"EM NOSSAS CLASSES"
"QUAL É A IDADE DO COMANDANTE"

Equipe "Elémentaire" do IREM de Grenoble, França*

Quando nos interessamos pelos problemas propostos às crianças nas escolas elementares, acreditávamos que, ao resolverem um problema, as crianças levassem em consideração a adequação dos dados do problema proposto (fosse ele montado a partir de situações familiares ou de situações imaginárias):

- Um de nós resolveu testar essa opinião estabelecida a priori e propôs a 97 alunos de CE1 e CE2 (**) o problema seguinte:

"Em um barco há 26 carneiros e 10 cabras.
Qual é a idade do comandante ?"

Pois bem, entre os 97 alunos testados, 76 deram a "idade do comandante", utilizando os números que figuravam no enunciado.

Essa porcentagem tão grande de respostas nos levou a propor o mesmo tipo de enunciado a diversas classes, nos diferentes níveis da escola elementar.

(*) Tradução do artigo publicado no Boletim nº 323, abril 1980, da ARMEP (Association des Professeurs de Mathematiques de L'Enseignement), Paris, França.

(**) CE1 e CE2: classes elementares 1 e 2, que correspondem às nossas 1ª e 2ª séries do 1º grau (N.T.).

Os resultados dessa observação estão tabulados mais adiante.

Formulamos uma série de enunciados "absurdos", baseados no modelo da "idade do comandante", e os propusemos individualmente, e por escrito, aos alunos de 7 classes de CE e 6 classes de CM (*):

1 - Tenho 9 caramelos no meu bolso esquerdo e 4 pirulitos no meu bolso direito. Qual é a idade do meu pai?

2 - Em uma pastagem há 125 carneiros e 5 cachorros. Qual é a idade do pastor das ovelhas?

3 - Em uma classe há 12 meninas e 13 meninos. Qual é a idade da professora?

4 - Um pastor cuida de 360 carneiros e tem 10 cães. Qual é a sua idade?

5 - Em um barco há 36 carneiros; 10 caíram na água, Qual é a idade do comandante?

6 - Há 7 filas de 4 carteiras na classe. Qual é a idade da professora?

Cada enunciado foi acompanhado pela pergunta:

"O que você pensa desse problema?"

Essa indagação nos permitiu constatar que alguns alunos exprimiam dúvidas sobre o problema, embora lhe desse uma resposta.

(*) CM: Curso médio. CM1 e CM2 correspondem às nossas 3ª e 4ª séries do 1º grau. (N.T.).

"É um pouco estranho."

Ou ainda:

"O comandante do barco tem 26 anos."

"Eu acho que está bem, mas não vejo qual é a relação entre os carneiros e o comandante."

Levando em consideração esse tipo de respostas, obtivemos os seguintes resultados:

	Resposta sem exprimir dúvida sobre o problema	Resposta exprimindo dúvida sobre o problema	Alegação de que não podia responder à questão	Avaliação em que não eram considerados os dados do problema	Folha em branco	Número total de alunos
CE	127	16	20	0	8	171
CM	23	13	74	5	3	118

Embora possamos notar um desvio considerável entre as respostas dos alunos de CE e as respostas dos alunos de CM - cerca de três quartos do número de crianças de CE encontraram a "idade do comandante", enquanto em CM somente um terço o tenha feito - essas proporções permanecem significativas e bem inquietantes.

Não se trata no entanto de afirmar apressadamente que os alunos não se preocupem com o enunciado.

Algumas observações nos mostram que eles de fato se aper cebem de que há algo estranho, mesmo quando fornecem uma re posta numérica.

Vejamos alguns exemplos:

- A uma classe CE2 propusemos sucessivamente os enunciados nºs 5 e 6. Num total de 28 alunos, 9 tiveram um procedime to contraditório: afirmaram que não podiam ou que não sa biam resolver o problema nº 5 mas resolveram o nº 6.

