bre matemática.

Ex.: losangulo, abissixa, abituso, entre outros.

c) Foi curioso observar que, de maneira geral, os alunos se limitaram a grifar as palavras desconhecidas ou simplesmente escrever "não sei". Fizeram algumas observações dignas de serem transcritas aqui, tal como foram encontradas nas provas:

- Não gosto de geometria.
- Tenho dificuldade em geometria.
- Não gosto de geometria, por isso não posso me aprofundar nela. Não posso responder (questões 22 e 23).
- Não me lembro de nenhum triângulo.
- A área de um quadrado é sempre a metade da área de um triângulo. (A razão eu não sei).
- Não sei o que é razão. Tive pouca geometria no 1^{º} grau.
- Eu queria saber todas as justificativas e o modo de fazer desde o quadrilátero (grifo do aluno)
- Sim porque os ângulos de um $\triangle$ é 190^{o}.

IV - Diante dos resultados obtidos pelo teste preocupamo-nos com:

a) A cada palavra nova, explicar o seu significado e escrevê-la na lousa.

b) Usar material concreto como:

- isopor
- varetas (de churrasco, de aeromodelismo)
- papel vegetal

e recursos visuais:

- retro projetor
- modelos
- quadros sinóticos

V - Curso desenvolvido

Começamos por dar as noções de geometria do espaço a partir da geometria plana.

Assim, os postulados foram vistos inicialmente no plano e "descobrimos" com os alunos que mudanças ocorreriam se estivéssemos no espaço. Ex.:

a) Existem postulados que não se modificam:
Por um ponto do plano passa uma infinidade de retas

- E no espaço? O que acontece?
(Este é um momento oportuno para se discutir o conceito de infinito).

b) Existem postulados que são duais, isto é, podemos substituir as palavras reta por plano.

- No plano: Por um ponto, fora de uma reta passa uma única reta paralela a primeira reta.
- No espaço: "Por um ponto fora do plano passa um único plano paralelo ao primeiro plano.

Exemplos do uso de material concreto:

a) Com uma placa de isopor(considerada como representação do plano) e uma vareta (como representação da reta) pedi mos aos alunos, por exemplo: "Observem as posições relativas que a "vareta" pode ocupar em relação à placa e enuncie os resultados obtidos." Após a comparação das respostas foi feito com os alunos um quadro dos resultados obtidos.

Plano e reta	pontos em comum	
	0	reta e planos paralelos
	1	a reta "fura" o plano (intercepta).
	2	todos os pontos da reta estão no plano (contida).

Outro exemplo:

b) Tomem duas placas de isopor. Coloquem uma sobre a mesa e segurem a outra, de forma que fiquem paralelas. Furem a 1ª com a vareta numa posição qualquer. Observem o que acontece.

Furem, agora, perpendicularmente a um deles. Observem o que acontece. Enuncie o resultado obtido.

Por meio das respostas dos alunos chegou-se aos enunciados.

Se dois planos são paralelos, uma reta que "fura" um deles fura o outro.

- uma reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

c) Com auxílio do retro-projetor comparamos com os alunos situações reais com a sua representação no plano.

- Consideramos a placa do retro-projetor como um plano e a vareta como reta.

Dirigimos o foco de luz para o teto e uma parede e colocamos a vareta em diversas posições; observando a posição real da reta e a sua projeção discutiu-se com os alunos como deveria ser feita a representação no plano.

- Quando se colocou a vareta sobre a placa do retro-projetor com verdadeiro espanto, os alunos observaram:

- "Uê! a "reta" "quebrou".

Chamamos a atenção, então, para o fato de que a reta estava sendo projetada em 2 planos "distintos" e portanto a projeção dava 2 retas com um <u>único ponto</u> em comum, em 2 planos distintos.

