2. O sucessor imediato de qualquer número natural é também um número natural.
3. Números naturais distintos nunca têm o mesmo sucessor imediato.
4. Zero não é o sucessor imediato de qualquer número natural.
5. Se algo vale para zero e, valendo para um dado número, também vale para o seu sucessor imediato, valerá ainda, para todos os números naturais.

Esses axiomas contêm três termos não definidos: "zero", "sucessor imediato" e "número natural". Os axiomas, por si mesmos, não nos revelam o que tais termos devam significar (embora entrelacem quaisquer significados que os termos possam ter) e não nos dão qualquer evidência a favor do fato de os termos poderem referir-se a qualquer coisa real. Se desejarmos aceitar os axiomas como verdadeiros, será preciso que fixemos os significados e forneçamos, por nossa conta, essa evidência. Na base do emprego desses termos, em tais axiomas, está a hipótese tácita de que "Zero" se refere, realmente, a alguma entidade bem definida, dentre as que estão sob exame e de que, para cada uma dessas entidades em tela, existe, de fato, apenas uma entidade que é seu sucessor imediato. Segue-se dos axiomas, também, que zero, seu sucessor, o sucessor deste, e assim por diante, são, todos, números naturais; segue-se ainda (em vista do quinto axioma) que nada mais será um número natural. Dos axiomas deflui que deve haver uma infinidade de números naturais, já que a sucessão não pode ser interrompida, nem pode, em círculo, retornar ao ponto de partida' (porquanto zero não é o sucessor imediato de um número natural). O quinto axioma é particularmente importante porque expressa o pressuposto em que se assenta a indução matemática.

Podemos conceber de que modo opera o raciocínio por indução matemática imaginando uma série de peças de dominó colocadas em pé, umas ao lado das outras, em fila: suponhamos saber que a primeira peça vai cair e que, ao cair uma das peças, a seguinte também cai; estamos aptos, nesse caso, a inferir que todas as peças vão cair, não importa quantas sejam. No mesmo espírito, se sabemos que algo vale para o zero e que, valendo para um dado número natural, valerá igualmente para o seu sucessor imediato, estamos em condições de inferir que esse algo vale para cada um dos números naturais. Com base nos axiomas de Peano, podemos introduzir os nomes dos números seguintes: "um", por definição, nomeia o sucessor imediato de Zero; "dois", por definição, nomeia o sucessor imediato de um; e assim por diante.

As três idéias primitivas de Peano, isto é, "zero", "número" e "sucessor" são passíveis de um número indefinido de interpretações diferentes, satisfazendo as 5 proposições primitivas.

Por exemplo: admitamos que "zero" signifique o número 1 e que "número" signifique ser elemento do conjunto 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... e que "sucessor" signifique "a metade"

Verificam-se os 5 axiomas de Peano para este caso.

Outro exemplo: "zero" significa 100, "número" significa os números naturais de 100 em diante e "sucessor" no sentido usual.

Verificam-se, também, neste caso, as 5 proposições de Peano.

Na realidade, dada qualquer série $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ infinita, que não contém repetições, tem um primeiro termo e não tem termo que não possa ser atingido por um número finito de passos, ela verifica os axiomas ou proposições de Peano.

Neste caso, "zero" corresponde a x_0, "número" a qualquer termo da série e "sucessor" de x_n signifique x_{n+1}. A aplicação dos axiomas seria:

(1) 0 é um número natural	x_o é um termo da série
(2) O sucessor de qualquer número natural é um número natural.	o sucessor de qualquer termo x_n da série é um termo da série: x_{n+1}
(3) Não há dois números com o mesmo sucessor	não há dois termos com o mesmo sucessor, i.e., se x_n e x_m são dois termos distintos, então $x_{n+1} \neq x_{m+1}$
(4) 0 (zero) não é sucessor de qualquer número	x não é sucessor de qualquer termo.

(5) Se uma propriedade vale para zero e, valendo para um dado número, também vale para o seu sucessor imediato, valerá, ainda, para todos os números naturais.	se uma propriedade ' vale para x_o e, valendo para x_n, qualquer, também vale para x_{n+1}, valerá ainda para qualquer termo da série.

<u>Indução completa</u> - O axioma número 5, também é chamado de axioma da recorrência ou da indução completa, que pode também ser definido assim:

Se A é um subconjunto de N ($A \subset N$) e verifica-se,

(i) $0 \in A$
(ii) $x \in A \Longrightarrow$ sig $(x) \in A$ então $A = N$

(sig (x) = sucessor de x) e do 5º axioma de Peano resulta o teorema abaixo:

- Seja p(n) uma proposição que depende de um número natural n

Se : (i) p (0) é verdadeira
(ii) para todo $x \in N$, $p(x) \Longrightarrow p(x+1)$

Então a proposição p(n) vale para todo número natural n ou então, na outra forma, que é uma generalização do teorema anterior:

Seja p(n) uma proposição que depende de um número natural n. Se, para um certo número natural n_o

(i) A proposição $p(n_o)$ é verdadeira;
(ii) $p(x) \Longrightarrow p(x+1)$ para todo número natural $x \geqslant n_o$.