Seguem alguns exemplos de respostas desses alunos:

-	Nº 5	Nº 6
Ana	- Como posso saber a idade do comandante? - não se pode saber	- a professora tem 28 anos $\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 4 \\ \hline 28 \end{array}$
Natália	- eu não compreendo porque primeiro você falou de carneiro e depois de comandante. - eu acho que esse problema é um pouco estranho.	- eu penso que a professora tem 28 anos porque eu fiz 4 x 7 = 28 - eu acho que esse problema é muito fácil
Pedro	- por que falam de carneiros e depois perguntam a idade do comandante? - eu penso que é idiota porque falam de carneiros e depois de comandante.	- eu penso que a professora tem 28 anos porque 4 x 7 = 28 - acho que esta questão é menos boba que a outra.

- A uma criança de CE1 a quem propusemos o problema seguinte:

"Você tem 10 lápis vermelhos no seu bolso esquerdo. Que idade você tem?"

A criança respondeu: 20 anos.

Chamamos sua atenção para o fato de que ela sabia perfeitamente qual era a sua idade, e a criança respondeu: "sim, mas o erro é seu, você não me deu os números certos!"

Podemos também indagar o que leva uma criança a escolher uma determinada operação:

- que papel desempenham as palavras que as induzem?
- qual é a influência da atual aprendizagem escolar?
- que papel desempenha a verossimilhança do resultado?

Vejamos a esse respeito extrato de entrevista de um aluno CM1 (enunciado nº 2)

Depois de um tempo de hesitação.

Aluno: - Esse problema é difícil ... eu não pensei que se pudesse fazer 125 divivido por 5.

Professor: - Você poderia fazer uma adição?

Aluno: - Sim.

Professor: - Quanto você teria encontrado?

Aluno: - 120.

Professor: - Você poderia ter feito uma subtração?"

Aluno: - Encontraria 120.

Professor: - Qual é a idade do pastor?

(Silêncio)

- Por que você fez uma divisão?

(Silêncio)

Aluno: - Não sei (silêncio). Porque 125 + 5 = 130 é um pouco exagerado e 125 - 5 = 120 ainda é muito, enquanto que 125 ÷ 5 = 25 serve, mas não sei se está certo.

Professor: - Por que você está hesitando? Você não tem certeza de que é 25 anos?

Aluno: - Acho que é 25 anos.

Esses resultados nos levam a questionar sobre a maneira pela qual o enunciado de um problema é compreendido pelos alunos. Em particular, nos questionamos por que um número tão grande de crianças (127 em 171 no CE e 23 em 118 no CM) levou a sério nossos enunciados de problemas "absurdos", nas condições em que esse levantamento foi feito, isto é, em classe, e sob a forma de um trabalho escrito.

Devemos admitir que

ou esses problemas não lhes pareceram absurdos
ou as crianças não se preocupam com a pertinência dos dados em relação à questão proposta.

A segunda hipótese parece confirmar o fato de que, quando pedíamos aos alunos que inventassem problemas, verificamos que eles respeitavam sempre a coerência da forma, mas nunca a coerência lógica.

Veja-se, a título de exemplo, um caso extremo.

Trata-se de um problema, criado e resolvido por uma criança da 5ª série. Constata-se aí perfeitamente que somente as formas são respeitadas.

Esse fato nos levou evidentemente a nos questionarmos sobre quando e como se ensina às crianças a encontrar ou a procurar a lógica intrínseca do texto. Certamente é um vasto problema, e podemos abordá-lo sob numerosos ângulos. De nossa parte, começamos a refletir sobre os enunciados dos problemas, tal como aparecem nos livros didáticos. Escolhemos intencionalmente alguns enunciados de livros antigos, de livros atuais e das próprias crianças, para reproduzi-los aqui sem os distinguir quanto à sua origem.

Vejamos, paralelamente, um enunciado de criança e dois enunciados de livros didáticos (um antigo, um novo); são três "problemas-maratona", típicos.

> Dois trabalhadores em uma dia fizeram baínha em somente dois lados de três dezenas de lenços quadrados de 0,55 m de lado, e cada um deles recebeu 2 fr. Se tivessem sido pagos proporcionalmente ao trabalho feito, um teria recebido 2fr25 e o outro 1 fr75.
>
> Isto posto, pergunta-se quantos pontos fez cada trabalhador e qual o preço pago por 1.000 pontos, sabendo que há 84 pontos em 0m12 de baínha.

Você precisava de um caderno novo.

Saiu de casa às 17h15m e, depois de andar durante 9m viu que tinha se esquecido do dinheiro. Voltou para o apanhar e tornou a sair imediatamente. Esperou na papelaria 12m para ser atendido. Chegou de volta à sua casa às 18h9m.