Movimentamos a vareta de modo que ela fosse assumindo a posição da reta interseção dos dois planos e conseguimos, então, com os alunos o seguinte enunciado:

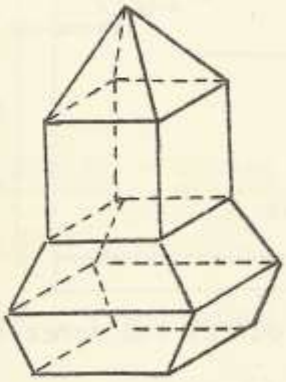
> "Se dois planos têm um ponto comum, têm uma reta comum."

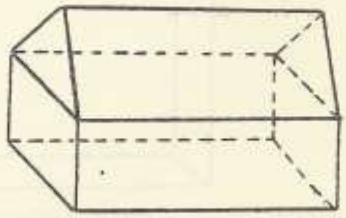
Outras situações podem ser analisadas mudando o "foco", por exemplo, focalizando o encontro das paredes com o teto e discutir o problema das retas reversas.

- CONSTRUÇÃO DE MATERIAL

Com a construção de material, surge uma boa oportunidade de se conquistar alunos que não têm uma boa compreensão de Matemática. À medida que começam a discutir os problemas, com base no material construído, passam a se interessar pelo estudo. Torna-se mais fácil a visualização dos entes geométricos, como por exemplo, retas reversas, tanto no modelo como na sua representação.

Pedimos, aos alunos, que construíssem cubos, paralelepípedos, cilindros e outros modelos, como por exemplo:



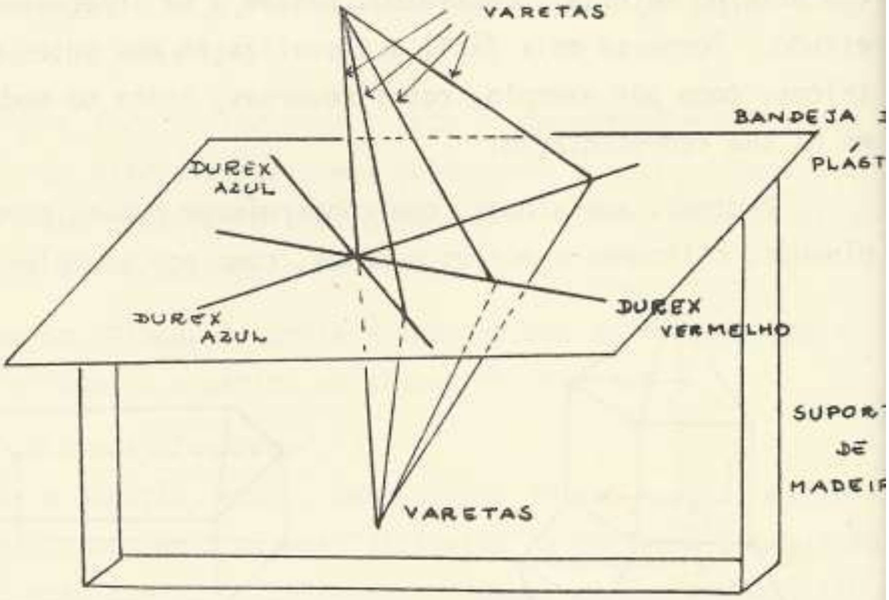


NOTA: As construções dos sólidos fazem parte do programa de Matemática do 4º ano do 1º grau. Estamos tranqüilos afirmando que a maioria dos alunos não foi solicitada a fazê-lo, porém nos parece que em alguns colégios é dado em Artes.

Ainda levando em conta a necessidade da construção para a visualização de teoremas fizemos o seguinte.

Seguindo os "passos" para demonstração um aluno construiu um modelo, concretizando o teorema: "Se uma reta "a" fura o plano α em A e é perpendicular a duas retas de α

que passam por A, ela é perpendicular a α .



<u>NOTA</u>: As varetas eram presas umas às outras com durex incolor.

Baseando-nos neste modelo, mandamos construir um outro, em acrílico, desmontável e de mais fácil manuseio.

Este trabalho foi apresentado na 5ª CIAEM, realizada em Campinas.