Então vale a proposição $p(n)$ para todo número natural $n \geq n_0$.

Conseqüências dos Axiomas de Peano.

Façamos: sig x = sucessor de x

(i) Se $x \neq y$, então sig $(x) \neq$ sig (y)

(ii) Sig $(x) \neq x$

(iii) Se $x \neq 0$ então existe um número natural y tal que $x = \text{sig}(y)$ e este elemento é único.

Definição de Adição em N

(i) Existe uma operação binária em N que a cada par ordenado (x,y) de nºs naturais relaciona um número natural indicado por $x+y$, tal que:

1. Para todo $x \in N$, $x + 0 = x$ (elemento neutro)

2. Para todo $x \in N$ e todo $y \in N$, $x+\text{sig}(y) = \text{sig}(x+y)$, onde $x+y$ se chama soma de x e y

(ii) Associatividade da adição

$(x+y) + z = x + (y+z)$

(iii) Comutatividade da adição

$x + y = y + x$

onde definiremos que 0 é o elemento neutro da adição. Isto é:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

(iv) Se $y \neq z$ então $x + y \neq x + z$ para todo $x \in N$ e valerá, então, que $x + y = x + z \Rightarrow y = z$

(v) Dados x e y, ocorre um e só um destes casos:

a) $x = y$

b) Existe $u \neq 0$ tal que $x + u = y$

c) Existe $v \neq 0$ tal que $x = y + v$

Definição da multiplicação em N

(i) Existe uma operação binária em N, que a cada par ordenado (x,y) de nºs naturais associa um número natural indicado por $x.y$ tal que:

1. Para todo $x \in N$, $x.0 = 0$
2. Para todo $x \in N$ e $y \in N$ temos $x.\ sig(y) = x.y + x$

onde $x.y$ se chama produto de x e y e a operação se chama multiplicação.

(ii) Comutatividade da multiplicação

$$x.y = y.x$$

(iii) 1 é o elemento neutro da multiplicação.

1 é definido como sendo o sig (0) = 1

(iv) Propriedade distributiva da multiplicação à direita em relação a adição

$$x.\ (y + z) = x.y + x.z$$

e à esquerda.

$$(x+y)\ z = xz + yz$$

(v) Propriedade associativa da multiplicação

$$(x.y)\ .\ z = x.\ (y.z)$$

Ordem em N

(i) Dados x e y, se verifica uma e só uma das três possibilidades

a) $x = y$
b) $x < y$
c) $x > y$

(ii) Lei da transitividade

$$(x \leq y \text{ e } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$$

(iii) A relação $\leq$ tem as seguintes propriedades:

reflexiva $\quad x \leq x$
antisimétrica $\quad (x \leq y \text{ e } y \leq x) \Rightarrow x = y$
transitiva $\quad (x \leq y \text{ e } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

(iv) Monotonia da adição

$x<y$ ou $x = y$ ou $x>y$; então, teremos respectivamente:

$x + z < y + z$ ou $x + z = y + z$ ou
$x + z > y + z$

(v) $x \geq 0$ para todo $x \in N$

(vi) Teorema da Boa Ordenação.

Todo conjunto A de números naturais que tenha pelo menos um elemento tem um menor que todos os demais.

(vii) Se $x>0$ e $y>0$ então $x.y>0$ e que, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $x.y \neq 0$.

(viii) Se $x \neq y$ e $z \neq 0$ $z.x \neq z.y$

(ix) Propriedade de cancelamento da multiplicação

$$z.x = z.y \text{ e } z \neq 0 \text{ então } x = y$$

BIBLIOGRAFIA

1. BARKER, Stephen F. - Filosofia da Matemática - Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1974.

2. COSTA, Amoroso - As Idéias Fundamentais da Matemática - Biblioteca do Pensamento Brasileiro. - S. Paulo. Editôra Convívio EDUSP, 1981.

3. GUIMARÃES, A. Andrade - Introdução aos Fundamentos da Análise - Volume I.

4. BOYER, Carl Benjamin - História da Matemática - Tradução: Elza F. Gomide - S.Paulo, Editôra Edgar Blucher Ltda., 1974.

5. RUSSEL, Bertrand - Introdução à Filosofia da Matemática - Tradução: Giasone Rebuá. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1963.

