto $x_o = 3$ é $\dfrac{2x - 6}{x - 6}$

b) (   ) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \dfrac{1}{2}$

c) (   ) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$

d) (   ) a derivada de f (x) no ponto $x_o = 3$ é igual a 2.

e) (   ) a derivada de f (x) no ponto $x_o = 3$ é igual a $\dfrac{1}{2}$

f) (   ) $f'(3) = 2$

g) (   ) $f'(3) = 3$

2) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Usando a definição de derivada calcule

$$f'(1),\ f'(3) \text{ e } f'(x_o)$$

3) Determinar a equação da tangente à curva definida por $y = x^3$ no ponto P de abcissa $x_o = 2$

4) Uma partícula percorre uma curva segundo a lei:

$s = 10 + 6t^2 - t^3$ (<u>s</u> em cm e <u>t</u> em segundos).

Determinar:

a) o instante em que a velocidade é nula.

b) a aceleração nesse instante.

c) o espaço percorrido até esse instante.

5(Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$

a) Calcule $f'(1)$

b) O que você pode afirmar a respeito de $f'(0)$?

6) A Companhia Manufatureira de Máquinas Presidente, possui uma função do custo total representada pela equação.

$$y_c = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

a) qual é a equação que representa a função custo marginal?

b) qual é a equação para função do custo médio?

7) Para cada uma das seguintes funções do custo total; ache o custo marginal

a) $y_c = 1000x - 180x^2 + 3x^3$

b) $y_c = 220 + 55x - 2x^3 + x^4$

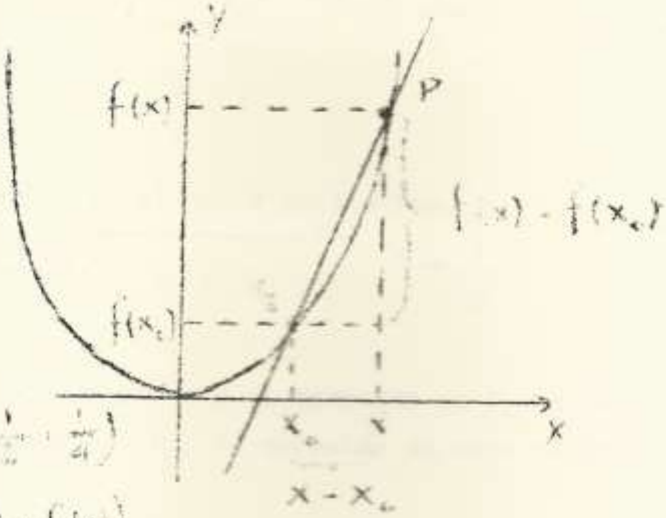
6 - GABARITOS DAS FICHAS DE TRABALHO

6.1 FICHA 1

A

A.1.1

a)



$P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$P\,(x\,,\,f(x))$

b) $f\,(x_o) = x_o^2$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

c) Os pontos P e P_o já estão marcados no gráfico como também a reta que os une.

d) $f\,(x) - f\,(x_o) = x^2 - \frac{1}{4}$

$x - x_o = x - \frac{1}{2}$

e) $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + \frac{1}{2} \quad , \quad x \neq \frac{1}{2}$$

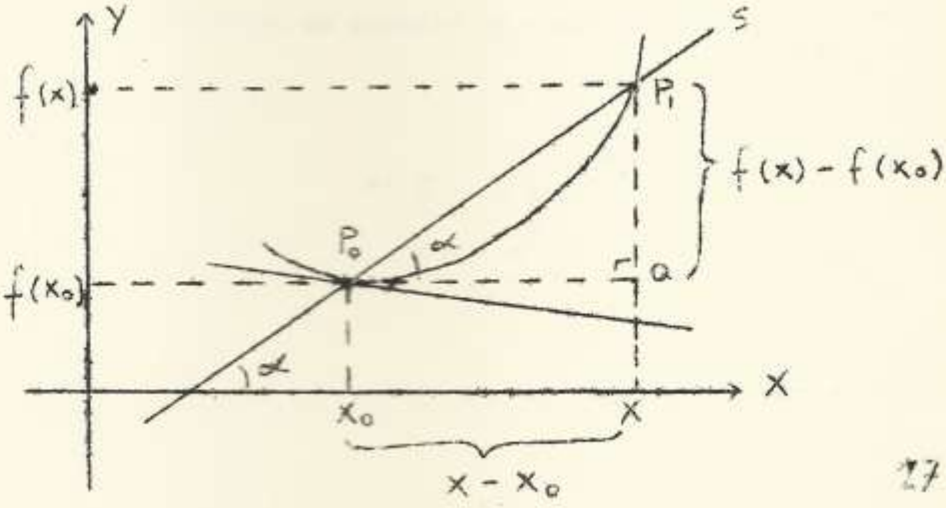
f) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