Calcule:

a) O tempo que você perdeu por ter esquecido o dinheiro.

b) O tempo que você teria gasto para fazer o que fez, se não tivesse esquecido o dinheiro.

c) Sabendo que você andou à velocidade de 4.200km/h, a que distância de sua casa fica a papelaria.

Uma prefeitura organizou um desfile de carruagens floridas. Para uma carruagem ser enfeitada são necessárias 999 flores. Sabendo que há 15 carruagens, quantas flores serão necessárias?

Com um rolo de 1,50m por 1m podem-se fazer 11 flores. Quantos rolos serão necessários para enfeitar 15 carruagens?

Um rolo custa 3f. Para fazer 9 flores leva-se 1 hora.

Há 5 empregados que ganham 15f por hora. Qual é a despesa da prefeitura?

Que esperamos desenvolver nas crianças, usando esse tipo de enunciado (que eles próprios reproduzem)?

Para "concretizar" um modelo numérico simples (no caso uma soma algébrica), fabricam-se por vezes enunciados verbosos e embrulhados:

Um general partiu para uma expedição com 13.000 homens, deixou 600 para guardar uma pequena praça; ao mesmo tempo, recebeu um reforço de 800 homens: 450 foram obrigados a ficar no hospital; ele pedira 3.500 mas só recebeu 2.730 e deixou 1.750 em diversos postos; com quantos homens chegou ao seu destino?

Em uma empresa há 2.001 veículos, 39 precisando de revisão. 160 devem ser encaminhados para serem vendidos. Devem ser exportados para o estrangeiro 350; depois 250 devem ser pintados. Voltaram 650 veículos para conserto, mas 505 foram distribuídos.
Quantos veículos ficaram na empresa?

Não é mais a capacidade da criança de reconhecer e fazer funcionar o modelo numérico que está em jogo, mas sua capacidade de decodificar uma linguagem complicada.

Busquemos caricaturas de situações concretas:

Um príncipe, querendo recompensar uma província pelos serviços que recebeu, determinou uma diminuição de impostos de 137.790fr. A quanto importa a diminuição "per capita", se há 2 cidades de 9.000 habitantes, 6 aldeias de 350 cada uma, 12 vilas de 120 cada e 19 povoados de 75 cada?

Enfim um político que controla cuidadosamente a demografia: exatamente 9.000 habitantes por cidade, 350 por aldeia, etc.

Viva as saladas programadas com estragos também programados. A verdade é que não são dessas alfaces comuns que se compram na feira pesadas na hora, mas de aristocráticas alfaces de laboratório das quais "medimos a massa" !

Mônica comprou 3 pés de alface, pesando cada um 300 gr. De cada alface retirou 70 gr. de folhas estragadas.
Preparou uma salada com o que sobrou das 3 alfaces.
Ache a medida da massa da salada.

Pedro e Carolina são irmão e irmã de uma família de três filhos. Moram em Paris, rua Rivoli. Eles brincam fazendo um jogo sobre conjuntos. Pedro forma um conjunto e dá a Carolina a seguinte informação:

$$A = \{P,\ 7,\ \text{Celina}\ 31\}$$

Carolina forma um conjunto e dá a Pedro a informação:

$$B = \{\text{o número de nosso prédio, o nome de minha irmã, a inicial do nome do meu irmão, a idade de mamãe}\}$$

Pedro e Carolina riem; eles formaram o mesmo conjunto! Que igualdade eles podem escrever?

Você pode agora:

- Dar a idade de sua mãe
- Adivinhar o nome da irmãzinha
- Escrever o endereço completo da família
- Conhecer a inicial do nome do irmão.

Pedro e Carolina não são os únicos a rir ! ...

Complete a última frase em cada uma das seguintes:
À mesa, papai está em frente à mamãe; então ....
À mesa, papai está ao lado de Marcos; então ....

Acredita-se levar as crianças a "fazer lógica"?
Um tal enunciado mais parece próprio a incitá-los a ter imaginação !

Para medir, pregar pregos ...

Um garoto mede 1,60m. Precisa pregar um prego a uma altura de 2,45m.
Subindo numa mesa, sua cabeça chega à altura do lugar do prego. Qual é, em cm, a altura da mesa?