6. TREJO, Cesar A. - El Concepto de Número - Coleção de Monografias Científicas - série de Matemática nº 7 - Editora da Organização dos Estados Americanos - Secretaria Geral - Washington, EEUU,

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Trabalho de grupo realizado pelos alunos abaixo relacionados, do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, "lato-sensu", na disciplina Idéias Fundamentais da Matemática, ministrada pelo Prof. Cesar Dacorso Neto.

Amélia Maria Noronha Pessoa de Queiroz
Cléa Rubinstein
Regina Célia Monken
Vera Maria Ferreira Rodrigues

1 - APRESENTAÇÃO

Não se pode iniciar um estudo das estruturas algébricas sem situá-las num contexto mais abrangente, estudando as ligações que se estabelecem entre elas e outras estruturas do domínio mais amplo do conhecimento. Por este motivo, abordar-se-á inicialmente a evolução do conceito das estruturas, não apenas ligado à Matemática, mas, sobretudo, dentro da teoria do conhecimento.

A seguir desenvolver-se-á um estudo da evolução do conceito através da história da Matemática, para definir as estruturas algébricas propriamente ditas.

. Finalmente, como o presente trabalho visa estudar as idéias fundamentais da Matemática no que estas interessam mais de perto à Educação Matemática, não se poderiam deixar de estabelecer alguns paralelos entre as estruturas matemáticas e as mentais

2 - ESTRUTURA

2.1 - Um pouco da evolução histórica do conceito de estrutura.

No curso da história do pensamento científico e filósofico, a idéia de "estrutura" foi traduzida por termos tais como "essência", "forma", "sistema", "organismo", além de outros, mas só com o Estruturalismo assumiu características mais rigorosas. A princípio, "estrutura" significava o modo como alguma coisa é construída, porém a palavra evoluiu em duas direções. Numa, visou a forma; noutra, a semântica. Desde o fim do século XIX, o termo foi definitivamente incorporado ao vocabulário científico, passando, com Spencer, do campo biológico ao social; com Morgan e Marx, ao domínio antinaturalista, implicando, então, a conhecida formulação de Lévi-Strauss.

A coincidência de certos fatores fez com que, a partir de 1930, passasse o termo estrutura a ser empregado em outras áreas, tais como, na Economia, na Psicologia (com o desenvolvimento da Gestalt, Psicologia da forma) e na Matemática (com a Teoria dos Modelos).

Diferentes definições de estrutura visando a destacar os vários aspectos do conceito têm sido formuladas. Para Lévi-Strauss, uma estrutura consiste em elementos que são combinados de modo que uma alteração em qualquer um deles implica numa alteração dos outros; assume, assim, um caráter de sistema. O lingüísta Hjelmslev entende estrutura como uma entidade autônoma de dependências internas, mas, para o biológo e epistemólogo Jean Piaget, "uma estrutura é um sistema de transformações que comporta leis enquanto sistema e que se conserva e enriquece pelo próprio jogo das transformações, sem que estas ultrapassem suas fronteiras ou recorram a elementos exteriores a elas. Em síntese, uma estrutura compreende três características básicas: totalidade, transformação e auto-regulação". (1)

Quanto à transformação, diz Piaget: "Todas as estruturas conhecidas, desde os grupos matemáticos elementares àquelas que regulam parentescos, são sistemas de transformações; contudo, estes podem ser quer intemporais...quer temporais...e, se não comportassem tais transformações, confundir-se-iam com formas estáticas quaisquer e perderiam todo interesse explicativo". (2)

A auto-regulação conduz à conservação das estruturas e a certo fechamento. As transformações inerentes à estrutura sempre geram elementos que a ela pertencem. No caso de estruturas lingüísticas, psicológicas, sociológicas, cujas transformações se desenvolvem no tempo, a auto-regulação supõe regulações fundamentadas não apenas em operações reversíveis, mas em antecipações e realimentações ("feedbacks").

(1) -Piaget, J. - "O Estruturalismo" - pág. 8
(2) -Id ibidem - pág. 13

Assim, Piaget nos mostra que as estruturas podem ser formalizadas, isto é, traduzidas em linguagem lógico-matemática, ou tratadas por meio do modelo cibernético. Considera ele que só se pode compreender o estruturalismo a partir das estruturas matemáticas. Assim sendo, a origem da noção de estrutura estaria comprometida diretamente com a noção matemática de "grupo", iniciada por Galois.

Nesta breve introdução, tentou-se apresentar algumas definições de estrutura, estabelecidas por especialistas dos diversos campos do conhecimento humano aos quais ela se aplica, e, principalmente, mostrar a importância do assunto de estudo, as estruturas matemáticas, para os demais ramos da ciência.

Isto feito, pode-se passar à apreciação das estruturas matemáticas.

2.2 - Estruturas Matemáticas

Na Matemática, a noção de estrutura surge quando os matemáticos passam a se interessar pela maneira como a Matemática é construída. Isso ocorreu a partir da segunda metade do século XIX, graças a duas questões-chaves: a da existência em Matemática e a da unidade da Matemática.