Dada a grande aceitação por parte de professores presentes e a sugestão de alguns, revolvemos apresentar o trabalho, neste artigo. Não considerando que seja um trabalho perfeito e acabado continuamos no estudo e pesquisa de como melhor ensinar a Geometria. Esperamos que esta publicação leve nossos colegas a nos auxiliarem e mandarem suas sugestões e críticas visando a melhoria de nosso trabalho.

CONTINUAÇÃO DOS MÓDULOS INSTRUCIONAIS: DERIVADAS
(iniciado no Boletim 9)*

Estela Kaufman Fainguelernt

5.2 - FICHA II

Cálculo das derivadas

A. CONHECER AS REGRAS DE DERIVAÇÃO

A.1 - Preliminares

A.1.1 - Recordando o que foi visto na ficha I, segue-se:

Derivar as seguintes funções:

a) $y = 2 - 3x$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$y + \Delta y = [2 - 3(x + \Delta x)]$$
$$\Delta y = [2 - 3(x + \Delta x)] - y$$
$$\Delta y = [2 - 3(x + \Delta x)] - (2 - 3x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[2 - 3(x + \Delta x)] - (2 - 3x)}{\Delta x}$$

(*) Esses módulos foram escritos para utilização na disciplina de Nivelamento em Matemática do Curso de Técnicos em Transporte Marítimo-Petrobrás, dado sob a supervisão do GEPEM, em abril de 1977.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 - 3x - 3\Delta x - 2 + 3x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\,x}{\Delta x} = -3$$

b) $y = ax^2$

$y + \Delta y = a\,(x + \Delta x)^2$ donde $\Delta y = a\,(x + \Delta x)^2 - y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\,(x^2 + 2\,x\,\Delta x + \Delta x^2) - ax^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 + 2a\,x\,\Delta x + a\Delta x^2 - ax^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2a\,x\,\Delta x + a\Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\,x\,\Delta x + a\Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2ax + a\Delta x)}{\Delta x} = 2ax$$

A.2 - CONCLUSÃO

A.2.1 - Regra geral de derivação:

seja $y = f\,(x)$

então: 1: $y + \Delta y = f\,(x + \Delta x)$

2: $\Delta y = f\,(x + \Delta x) - y$

ou $\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f\,(x)$

3: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\ (x + \Delta x) - f\ (x)}{\Delta x}$

4: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\ y}{dx} & \text{(Leibnitz)} \\ y' & \text{(Newton)} \\ f'\ (x) & \text{(Lagrange)} \end{array} \right\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x\ \ + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

B. ÁLGEBRA DAS DERIVADAS

B.1 - Preliminares

B.1.1 - Consideremos a função constante

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por } f\ (x) = c$$

a) Utilizando a regra geral de derivação dada em A.2.1, a derivada da função constante é ____________________

b) Qual é o valor da derivada da função constante para todo $x \in \mathbb{R}$?

B.1.2 - Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f\ (x) = ax + b$; utilizando raciocínio análogo ao exercício B.1.1. Calcule:

a) a derivada da função $f\ (x) = ax + b$.

b) Aplique o resultado obtido no item a para as funções:

$f(x) = 5x + 4 \implies f'(x) =$ ______________

$f(x) = 6 - 2x \implies f'(x) =$ ______________

B.2 - CONCLUSÃO

B.2.1 - As fórmulas de derivação são deduzidas usando a regra geral de derivação.

B.2.2 - Fórmulas de derivação

1. Função constante:

$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ onde $c \in \mathbb{R}$, c é constante.