Vejamos finalmente, alguns exemplos de enunciados que estimulam as crianças a utilizar um modelo que não é, absolutamente, adaptado à situação proposta.

No espaço de tempo de 26 anos, os exércitos franceses obtiveram 624 vitórias; nessas condições, quantas batalhas foram vencidas cada ano?	Um tubo de 15g de pomada deu para cerca de 50 aplicações. Que massa de pomada, expressa em gramas, depois em cg foi utilizada em cada aplicação?

Antes de terminar, devemos frisar que absolutamente não é nossa intenção apresentar o problema como uma atividade inútil e ultrapassada. Os problemas cujo enunciado são do tipo clássico nos parecem ter seu lugar no ensino elementar, sob a condição de se eliminar a indumentária que os torna ridículos, como acabamos de ver nos exemplos citados.

É muito importante não nos condicionarmos a "dar ares de concreto" a um modelo matemático que queremos tornar reconhecível e aplicável pelas crianças. Devemos prestar muita atenção para que a história que se conta tenha um sentido para elas. (Algumas situações imaginárias fazem, por vezes, muito mais sentido que certos problemas ditos "concretos").

Fique bem claro que uma verdadeira aprendizagem de resolução de problemas deve ser feita sob muitas outras formas além de problemas com enunciados verbais.

A esse respeito recomendamos ao leitor os artigos e obras seguintes:

"Elem. Math. 5: Aides pédagogiques pour le CE" (paragraphe sur le problème) edição l' APMEP

"Ermel: "Cours élémentaire", edição OCDL.

"Exercices - Problèmes- Situations - Recherches" de Roland Charney; pode-se encontrar esse artigo:

- seja no ZOOM-Avant nº 4, Écoles Normales et IREM de Lyon
- seja no Grand N (nº 7), Revue pour l'enseignement des maths. à l'école élémentaire, edição de CRDP e IREM de Grenoble.

"Les problèmes à l'école élémentaire" de Jean Daniau, Grand N nº 6 ou Bulletin APMEP nº 301.

COMENTÁRIOS SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*

Jean Piaget
Tradução de Leila Alcure

A orientação que consideramos deva ser dada à educação matemática depende, naturalmente, da interpretação adotada do desenvolvimento psicológico ou de aquisição de operações e estruturas lógico-matemáticas; esta interpretação depende igualmente do sentido epistemológico dado a tais coisas, estando as questões de sua psicogênese e seu significado epistemológico intimamente relacionadas.

Se o platonismo está certo e as entidades matemáticas existem independentemente do sujeito, ou se o positivismo lógico está correto ao reduzi-los à sintaxe geral e semântica, em qualquer dos casos, seria justificável enfatizar a simples transmissão da verdade do professor para o aluno e usar, tão logo seja possível, sem se preocupar muito com as idéias espontâneas das crianças.

Nós, ao contrário, acreditamos que existe, na função de desenvolvimento da inteligência como um todo, uma gradual e espontânea construção das estruturas lógico-matemáticas elementares e que es-

(*) Texto extraído de "DEVELOPMENTS IN MATHEMATICAL EDUCATION". Editado por A.G. Howson, Cambridge University Press, 1973.

sas estruturas "naturais" ("naturais" no sentido de números naturais) estão muito mais próximas daquelas usadas na matemática moderna que daquelas usadas na matemática tradicional. Existe, por isso, uma quantidade de fatos que, em geral, são pouco conhecidos do professor, mas que, uma vez ele tenha melhor conhecimento psicológico, lhe seria de grande utilidade e o auxiliariam muito, em vez de tornar as coisas mais complicadas. Isto também favoreceria o aparecimento de vocações criativas nos alunos que não mais seriam tratados como simples "instrumentos receptores".