g) Quando o ponto P se aproxima de P_0, a reta que passa pelos pontos P e P_0, se aproxima da reta tangente que passa por P_0.

B

B.1.1 Recordação de alguns conceitos dados no 2º grau.

B.1.2



a) Coordenadas do ponto P_0 são $(x_0 \ , \ f\ (x_0))$

Coordenadas do ponto P_1 são $(x \ , \ f\ (x))$

b) Os pontos que determinam a reta <u>s</u> são P e P_1.

c) A reta <u>s</u> aproxima-se da reta <u>t</u>.

d) $$\frac{f\ (x) \ - \ f\ (x_0)}{x \ - \ x_0}$$

e) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f\ (x) \ - \ f\ (x_0)}{x \ - \ x_0}$$

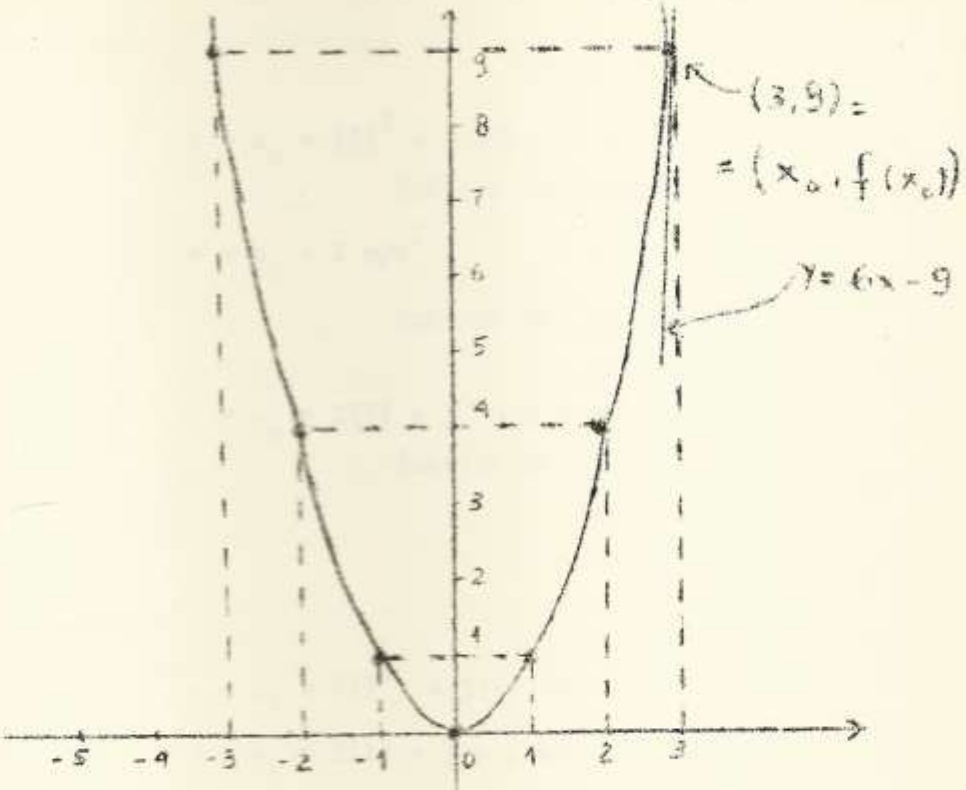
f) Os itens <u>d</u> e <u>e</u> são iguais.

g) f (x) é derivável no ponto x_0, então para $x \mapsto x_0$, o ponto P_1 tende para o ponto P_0, e consequentemente, a <u>reta s</u> tende para a posição limite que é a <u>reta t</u>, que é por definição a tangente geométrica ao gráfico da f no ponto P.