Desde a antigüidade grega até o século XIX, foi crença geral, entre os matemáticos, a existência real de números, pontos, retas e planos. É bem verdade que, há muito, tal suposta base de realidade vinha sendo solapada por algumas "aberrações" como, por exemplo, a introdução, por necessidade de cálculo, de números negativos e números imaginários. O golpe de misericórdia foi desferido pela construção das Geometrias não-euclideanas.

Deste então, a Geometria perdeu seu caráter de descrever o espaço sensível; seus axiomas deixaram de ser verdades percebidas pelos sentidos, passando a ser convenções apenas lógicas, para as quais deixa de ter significado a noção de verdade, como usualmente se entende.

Rompida a ligação com o real, os matemáticos passam a admitir que os entes matemáticos são criações suas e não da natureza. Daí não mais poderem inferir do universo físico as relações e propriedades dos entes matemáticos. As propriedades e relações passam apenas a ter o caráter de necessidade lógica ou teórica. Anteriormente não havia por que se interessar pelas estruturas, uma vez que se acreditava que os entes matemáticos já surgiam munidos de suas estruturas naturais. Entretanto, uma vez aceita a não existência a priori destas, torna-se necessário que, em cada caso, as estruturas sejam apresentadas explicitamente e corretas.

A noção de estrutura também é necessária, quando se adota a separação didática da Matemática em diversos ramos, como Aritmética, Álgebra, Geometria, e indaga-se o que têm em comum.

A preocupação com a unidade da Matemática, entretanto, não é recente; data dos gregos, ou mais precisamente, dos pitagóricos. Eis que a primeira tentativa de unificação da Matemática, "todas as coisas são números", esbarrou na dificuldade de construir o número irracional.

Após reiteradas derrotas, ao longo dos séculos, da tentativa de apresentar a Matemática como uma ciência caracterizada por objeto e método únicos, a tendência, no início deste século, era a de considerá-la como "uma série de disciplinas construídas sobre noções particulares delimitadas com precisão, ligadas por mil caminhos de comunicação". (3)

Hoje, sente-se que a evolução interna da Matemática lhe deu, mais do que nunca, unidade, criando uma espécie de núcleo central mais coerente. A essência desta evolução consiste numa sistematização das relações existentes entre as diversas teo-

(3) - Brunschvig, L. - "Les étapes de la philosophie mathematique" - pág. 447.

rias matemáticas; resume-se, assim, na tendência conhecida como "método axiomático" hipotético dedutivo. Os inimigos desse método, costumam confundi-lo com um de seus aspectos, por sinal o menos interessante, o "formalismo lógico". A finalidade principal do método axiomático é exatamente aquilo que o formalismo lógico, por sí só, é incapaz de fornecer: a compreensão profunda da Matemática. O método axiomático, conforme Bourbaki, "encontra seu ponto de apoio na convicção de que, se a Matemática não é um encadeamento de silogismos ao acaso, também não é uma coleção de artifícios mais ou menos astuciosos, feitos de aproximações fortuitas ' onde triunfa a pura habilidade técnica".(4) Onde o observador superficial vê algumas teorias aparentemente distintas, ajundando-se mutuamente, graças ao gênio de um matemático, o método axiomático "ensina a encontrar idéias comuns escondidas na aparência exterior dos detalhes próprios a cada uma das teorias consideradas, a destacar idéias e a esclarecê-las".(5) O traço mais marcante do método axiomático é o de realizar uma economia de pensamento.

O que há de comum entre as diversas noções designadas sob o nome genérico de "estruturas matemáticas" é o fato de serem aplicadas a conjuntos de elementos de natureza não especificada; para definir uma estrutura é dada uma ou várias relações on

(4) - Bourbaki, N. - "L'Architecture des Mathématiques" -pág. 38
(5) - Id ibidem - pág. 38

de esses elementos intervêm; postula-se, a seguir, que as relações dadas satisfazem certas condições, que são os axiomas da estrutura. Ainda segundo Bourbaki, "fazer a teoria axiomática de uma estrutura é deduzir as consequências lógicas dos axiomas da estrutura, proibindo-se qualquer outra hipótese sobre os elementos considerados (em particular, toda hipótese sobre sua própria natureza)".(6)

Bourbaki separou as estruturas matemáticas em três grandes grupos, conforme o tipo de relação que serve de ponto de partida para a definição, aos quais chamou de "estruturas-mães": estruturas algébricas, estruturas de ordem e estruturas topológicas.

Se a relação de definição é uma lei de composição, a estrutura é dita algébrica. No caso particular da estrutura de grupo, a lei de composição é uma relação entre três elementos, permitindo determinar o terceiro de modo único em função dos outros dois.