Contudo, para chegar a este estágio, é necessário revisar nossas idéias acerca da relação entre linguagem e ação. Parece, de fato, psicologicamente claro, que a lógica não provém da linguagem mas de fonte mais profunda e isto pode ser encontrado na coordenação geral das ações. De fato, antes de qualquer linguagem, num nível puramente sensório-motor, as ações são susceptíveis de repetição e a generalização constrói assim o que podemos chamar de esquemas de assimilação. Esses esquemas se organizam de acordo com certas leis e seria impossível negar a relação entre estas e as leis da lógica. Dois esquemas podem ser coordenados ou dissociados (reunião), um pode estar parcialmente incluído no outro (inclusão) ou possuir apenas uma parte em comum com o outro (interseção); as partes de um esquema ou a coordenação de dois ou mais esquemas podem permitir uma ordem invariante de sucessão ou certas permutações (tipos de ordens) tais como correspondência um a um, um a vários ou vários a um (bijeções, etc.) e, quando um esquema atinge a um objetivo na ação, é contraditório para o sujeito ir na direção oposta. Em resumo, existe uma lógica global da ação que conduz à construção de certas identidades e estas estão além da percepção (por exemplo a permanência do objeto escondido) e da elaboração de certas estruturas (o grupo dos deslocamentos já descritos por Poincaré em seus ensaios epistemológicos).

Concluindo, seria um grande erro, particularmente em educação matemática, negligenciar o papel das ações e permanecer a nível de linguagem. Particularmente com alunos menores a atividade com objetos é indispensável à compreensão das relações aritméticas tanto quanto das geométricas (como foi o caso da matemática empírica dos egípcios). A aversão dos professores de matemática envolvendo experimentação concreta é compreensível. Eles provavelmente vêem uma espécie de analogia às propriedades físicas dos objetos e têm medo de que as verificações experimentais arranhem o desenvolvimento dedutivo e puramente racional da mente que caracteriza a sua disciplina.

Mas, isto, de fato, é um mal entendido, e uma análise psicológica nos permite eliminar tais temores e tranqüilizar os matemáticos a respeito da sua preocupação principal de que o aspecto dedutivo e formal da mente deve ser educado. Existem, de fato, dois tipos de "experiências", uma muito diferente da outra, que estão relacionadas às ações do indivíduo.

Em primeiro lugar, existe o que chamamos "experiência física" ("in lato sensu"), que consiste em agir sobre os objetos, com a finalidade de descobrir as propriedades dos objetos em si mesmo, por exemplo, comparar pesos ou densidades, etc.

Mas existe, também, e isto geralmente é desconhecido, o que poderia ser chamada "experiência lógico-matemática"; este tipo de experiência colhe suas informações, não das propriedades físicas de objetos particulares, mas da ação real (mais precisamente de suas coordenações), obtidas pelas crianças, nos objetos — esses dois tipos de experiências não são equivalentes. Um amigo meu, conhecido matemático, diz que o começo do seu interesse pela matemática foi desencadeado pelo segundo tipo de experiência que lhe sucedeu quando tinha por volta de 4 ou 5 anos.

Sentado no jardim, ele se distraía colocando seixos em linha reta e contando-os, por exemplo,de um a dez da esquerda para a direita. Depois contava-os da direita para a esquerda e, para grande surpresa sua, ainda achou dez. Então colocou-os em círculo e, com entusiasmo, contou-os — ainda dez — então ele contou-os na direção oposta e achou dez nas duas direções. Começou assim a arrumá-los de todas as maneiras e acabou por convencer-se de que o total, dez, era independente da ordem dos seixos. É evidente que nem o total nem a ordem são propriedades físicas dos seixos, até o momento em que a criança realmente os arrumou ou colocou-os todos juntos. Neste instante a criança descobriu que a ação de reunir os seixos dá resultados e que esses são independentes da ação de ordenar os seixos. Ele poderia ter observado isto com qualquer sólido uma vez que, nesta ação as propriedades físicas dos seixos não desempenham nenhum papel particular (a par o fato de eles deixarem-se ser manipulados; sua natureza, contudo, permanece inalterada, isto é, é conservada, mas conservação também provém da experiência lógico-matemática).