Exemplo: $f(x) = 5 \Longrightarrow f'(x) = 0$

2. Função afim:

$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$ onde $a, b \in \mathbb{R}$

Exemplo:

$f(x) = -4x + 8 \Rightarrow f'(x) = -4$

3. Função potência (expoente natural)

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$

Exemplo:

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

<u>Observação</u>: Pode-se provar que dada a função u (x) derivável no ponto x.

$$f(x) = \left[u(x)\right]^n \Rightarrow f'(x) = n\,u^{n-1}(x).\,u'(x)$$

Exemplo: $f(x) = (2x^2 + 4)^2$

$f'(x) = 2\,(2x^2 + 4).\,4x$

4. <u>Função soma</u>:

Sejam U (x) e V (x) duas funções deriváveis no ponto x; a função soma também é derivável no ponto x; sua derivada é:

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Exemplo: $f(x) = x^2 + 3x$

$f'(x) = 2x + 3$

Esta propriedade se estende a uma soma de funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x), \ldots, f_n(x)$ deriváveis no ponto x, isto é:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots f_n(x) \Rightarrow f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$

Exemplo:

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 + 9x^2 + 8x + 2$$

5. Função produto:

Sejam u (x) e v (x) duas funções deriváveis em x. A função produto $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ também é derivável no ponto x; sua derivada é:

$$f'(x) = u.v' + u'v$$

Em particular, se $f(x) = c\, v(x)$, onde c é uma constante real e v (x) é uma função derivável em x, então

$$f(x) = c \cdot v(x) \implies f'(x) = c \cdot v'(x)$$

Exemplo:

$f(x) = 5x^2 \implies f'(x) = 5 \cdot (2x) = 10x$

$f(x) = (x^2 + x + 1)^5 \implies f'(x) = 5 \cdot (x^2 + x + 1)^4 \cdot (2x + 1)$

6. Função quociente:

Sejam u (x) e v (x) duas funções deriváveis no ponto x, sendo $v(x) \neq 0$. A função quociente $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ também é derivável no ponto x e sua derivada é

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Pode-se provar.

Exemplos:

1) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0.x - 1.1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$x \neq 0$

2) $f(x) = \frac{2x}{x+1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x(1)}{(x+1)^2} =$

$= \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$x \neq -1$

7. Funções trigonométricas

Pode-se provar que:

$$f(x) = \text{sen } x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\text{sen } x$$

Aplicações:

$f(x) = \text{tg } x$, donde $f(x) = \frac{\text{sen } x.}{\cos x}$ Calculando a derivada do quociente, temos:

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \text{sen } x \Rightarrow u' = \cos x \\ v = \cos x \Rightarrow v' = -\text{ sen } x \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v_2} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (relações trigonométricas fundamentais)

donde

$$f(x) = \text{tg } x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

Pelo exemplo, conclui-se que as derivadas das demais funções trigonométricas decorrem das derivadas das funções sen x e cos x.

8. Função exponencial

Dada a função $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, $a \neq 1$, pode-se provar que:

$$f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \log_e a$$

Exemplo:

1) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \log_e e = e^x$, pois $\log_e e = 1$

2) $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \log_e 2$

Observação: Seja u (x) uma função derivável no ponto x.

$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x)\ a^u \cdot \log_e a \cdot u'$

$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = e^u \cdot u'$

9. Seja $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} =$

$= \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ em particular, seja u (x) uma função derivável no ponto x.

$$f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Exemplos:

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

10. Função composta

Sejam $y = f(x)$ e $z = g(y)$ duas funções tais que $y = f(x)$ é derivável no ponto x e $z = g(y)$ é derivável no ponto $y = f(x)$.

Pode-se provar para derivada da função composta:

$F(x) = g[f(x)] \Rightarrow F'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$ ou, usando a notação de Leibnitz, $F'(x) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Exemplos:

1) $F(x) = \text{sen } x^2$

$y = x^2$ e $z = \text{sen } y$; então

$$F'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \ (\cos y).(2x) = 2.x.\cos x^2$$

2) $F(x) = e^{4x}$

$y = 4x$ e $z = e^y$

$$F'(x) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \cdot 4 = 4.e^{4x}$$

11. Função Logarítmica

$$f(x) = \log_a x \quad \text{onde } a > 1$$

Pode-se provar que:

a) $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$

b) $f(x) = \log_a u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} \log_a e$ onde $u(x)$ é uma função derivável no ponto x.

c) $f(x) \log_e x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \log_e u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$.