Se a relação de definição é uma relação de ordem diz-se que a estrutura é de ordem. Neste caso, temos dois elementos "x, y" e a relação se enuncia, freqüentemente nestes termos: "x é no máximo igual a y", não mais se supondo que um elemento seja determinado de modo único em função de outro.

As estruturas que se baseiam nas noções de vizinhança, de limite e de continuidade, são chamadas topológicas.

(6) - Id ibidem - pág. 41

2.3 - As estruturas-mães e as estruturas múltiplas

A Matemática, pelo menos de agora em diante, dispõe de poderosas alavancas fornecidas pela teoria das estruturas. E, onde outrora parecia reinar a maior desordem, existem imensos domínios, unificados graças ao método axiomático.

Guiados pela concepção axiomática pode-se mostrar como o universo matemático se apresenta atualmente: no núcleo, as estruturas-mães; fora deste, as estruturas que poderiam ser chamadas de estruturas múltiplas, nas quais ocorrem, simultâneamente, duas ou mais estruturas-mães não simplesmente justapostas, mas organicamente combinadas por um ou mais axiomas. E, como exemplos destas, poderíamos citar: a Álgebra Topológica, a Topologia Algébrica etc. Mais afastadas, enfim, começam a aparecer as teorias particulares, em que os elementos dos conjuntos considerados têm uma individualidade caracterizada, apesar de terem perdido sua autonomia de outrora, passando a ser cruzamentos onde interagem estruturas matemáticas mais gerais. Como exemplos podemos citar: Análise Funcional, Geometria Diferencial, Teoria dos Números etc.

Pelo menos a partir de Bourbaki, a Matemática passou a ser estruturalista. A reforma de Bourbaki é uma consolidação da visão de matemáticos como, entre outros, Boole que, em meados do século passado, já considerava que a Matemática trata das operações consideradas nelas mesmas independentemente das matérias às quais possam ser aplicadas.

3 - O ESTRUTURALISMO E A MATEMÁTICA

Desde Aristóteles já havia sido tentado um rigor na Lógica das classes e das proposições. Foi a partir de seus estudos que Leibniz pode representá-la por gráficos lineares, Euler por círculos e Boole por uma interpretação aritmética mediante o uso dos símbolos + e X.

Foi difícil fazer o mesmo com a Aritmética, pois estava ligada à intuição geométrica.

"A paternidade da Lógica Matemática é atribuída à Leibniz, Boole ou a Frege: Leibniz concebeu a idéia, Boole realizou o primeiro tratamento matemático da Lógica tradicional; Frege realmente plantou o alicerce de uma disciplina nova, das mais importantes, fornecendo as análises e os instrumentos essenciais". (7)

Duas obras estabelecem as bases da Lógica Matemática: "Análise Matemática da Lógica", de Boole (1818-1864) e "Formal Logic", de De Morgan (1806-1871).

Entretanto, desde 1629, Descartes havia sido consultado por Mersenne sobre a idéia de uma "língua universal", que possibilitasse uma formalização da Matemática, mas achou impossível fazê-lo.

No século XVII, Leibniz, que era poliglota e trabalhara em projetos de dicionários, tentava traduzir sistemas-figuras por equações, tabelas numé-

(7) - Dieudonné, J. - "Abrégé d'Histoire des Mathématiques" - vol. II, pág. 3[illegible]3

ricas em linguagem musical. Ele acentua tudo o que pode de similitudes de situações estabelecidas entre todas as espécies de domínios por todas as espécies de correspondências, que ele apreende, com mais frequência, como do significante ao significado: "Uma coisa exprime uma outra, em minha linguagem", diz ele, "quando há uma relação constante e regrada entre o que se pode dizer de uma e de outra. É assim que uma projeção de perspectiva exprime seu geometral". (8)

Leibniz pretendia construir argumentos apenas "in forma", pensar e concluir sobre a forma, submeter os entes lógicos a um cálculo semelhante ao algébrico, mas chegou apenas à ideografia e tentativa de uso de uma linguagem universal.

Ele já observara as propriedades das relações- a simetria e a transitividade; concebe a combinatória como ciência das relações entre objetos de todas as naturezas. Deve-se-lhe, ainda, a primeira idéia de determinantes.

Condillac retoma a decodificação da linguagem iniciada por Leibniz. Ele acha que "a arte de raciocinar se reduz a uma língua bem feita", pois, "as línguas são métodos analíticos" (9) e ilustra suas idéias em "A Língua dos Cálculos". Babbage continua estes estudos e, a partir dos resultados, chega a pensar em construir uma máquina de calcular, por volta de 1824.