Gráfico do exemplo da conclusão B.2.2.

X	Y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4
3	9

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$



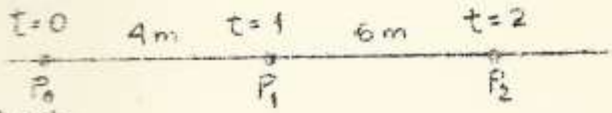
C

C.1.1 Resolução no texto.

C.1.2 Resolução no texto.

C.1.3

Inicialmente vamos obter as derivadas:



usando a definição de derivada

$$v = \frac{ds}{dt} = 2t + 3$$

usando novamente a definição de derivada: $a = \frac{dv}{dt} = 2$

Então, temos :

$$t = 0 \quad \begin{cases} s = s_o = (0)^2 + 3\ (0) = 0 \text{ m} \\ \qquad \text{(obtido da equação } s = t^2 + 3t\text{)} \\ a = a_o = 2 \text{ m/s}^2 \\ \qquad \text{(obtido de } \dfrac{dv}{dt} = 2\text{)} \\ v = v_o = 2(0) + 3 = 3 \text{ m/s} \\ \qquad \text{(obtido de } \dfrac{ds}{dt} = 2t + 3\text{)} \end{cases}$$

Analogamente:

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} s = s_1 = (1)^2 + 3(1) = 4 \text{ m} \\ v = v_1 = 2(1) + 3 = 5 \text{ m/s} \\ a = a_1 = 2 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} s = s_2 = (2)^2 + 3(2) = 10 \text{ m} \\ v = v_2 = 2(2) + 3 = 7 \text{ m/s} \\ a = a_2 = 2 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

C.1.4

A velocidade média de $t = 6/30$ a $t = 8/30$ é

$$\frac{s\ (8/30)\ -\ s(6/30)}{8/30\ -\ 6/30} = \frac{17}{1/15} = 255$$

e a velocidade média de $t = 1/3$ a $t = 1/2$ será

$$\frac{s(1/2) - s(1/3)}{1/2 - 1/3} = \frac{131 - 60}{1/6} = 426$$

Podemos aproximar a velocidade $v(7/30)$ tomando as velocidades médias, de $s(8/30)$ em relação $s(7/30)$ e a $s(7/30)$ em relação a $s(6/30)$.

$$\frac{s(8/30) - s(7/30)}{1/30} = 270$$

$$\frac{s(6/30) - s(7/30)}{0 - 1/30} = \frac{-8}{-1/30} = 240$$

D

D.1.1 $\quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\qquad x \longmapsto |x|$

a) $\dfrac{|x| - |1|}{x - 1}$

b) 1- $\displaystyle\lim_{x \to 1_-} \frac{|x| - |1|}{x - 1} = \lim_{x \to 1_-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$

2- $\displaystyle\lim_{x \to 1_+} \frac{|x| - |1|}{x - 1} = \lim_{x \to 1_+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$

c) f' (1) existe pois existem os limites laterais e eles são iguais.

d)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{para } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

definição de módulo

então

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} (-1) = -1 \Rightarrow f'_-(0) = -1$$

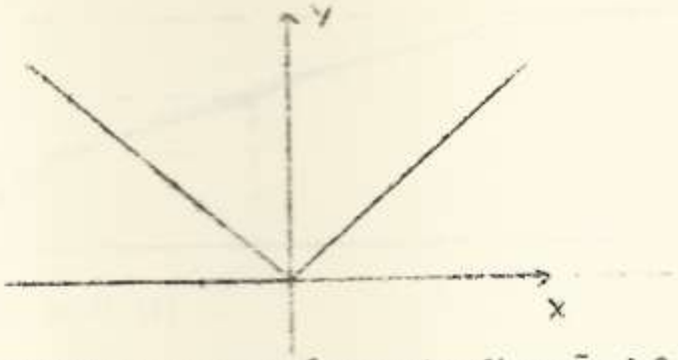
$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} (1) = 1 \Rightarrow f'_+(0) = +1$$

concluimos que a função $f(x) = |x|$ não é derivável no ponto $x_o = 0$, portanto não $\exists$ $f'(0)$.