Este é o papel inicial das ações, e experiência lógico-matemática, longe de impedir o desenvolvimento posterior do pensamento dedutivo, constitui, ao contrário, uma preparação necessária, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais, que intervêm no processo subseqüente de raciocínio dedutivo, provêm elas mesmas da ação; elas são ações interiorizadas, e quando essa interiorização, com as coordenações que supõe for suficiente, a experiência lógico-matemática, sob forma de ações materiais, não mais é necessária e a dedução interiorizada é suficiente. A segunda razão é que coordenações de ações e experiência lógico-matemática, quando se interiorizam, dão origem à criação de uma particular espécie de abstração que corresponde precisamente à abstração lógico-matemática: ao contrário da abstração comum ou Aristotélica, cujas fontes têm origem nas propriedades físicas dos objetos, e por essa razão é chamada "abstração empírica", a abstração lógico-matemática pode ser chamada de "abstração reflexiva" e isto por duas razões. Por um lado esta abstração "reflete" (no mesmo sentido que um refletor ou um projetor) tudo que estava em um plano mais baixo (por exemplo o da ação) e o projetor em um plano superior, o do pensamento ou representação mental. Por outro lado, é uma "abstração reflexiva" no sentido de uma reorganização da atividade mental, na medida em que reconstrói, num plano mais alto, tudo o que foi construído a partir das coordenações de ações.

Contudo, entre a idade em que as ações concretas e a experiência lógico-matemática são necessárias (antes dos 7/8 anos) e a idade em que os pensamentos abstratos começam a ser possíveis (por volta dos 11/12 anos e através de sucessivos níveis até cerca de 14/15 anos) há um importante estágio cujas características são interessantes ao psicólogo e úteis ao professor saber. De fato entre 7 e 11/12 anos um desenvolvimento espontâneo importante das operações dedutivas, com suas características de conservação, reversibilidade, etc.,pode ser observado. Isto permite a elaboração elementar da lógica de classes e de relações, a construção operacional da série de números naturais pela síntese das noções de inclusão e ordem, a construção da noção de medida pela síntese da subdivisão de um contínuo, e o deslocamento ordenado de uma parte escolhida que serve de unidade, etc.

Apesar de ser um progresso considerável no pensamento lógico da criança, isto é limitado. Nesta idade a criança ainda não pode raciocinar sobre hipóteses puras, expressas verbalmente, e com o objetivo de chegar a uma dedução correta, ela necessita utilizar seu raciocínio para manipular objetos (no mundo real ou em sua imaginação). Por estas razões, neste nível nos referimos a "operações concretas" como distintas das operações formais. Estas operações concretas são, de fato, intermediárias entre as ações do estágio pré-operacional e o estágio do pensamento abstrato que virá mais tarde.

Assim,tendo estabelecido a continuidade entre as ações espontâneas da criança e seu pensamento reflexivo, pode ser visto que as noções essenciais que caracterizam a matemática moderna estão mais próximas das estruturas do pensamento "natural" que os conceitos usados na matemática tradicional. Primeiro, a importância deve ser colocada no papel espontâneo das operações que permitem estabelecer correspondências entre conjuntos e (deste modo) a construção de morfismos e em particular quando puderem ser combinadas com seqüências recorrentes. Pedimos, por exemplo, com B. Inhelder, a crianças entre 4/5 anos e 7/8 anos para colocarem com uma das mãos uma conta em um cilindro transparente e, simultaneamente com a outra, uma conta em outro cilindro, mas que foi escondido atrás de uma tela. São feitas perguntas a fim de descobrir se a criança percebe que os dois conjuntos então formados, são equivalentes e, também, se percebe que, se a ação for repetida indefinidamente, a igualdade será mantida. Todas as crianças questionadas admitiram a igualdade dos dois conjuntos enquanto a ação estava se desenvolvendo, contudo as crianças menores se recusavam a generalizar no caso de a ação se repetir indefinidamente. De 5 ou 6 anos em diante ~~eles~~ admitem essa generalização e um garoto de 5 anos e meio encontrou uma fórmula interessante: "Quando a gente conhece uma vez conhece sempre". Contudo esse mesmo garoto depois de ter visto um conjunto de 10 contas vermelhas em correspondência biunívoca com 10 contas azuis recusou admitir a conservação da equivalência quando um dos conjuntos foi espaçado e a correspondência não estava mais visível. Este exemplo demonstra o papel construtivo de estabelecer uma correspondência combinada com a idéia de recorrência.

Um exemplo bem marcante da convergência entre a teoria e o desenvolvimento espontâneo da criança é o das intuições geométricas. Historicamente, essas intuições aparecem na geometria Euclideana, as estruturas da geometria projetiva só foram descobertas muito mais tarde e a topologia só no século XIX. Psicologicamente crianças de 3 e 4 anos que ainda não sabem desenhar quadrados e tendem a compará-los com os círculos — formas tais como retângulos e triângulos, etc., sendo assimiladas como formas fechadas simples — tomam muito cuidado, contudo, em distinguir figuras abertas das fechadas, e têm mais capacidade de desenhar com cuidado um círculo dentro de uma figura, fora de uma figura, ou na fronteira de uma figura grande.