(8) - Id ibidem - pág. 355
(9) - Id ibidem - pág. 357

A noção de grupo era do conhecimento de diversos matemáticos, mas Evariste Galois (1811-1832) deve ser considerado como o verdadeiro iniciador da teoria dos grupos. Ao reduzir o estudo das equações algébricas ao dos grupos de permutações, aprofunda consideravelmente este último, tanto no que diz respeito às propriedades gerais dos grupos como na determinação de grupos dotados de propriedades particulares.

"Em 1830, Peacock (1791-1858),..., em seu Tratado de Álgebra,..., empreende a tarefa de tratar' os processos do cálculo da Álgebra da mesma maneira que Euclides tratou as proposições da Geometria, isolando uma "Álgebra Simbólica",..., "ciência dos símbolos e de suas combinações sobre as quais se calcula, aplicando regras fixas por convenção, de suas "ciências de aplicação": a Aritmética, ou "Álgebra Aritmética", em primeiro lugar, e "todas as outras ciências" (Geometria, Física etc). (10)

Ele propõe o que chama de "princípio de permanência das formas equivalentes", pelo qual qualquer forma algebricamente equivalente a outra deve permanecer equivalente a ela se for expressa por símbolos gerais. Peacock, o "Euclides da Álgebra" teve papel muito importante no desenvolvimento da Álgebra Abstrata. Apoiado por De Morgan, fundou a "British Association for the Advancement of Science" (1831).

(10) - Id ibidem - pág. 359

D. Gregory (1813-1844) classificava as operações segundo suas propriedades e definia a Álgebra Simbólica como "a ciência que trata da combinação das operações definidas não pela natureza..., mas, pelas leis de combinações às quais elas estão sujeitas". (11)

Em 1815, é fundada na Inglaterra, em Cambridge, Trinity College, a "Analytical Society" constituída pelo algebrista Peacock, o astrônomo Herschel e Babbage.

Hamilton (1805-1865), também de Trinity College, mas de Dublin, desenvolve os estudos de De Morgan. Concebe números que não comportam uma multiplicação comutativa, ao mesmo tempo em que Grassmann apresenta à multiplicação exterior em sua "Teoria de Extensão".

Cayley foi o que mais sobressaiu do grupo iniciando a "Geometria Analítica ordinária do espaço n-dimensional, usando determinantes como instrumento essencial". (12)

Na Alemanha, Grassmann inicia o uso da notação de vetores em relação a uma base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ para um espaço n-dimensional, expressando-os através das operações + e . :

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

(11) - Id ibidem - pág. 360
(12) - Boyer, Carl B. - "História da Matemática" - pág. 395

Grassmann dá os primeiros passos para chegar à noção abstrata de estrutura de espaço vetorial (sobre ℝ ou ℂ).

F. Klein (1849-1925), aluno de Plücker na Universidade de Bonn editou sua obra sobre a Nova Geometria e foi mais longe.

Talvez inspirado pelas noções de Lagrange sobre a teoria dos grupos, "impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo, passou boa parte do resto de sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando a noção". (13)

Sistematiza as transformações de contato de Sophus Lie as quais, em geral, levam superfícies tangentes em superfícies tangentes.

Klein, utilizando a noção de grupo, mostra como as várias geometrias podiam ser caracterizadas de modo único. Ele o fez numa aula inaugural em Erlangen, em 1872. Esta conferência, chamada "Erlanger Programm", descrevia a geometria como "o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações". (14)

O trabalho de Frege (1870-1913), iniciador da tendência logicista, que faz da Aritmética um ramo da lógica, originou a síntese de B. Russel e Whitehead que, por sua vez, foi continuado nos trabalhos de Pasch, Peano e Hilbert.

(13) - Id ibidem - pág. 400
(14) - Id ibidem - pág. 400

Em 1872 surge Peano com seu simbolismo e o formulário pasigráfico ou ideográfico. Mais tarde, Peano enumera os axiomas em que se fundamenta a Aritmética, entendida como a teoria dos números naturais, em "Arithmeticae Principia Nova Methodo Exposita". Nestes axiomas ele utiliza três idéias primitivas: 1 ou 0 (entendido como um primeiro elemento e), número e sucessivo:

1) 1 é um número
2) Se a é um número, seu sucessivo (a+1) também é um número.
3) Se dois números são iguais, seus sucessivos também o são.
4) 1 não é sucessivo de qualquer número.
5) Toda propriedade que pertence ao número 1, se, ao pertencer a um número x, pertence também ao sucessivo, é uma propriedade de todos os números.

Peano, introduzindo a linguagem simbólica para expressar idéias fundamentais, chega a construir o que Leibniz pretendera - escrever por meio de símbolos uma proposição qualquer e realizar cálculos formais com proposições, passando da pasigrafia à ideografia.