Observação: o logaritmo neperiano de um número indica-se por $\log_e x$ ou $\ln x$.

Exemplos:

1) $f(x)\ 2 \log (4.x^3) = \log 4 + \log x^3 = (\log 4) + (3 \log x)$

donde $f'(x) = \frac{3}{x} \log e.$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ $\qquad v = x \Rightarrow v' = 1$

12. Função inversa:

Consideremos a função $y = f(x)$ bijetora num intervalo J, derivável no ponto $x \in J$ onde $f'(x) \neq 0$. Portanto, existe a função inversa $x = f^{-1}(y)$ que é derivável no ponto y tal que

$y = f(x)$; sua derivada é:

$$x = f^{-1}(y) \Rightarrow \left[f^{-1}(y) \right] = \frac{1}{f'(x)}$$

Exemplos:

1) Inversa da função sen x

A função $y = \text{arc sen } x$, definida em $E = [-1, 1]$, tem as imagens em $F = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; esta função é a função inversa de $x = \text{sen } y$.

$$x' = \frac{dx}{dy} = \cos y \neq 0 \quad \text{em} \quad \left] \frac{-\pi}{2} \, , \; \frac{\pi}{2} \right[$$

logo

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

13. Função potência: (expoente real)

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , \text{ onde } \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}$$

pode-se provar que:

$$f(x) = x^{\alpha} \Rightarrow f'(x) = \alpha \, . \, x^{\alpha - 1}$$

Exemplos:

1) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \, . \, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $f(x) = x^{3/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} \, . \, x^{3/4 - 1} = \frac{3}{4} \, x^{-1/4} =$

$= \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

14. Derivadas sucessivas

Seja a função f (x) contínua em um intervalo J e derivável em um intervalo $J_1 \subset J$.

Em J_1 fica definida a função $f'(x)$, denominada derivada primeira de $f(x)$.

Se a função $f'(x)$ é derivável em um intervalo $J_2 \subset J_1$, fica definida em J_2 a função $f''(x)$, denominada derivada segunda de $f(x)$.

Repetindo o processo, podemos definir a derivada terceira, quarta, etc., de $f(x)$.

$f^{(n)}(x)$ é a função derivada de ordem n de $f(x)$.

Exemplo:

- Determinar todas as derivadas de $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{iv}(x) = 0$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ para todo } n \geq 4$$

B.2.3 - Vejamos um exemplo, de como se calculam as derivadas laterais de uma função.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 1|$; calcular as derivadas laterais dessa função no ponto $x = 1$,

Notemos que $f(x)$ é definida por:

$$f(x) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

se $-1 < x < 1$, $\quad f'(x) = -2x$

se $x > 1$, $> f'(x) = 2$, então

$$f'_-(1) \lim_{x \to 1_-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (-2x) = -2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{d(1 - x^2)}{dx}$$

Analogamente

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1_+} \frac{f(x) - f(1)}{} = \lim_{x \to 1_+} \frac{d(x_2 - 1)}{dx}$$

$$\lim_{x \to 1_+} (2x) = 2$$

Notemos que $f(x)$ não é derivável no ponto $x = 1$, pois os limites laterais acima existem e são diferentes.

62 - GRUPO II

1) Determinar a função derivada das seguintes funções usando resultados dados na Ficha II.

a) $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2$

b) $y = (x^2 + 1)^4$

c) $y = 4\ (2x^2 - x - 1)^3$

d) $y = x.\text{sen}\ x + \cos\ x$

e) $y = \frac{1}{x^2}$

f) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

g) $y = \frac{e^x}{x}$

h) $y = \text{sen}\ 5x$

i) $y = \cos\ (\text{sen}\ x)$

j) $y = x + x$

k) $y = 1 + x$

l) $y = e^{x^3}$

m) $y = \log\ (4x^3)$

0) $y = 2^{-x}$

2) Seja a função $f(x) = |x|$, definida em $\mathbb{R}$

Calcular a derivada de $f(x)$ nos pontos -3, 0, 2 e x_0.