Mas a função $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x_o = 0$ pois $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$ e no entanto, $f(x) = |x|$ não é derivável no mesmo ponto pois como vemos acima

$$f'_-(0) = -1 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = 1$$

Analisando o gráfico dessa função:



e podemos concluir que a recíproca da afirmação A.2.3 não é verdadeira, isto é

afirmação A.2.3

"Se uma função f (x) é derivável no ponto x_o de seu domínio então f (x) é contínua no ponto x_o ".

Mas, nem toda função contínua em um ponto x_o de seu domínio é derivável neste ponto.

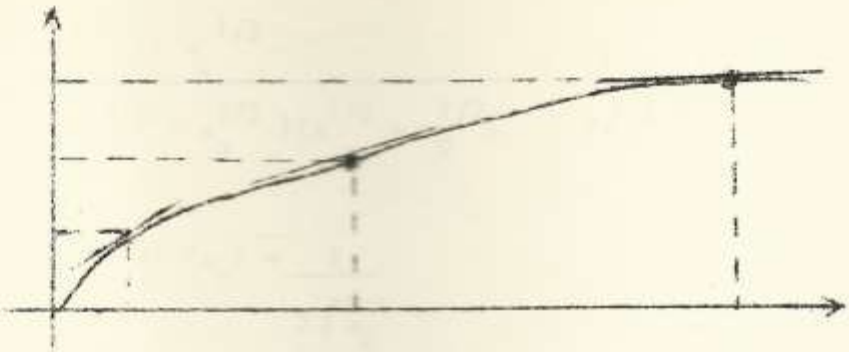
Isto vocês verificaram com o exemplo acima.

D.1.2 $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto x^{1/2} \qquad (x^{1/2} = \sqrt{x})$$

a)

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3



b) Cálculo de f' (1)

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^{1/2}) - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^{1/2} - 1)}{(x^{1/2} - 1)(x^{1/2} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^{1/2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

OBSERVAÇÃO:

Da mesma maneira, encontramos a derivada para qualquer ponto $x_o > 0$.

isto é

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x^{1/2} - x_o^{1/2}}{x - x_o} =$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x^{1/2} - x_o^{1/2}}{(x^{1/2} - x_o^{1/2})(x^{1/2} + x_o^{1/2})} = \frac{1}{2x_o^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\therefore \; f'(x_o) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

c) Usando o item b, verificamos que $f'(0)$ não existe.

Observamos que $f'(x_o) = \dfrac{\quad}{2\sqrt{x_o}}$ é positívo e cresce continuamente quando $x_o \longrightarrow 0$. Como vocês podem observar no gráfico a tangente sobe sempre da esquerda para a direita e é quase vertical em pontos próximos ao zero.

Como já vimos a derivada dá coeficiente angular da tangente em cada ponto e nós sabemos que quando o ângulo mede 90º a tangente não existe.

8 - GABARITOS DOS GRUPOS DE EXERCÍCIOS

8.1 GRUPO 1

1) $$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + x + 1)(X - 1)}{x - 1} = 3$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)(x - 3)}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9) = 27$$

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x^3 - x_o^3}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x^2 + xx_0 + x_o^2)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} (x^2 + xx_o + x_o^2) = 3x_o^2$$

2) a, c, d, f.

3) Seja $f(x) = x^3$, no ponto $x_o = 2$

$$f(x_o) = (2)^3 = 8$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)}$$

$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$ logo o coeficiente angular da tangente é $m = 12$.

A equação da tangente que passa pelo ponto $P\ (2\ ;\ 8)$ é

$y - 8 = 12\ (x - 2)$

4) $s = 10 + 6t^2 - t^3$

a) $s'\ (t) = v$ fazendo raciocínio análogo aos anteriores

$s'\ (t) = 12t - 3t^2 = v$

$v = 12t - 3t^2\ ,\quad v = 0 \Longrightarrow 12t - 3t^2 = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$

$v\ (0) = 0$ e $v\ (4) = 0$

b) Aceleração $v'\ (t) = a$

$a\ (t) = 12 - 6t^2$

no instante $t = 0$

$a\ (0) = 12 - 6\ (0)^2 = 12$

no instante $t = 4$

$a\ (4) = 12 - 6 \times 4 = -12$