Só em 1888 Peano retoma a obra de Grassmann e, dispondo da linguagem dos conjuntos, pode dar uma definição geral dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ "que só difere da nossa em pontos secundários" (15) e dá uma definição geral de aplicações lineares. Chega à definição de espaços vetoriais de dimensão in

(15) - Id ibidem - pág. 94

finita, "dando como exemplo o espaço de todos os polinômios de coeficientes reais". (16)

Em 1898 Whitehead apresenta uma versão unificada das linguagens formais até então utilizadas em seu Tratado de Álgebra Universal, onde a considera "a ciência dos cálculos, com uma adição, comutativa, associativa, dotada de um elemento neutro, e uma multiplicação duplamente distributiva em relação à precedente" (17).

Em 1903, Bertrand Russell publica um programa de unificação total da Matemática, por redução à Lógica e, mais tarde, junto com Whitehead, redige "Principia Mathematica" em que os dois expõem suas idéias sobre esta unificação.

Zermelo, em 1908, formula uma axiomática, visando a excluir definições "não predicativas" ou de círculo vicioso, onde o definido está na definição.

Entretanto, o verdadeiro sistematizador e propulsor do método axiomático foi David Hilbert, que, em 1899, expõe suas idéias a respeito, se bem que não tivesse ainda utilizado a linguagem simbólica.

Em nosso tempo, o grande representante da tendência unificadora da matemática é o grupo Bourbaki, que tenta expressá-la através de uma linguagem formalizada. Segundo Bourbaki, "do ponto de vista

(16) - Rey Pastor, J. - "História de la Matemática" - pág. 300

(17) - Dieudonné, J. - "Abrégé d'Histoire des Mathematiques" - pág. 363

axiomático, a Matemática aparece assim como um repositório de formas abstratas - as estruturas matemáticas; e acontece sem que saibamos por quê, que certos aspectos da realidade empírica se ajustam a essas formas por uma espécie de pré-adaptação"(18). Ele tenta compará-la com as estruturas nas outras ciências. Trataremos adiante o caso da Epistemologia.

O grupo Bourbaki continua desenvolvendo estudos a respeito das estruturas matemáticas.

Novas tendências têm surgido, mas fogem à temática aqui abordada.

(18) - Bourbaki, N. - "L'Architecture des Mathématiques" - pág. 46

4 - AS ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

A estrutura de um conjunto é definida pela operações e as relações nele utilizadas, e suas propriedades. Entende-se por estrutura algébrica, como já foi visto, um conjunto munido de uma lei de composição com as propriedades desta lei. Entre as estruturas algébricas definir-se-ão as mais simples: grupóide, monóide, grupo, anel, corpo e espaço vetorial.

1. Grupóide: grupóide G é todo conjunto munido de uma lei $*$ tal que $G \times G \to G : (x,y) \to x*y$. Esta designação é dada por Papy.

Exemplos: $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Z},-)$; $(\mathbb{R},.)$; $(\mathcal{P}E,\cap)$

2. Monóide: monóide M é todo conjunto munido de uma lei associativa que tem elemento neutro, e.

Exemplos: $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{R},+)$; $(\mathbb{R},.)$; $(\mathcal{P}E, \cup)$

Contra-exemplo: $(\mathbb{N},-)$, pois a diferença não é uma operação em $\mathbb{N}$.

3. Grupo: Grupo G é todo conjunto munido de uma lei associativa, que tem elemento neutro, e em que cada elemento tem um simétrico.

Exemplos: $(\mathbb{Z},+)$; o conjunto dos vetores do plano com a adição de vetores; o grupo das translações, das rotações, das simetrias; o grupo de Klein.

Contra-exemplo: $(\mathbb{N},+)$, pois os naturais não têm simétrico aditivo em $\mathbb{N}$.

3.1 Grupo comutativo ou abeliano: um grupo comutativo ou abeliano é um grupo cuja lei de composição é comutativa.

Exemplos: $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Q}\ ,.)$.

4. <u>Anel</u>: anel é um conjunto A munido de duas operações tais que o conjunto com a primeira operação é um grupo abeliano, e a segunda operação é associativa e distributiva em relação à primeira.

Exemplos: $(\mathbb{Z}, +, .)$; $(\mathbb{Q}, +, .)$; $(\mathbb{R}, +, .)$; o conjunto de matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ com as operações de adição e multiplicação de matrizes.

4.1 <u>Anel comutativo</u>: é o anel em que a segunda operação é comutativa.

Exemplos: os anéis acima citados, exceto o de matrizes, cujo produto não é comutativo.

4.2 <u>Anel com unidade</u>: é o anel em que a segunda operação tem elemento neutro.

Exemplos: todos os anéis citados acima.

4.3 <u>Anel de divisão</u>: é o anel em que a segunda operação tem elemento neutro e em que todos os elementos, exceto o elemento neutro da primeira operação, têm um simétrico para a segunda operação.