3) Verificar se a função $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x + 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

é derivável no ponto $x = 2$

4) Encontrar as três primeiras derivadas sucessivas de

a) $y = x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

b) $y = \left[-\frac{1}{x}\right]^2$

GABARITO

7.2 - FICHA II

A -

A.1.1 - resolvido no texto.

B -

B.1.1

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$; segue-se que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

b) A função derivada da função constante assume o valor zero para todo x real.

$$\boxed{f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0}$$

B.1.2 -

a) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$; segue-se que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[a(x + \Delta x) + b] - (ax + b)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax + a\Delta x - ax - b}{\Delta x} \quad \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

isto é

$$\boxed{f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a}$$

b) $f(x) = 5x + 4 \Rightarrow f'(x) = 5$

$f(x) = 6 - 2x \Rightarrow f'(x) = -2$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS

B.2 - GRUPO II

1) a) Aplicamos a derivada da função produto e da função soma.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x^3)}{dx} + \frac{d(4x^2)}{dx} - \frac{d(5x)}{dx} - \frac{d(2)}{dx} \quad \text{portanto}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 8x - 5$$

$$y' = 6x^2 + 8x - 5$$

b) Aplicamos o item 3 de B.2.2 - da Ficha II.

Em $y = (x^2 + 1)^4$ temos $n = 4$ e $u = x^2 + 1$

então:

$$\frac{dy}{dx} = 4.\ (x^2 + 1)^3\ \frac{d\ (x^2 + 1)}{dx} = 4\ (x^2 + 1)^3\ (2x)\ =$$

$$= 8x\ (x^2 + 1)^3$$

$$y' = 8x\ (x^2 + 1)^3$$

c) Temos $u = 2x^2 - x - 1$ e $n = 3$ então

$$\frac{dy}{dx}\ 4.3\ (2x^2 - x - 1)^2\ \frac{d\ (2x^2 - x - 1)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\ 4.3\ (2x^2 - x - 1)^2\ (4x - 1) = 12\ (2x^2 - x - 1)^2 (4x -$$

$$y' = 12\ (4x^2 - x - 1)^2\ (4x - 1)$$

d) Aplicando a derivada da soma e a derivada do produto:

$$\frac{dy}{dx}\ \frac{d\ (x \operatorname{sen} x)}{dx}\ \frac{d\ (\cos x)}{dx}\ \frac{(\operatorname{sen} x)}{dx}\ \frac{d\ (x)}{dx}\ .\ (\operatorname{sen} x) +$$

$$+ \frac{d\ (\cos x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = x \cos x$$

$$y' = x \cos x$$

As funções e, f, g, são quocientes de outras duas funções; então aplicaremos o item 6 de B.2.2. Ficha II.

e) $y = \dfrac{1}{x^2}$

$u = 1, \quad \dfrac{du}{dx} = 0, \quad v = x^2, \quad \dfrac{dv}{dx} = 2x$ então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.x^2 - 1.2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$y' = \frac{-2}{x^3}$$

f) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$u = 2x, \; \dfrac{du}{dx} = 2, \; v = x^2 + 1, \; \dfrac{dv}{dx} = 2x$ então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2.(x^2 + 1) - 2x.\,2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

g) $y = \dfrac{e^x}{x}$

$u = e^x, \; u' = e^x, \; v = x, \; v' = 1$ então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x.x - e^x.1}{2^x} = \frac{e^2\,(x - 1)}{x^2}$$

$$y' = \frac{e^x\,(x - 1)}{x^2}$$

As funções h, i são funções compostas; então aplicaremos o item 10 de B.2.2, Ficha II.

h) $y = \text{sen } 5x$

$u = 5x$ e $v = \text{sen } u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ (\text{sen } u)}{du} \cdot \frac{d\ (5x)}{dx} = (\cos u).5 = 5 \cos 5x$$