Destas intuições topológicas nascem, mais tarde e, simultaneamente, noções projetivas e noções euclideanas, de acordo com um processo que está mais perto da teoria psicológica que da história.

A partir do nível de operações concretas – por volta de 7/8 anos – outra convergência interessante pode ser encontrada, que é a equivalência elementar das três "estruturas mães" descobertas por Bourbaki e isto por si só mostra o caráter natural dessas estruturas. Primeiro, há a construção das estruturas de natureza algébrica uma vez que suas leis de composição têm um inverso e um elemento identidade + A - A = 0 . Isto pode ser observado particularmente no sistema de classes lógicas(classificações, etc. com quantificação da inclusão A < B se B = A + A' e nenhum é vazio). Em segundo lugar podem ser encontradas estruturas cujas leis de composição estão baseadas na reciprocidade, e isto caracteriza o sistema de relações. Finalmente, podem ser observadas estruturas topológicas baseadas nas idéias de continuidade, vizinhança e separação. Estas estruturas elementares mais tarde se combinam umas com as outras. Em particular, inversões (ou negações (- A)) e reciprocidades, que não se combinam umas com as outras no nível operacional concreto, podem ser combinadas a partir do nível formal 11/12 em diante, em quatro grupos que possibilitam essas combinações: neste caso, o início da lógica proposicional com o sistema combinatório (conjunto de todos os subconjuntos) superpõe-se às estruturas elementares da lógica das classes e das relações. O indivíduo está então capaz de manejar sistemas que têm quatro transformações. Tomemos, por exemplo, a operação proposicional p q e definamos as quatro transformações.

1. (I) A identidade ou transformação "nula"

$$I(p \supset q) = p \supset q$$

2. (N) A transformação inversa $N(p \supset q) = p \wedge \tilde{q}$

3. (R) A transformação recíproca $R(p \supset q) = q \supset p$

4. (C) A transformação correlativa $C(p \supset q) = \tilde{p} \wedge q$

Neste caso RC= N, RN= C, NC= R, NRC= I, o que, finalmente, assegura a coordenação em um único sistema de inversões e reciprocidades.

Muitos outros exemplos podem ser dados, em particular a construção das formas elementares e "triviais" de categorias. Contudo é chegado o momento de descrever como essas convergências entre o pensamento espontâneo da criança e o seu desenvolvimento "natural" e certas noções teóricas fundamentais podem ser utilizadas pelo professor.

Pode suceder, é claro, que algumas pessoas tentem ensinar a crianças pequenas a matemática moderna com métodos arcaicos, baseados, exclusivamente, na transmissão verbal do professor para o aluno com o uso de uma formalização precoce. Com tais métodos seríamos compelidos a um certo número de fracassos, o que explica o ceticismo de alguns grandes matemáticos, como J. Leray. Contudo, a falha, não é o caráter moderno dos programas de matemática, mas a metodologia e a psicologia usadas em tais casos. De fato, freqüentemente, é especialmente difícil para o professor de matemática, que, por causa da sua profissão, tem um tipo de pensamento muito abstrato, colocar-se ele mesmo em uma perspectiva concreta que é necessária para os alunos pequenos. Contudo, do ponto de vista do desenvolvimento e em relação à assimilação das estruturas já mencionadas, parece não haver contradição (como vimos acima) entre as fases concretas iniciais das estruturas e o estágio final quando se tornam formais e abstratas. O professor só pode estar consciente de que não há contradição entre esses dois níveis de pensamento se ele estiver plenamente informado (e aí reside a dificuldade para o professor) sobre os detalhes e funcionamento dessas estruturas sucessivas do pensamento espontâneo. Em resumo, o problema prático que é difícil resolver é enxertar esses tipos de noções gerais que o professor entende em sua linguagem no caso particular dessas mesmas noções construídas e utilizadas pelas crianças, sem que estas tenham sido objeto de reflexão e fontes de generalização por ~~parte deles~~.

Com o objetivo de fazer a necessária conexão entre as estruturas lógico-matemáticas do professor e as dos alunos em diferentes níveis de seu desenvolvimento, deveriam ser, talvez, mencionados alguns princípios psico-pedagógicos gerais. O primeiro é que a real compreensão de uma noção ou teoria implica na re-invenção desta teoria pelo sujeito. Quando a criança é capaz de repetir certas noções e utilizar algumas delas em situações de aprendizagem ela, muitas vezes, dá a impressão de ta que é necessária para os alunos pequenos. Contudo, do ponto de vista do desenvolvimento e em relação à assimilação das estruturas já mencionadas, parece não haver contradição (como vimos acima) entre as fases concretas iniciais das estruturas e o estágio final quando se tornam formais e abstratas. O professor só pode estar consciente de que não há contradição entre esses dois níveis de pensamento se ele estiver plenamente informado (e aí reside a dificuldade para o professor) sobre os detalhes e funcionamento dessas estruturas sucessivas do pensamento espontâneo. Em resumo, o problema prático que é difícil resolver é enxertar esses tipos de noções gerais que o professor entende em sua linguagem no caso particular dessas mesmas noções construídas e utilizadas pelas crianças, sem que estas tenham sido objeto de reflexão e fontes de generalização por parte deles.

Com o objetivo de fazer a necessária conexão entre as estruturas lógico-matemáticas do professor e as dos alunos em diferentes níveis de seu desenvolvimento, deveriam ser, talvez, mencionados alguns princípios psico-pedagógicos gerais. O primeiro é que a real compreensão de uma noção ou teoria implica na re-invenção desta teoria pelo sujeito. Quando a criança é capaz de repetir certas noções e utilizar algumas delas em situações de aprendizagem ela, muitas vezes, dá a impressão de compreender; contudo isto não preenche a condição de re-invenção. A verdadeira compreensão se manifesta através de aplicações espontâneas: em outras palavras, uma generalização ativa supõe muito mais: parece que o sujeito é capaz de descobrir por si só as verdadeiras razões *que envolvam a compreensão* da situação e, por conseguinte, re-inventá-la, pelo menos parcialmente.

Evidentemente, isto não significa que o professor não tenha mais papel a desempenhar, mas este é menos o de uma pessoa que dá "lições" e mais de alguém que organiza situações que despertarão a curiosidade e a procura da solução pela criança, e que manterá tal comportamento através de meios adequados.

Se uma criança tiver dificuldades em suas tentativas de captar certa idéia, o procedimento de uma metodologia ativa não será corrigi-lo diretamente, mas sugerir determinados contra-exemplos, tais que as novas explorações da criança conduzam-na a corrigir-se a si mesmo.

Uma segunda consideração deve estar, constantemente, presente na mente do professor: de que, em todos os níveis, inclusive na adolescência e de uma maneira sistemática nos níveis mais elementares, o aluno estará, muito mais capaz de "fazer" e "entender com ações" do que expressá-las verbalmente. Em outras palavras, um grande número das estruturas que a criança utiliza, quando está resolvendo ativamente um problema permanece inconsciente. De fato, é uma lei psicológica geral que a criança pode fazer algo em ação muito antes de se tornar consciente do que se passa — "a consciência" ocorre muito depois da ação. Em outras palavras, a pessoa possui mais possibilidades intelectuais do que os que utiliza conscientemente. Conseqüentemente, quando o professor tiver tido a oportunidade de se familiarizar com a pesquisa psicológica mencionada acima, e conhecer como se processem as estruturas do pensamento da criança, pode mais facilmente ajudar a criança a tornar-se consciente delas por meio de discussões apropriadas entre ele e a criança, ou pela organização de trabalho em grupo onde parceiros da mesma idade ou idades próximas (uma criança mais velha atuando como líder de grupos pequenos) discutam entre eles, o que, por sua vez, favorece a verbalização e a "conscientização".

Uma terceira observação, parece-nos importante: em Matemática tradicional, muitas vezes é exigido à criança resolver uma quantidade de problemas, alguns absurdos, e isto significa um número enorme de cálculos numéricos e métricos. Neste caso, a única maneira de sermos bem sucedidos com crianças que não são particularmente bem dotadas para a Matemática é proceder em dois estágios (mas is