$y' = 5.\ \cos 5x$

i) $y = \cos\ (\text{sen } x)$

$u = \text{sen } x \qquad v = \cos u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ (\cos u)}{du} \cdot \frac{d\ (\text{sen } x)}{dx} = (-\ \text{sen } u)\ .\ \cos x =$$

$y' = -\ \text{sen}\ (\text{sen } x).\ \cos x.$

j) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ \sqrt{x}}{dx} + \frac{d\ \sqrt{x}}{dx} = \frac{d\ x^{1/2}}{dx} + \frac{d\ x^{1/3}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2\ -\ 1} + \frac{1}{3} \cdot x^{1/3\ -\ 1} = \frac{x^{-\ 1/2}}{2} - \frac{x^{-\ 2/3}}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

k) $y = \sqrt{1 + x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(1+x)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}\,(1+x)^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

m) $y = e^{x^3}$

$u = x^3$, $y = e^u$; pelo item 8 de B.2.2, Ficha II,

Temos:

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{d\,(x^3)}{dx} = e^{x^3} \cdot (3x^2) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$$

$$y' = 3x^2 \cdot e^{x^3}$$

n) $y = \log\,(4x^3)$; pelo item 11 de B.2.2, Ficha II.

temos:

$$y' = \log u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\,\log e$$

$$u = (4x^3) \quad \text{donde} \quad y = \log u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2}{4x^3} \cdot \log e = \frac{3}{x}\,\log e$$

o) $y = 2^{-x}$; pelo item 8 de B.2.2 ficha II.

temos:

$y = a^u \qquad y' = a^u \log_e a . u'$

$u = -x$

$y = 2^u \quad \frac{dy}{dx} = 2^{-x} \log_e{}^2 . (-1)$

$\frac{dy}{dx} = 2^{-x} . \log_e{}^2 = -2^{-x} . \ln 2$

$y' = -2^{-x} . \ln 2$

2) $f'(-3) = \lim_{x \to -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{|x| - |-3|}{x + 3} = -1$

$\exists$, $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad \nexists$

$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{|x| - |2|}{x - 2} = \exists$

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$

$$\text{temos} \begin{cases} \text{se } x_0 > 0, \text{ temos } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \\ \text{se } x_0 < 0, \text{ temos } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1 \end{cases}$$

Observação:

$f(x) = |x|$ é derivável em qualquer ponto

$x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, isto é para todo $x_0 \neq 0$ real.

vemos que $\begin{cases} f'(x_0) = 1 & \text{se } x_0 > 0 \\ f'(x_0) = -1 & \text{se } x_0 < 0 \end{cases}$ portanto, existe

uma função $f'(x)$ que associa a cada $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$
o número

$$\begin{cases} f'(x_0) = 1 & \text{se } x > 0 \\ f'(x_0) = -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esta função $f'(x)$ é a função derivada de $f(x) = |x|$,
$x \in \mathbb{R} - \{0\}$

3) se $x < 2$, temos que $f'(x) = 2x$

se $x > 2$, temos que $f'(x) = 1$

temos portanto que

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2) = \lim\limits_{x \to 2_-} f'(x) = 4 \, . \\ f'_+(2) = \lim\limits_{x \to 2_+} f'(x) = 1 \end{array}\right\} \nexists \quad f'(2)$$

Notemos que, apesar de $f(x)$ não ser derivável no ponto 2, $f(x)$ é contínua nesse ponto, pois, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$

4) a) $y = x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

I) $y' = 4x^3 - 6x + 6$

II) $y'' = 12x^2 - 6$

III) $y''' = 24x$

b) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

$y' = -\frac{2}{x^3}$

$y'' = \frac{0.(x^3) - 1.(2x^2)}{x^6} = \frac{-2x^2}{x^6} = + \frac{2}{x^4}$

$y''' = -\frac{2}{x^5}$

Observação:

Se você acertou os exercícios 3 e 4 e os itens a, b, c, e, f, g, j, m, do exercício 1, você está aprovado.