Considerando as duas operações como + e ., poderia resumir-se esta definição a:

$(A, +, .)$ é anel de divisão	$(A, +)$ é grupo abeliano $(A - 0, .)$ é grupo com a distributividade de . em relação a + .

Exemplos: $(\mathbb{R}, +, .)$ é anel de divisão comutativo; o conjunto das matrizes 2x2, cujo determinante é diferente de zero, é anel não comutativo; o conjunto dos quatérnios definido por

$Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$; $a_i \in R$; $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k$; $jk = i$; $ki = j$ é anel de divisão não comutativo ($ij \neq ji$)

4.4 Anel a divisores de zero: se o anel A tem elementos $a, b \in A$, tais que $a.b = 0$, sendo a e b diferentes de zero, então ele é chamado anel a divisores de zero.

Exemplo: o conjunto das classes de equivalência módulo 6 com as operações de adição e multiplicação $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ ($3x2 = 0, 2x3 = 0$)

4.5 Anel ou domínio de integridade: é o anel comutativo e unitário, e que não tem divisores de zero.

Exemplo: (Z, +, .)

5. Corpo: corpo C é o anel comutativo, cuja segunda operação tem elemento neutro e em que todos os elementos, exceto o neutro da primeira operação, têm simétrico para a segunda operação.

Considerando as duas operações como + e ., poderia resumir-se esta definição a :

(C, +, .) é corpo $\begin{cases} \text{+ é associativa, tem elemento neutro, simétrico e é comutativa.} \\ \text{. em C − 0 é distributiva em relação a +.} \end{cases}$

Observação: se C é corpo, então é anel de divisão comutativo e vice-versa.

Exemplos: (R, +, .); (Q, +, .)

Contra-exemplo: o conjunto dos quatérnios definido em 4.3

Convém assinalar que há divergência entre auto res quanto à definição de corpo, dispensando, alguns, a comutatividade da segunda operação. Estes definem, então, corpo comutativo como aquele em que a segunda operação é comutativa. Para estes, portanto, os quatérnios seriam um corpo não comutativo.

5.1 Corpo ordenado: é o corpo em que está definida uma relação de ordem, isto é, reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Exemplos: $\left.\begin{array}{l}(\mathbb{R}, +, .)\\(\mathbb{Q}, +, .)\end{array}\right\}$ com a relação $\leq$

5.2 Corpo ordenado completo: é o corpo ordenado em que todo subconjunto não vazio que seja cotado superiormente admite um supremo no próprio conjunto ou que, sendo cotado inferiormente, admite ínfimo no próprio conjunto.

Exemplo: $(\mathbb{R}, +, .)$

6. Espaço vetorial: espaço vetorial V sobre um corpo C é um conjunto munido de duas operações +, ., sendo V um grupo aditivo comutativo em que a multiplicação por um escalar k de C, tem as propriedades:

(i) $k_1, k_2 \in C$ e $v \in V$, $k_1(k_2v) = (k_1k_2)v$

(ii) $k \in C$ e $u, v \in V$, $k(u+v) = ku + kv$

(iii) $k_1, k_2 \in C$ e $v \in V$, $(k_1+k_2)v = k_1v + k_2v$

Exemplos: $(\mathbb{R}, +, .)$ sobre $\mathbb{R}$; as matrizes 2x2 sobre $\mathbb{R}$, com a operação de adição e multiplicação por escalar; o conjunto dos polinômios $P = \{ax^3+bx^2+cx+d;\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ com a adição e multiplicação escalar definidas usualmente.

5 - AS ESTRUTURAS PSICOLÓGICAS, LÓGICAS E MATEMÁTICAS

Como vimos, na própria definição de estrutura e pela evolução diacrônica e sincrônica do estruturalismo, as ciências estão cada vez mais interligadas e, na busca de modelos formais para suas estruras, elas acabam por se embasar na Matemática.

Pode dizer-se que a Lógica Matemática criou o grande elo entre a Matemática e as demais disciplinas, na mesma medida em que a Epistemologia (teoria do conhecimento) se liga ao próprio sistema das ciências, não pertencendo mais ao domínio exclusivo da Filosofia.

Bourbaki em um artigo no "Journal for Symbolic Logic" diz "entre outras palavras, a Lógica,no que concerne aos matemáticos, não é nada mais, nada menos que a gramática da linguagem que é usada, uma linguagem que tinha que existir antes de a gramática ser construída".

Em todas as ciências se reconhecem estruturas análogas às lógico-matemáticas. Na Física temos o exemplo das forças, onde figuram as operações de composição.

Em linguística, Saussure mostrou que os processos da língua não se reduziam à diacronia e que não basta conhecer a história da palavra para compreender seu significado atual. Ele acha que, além da história, há o "sistema" que tem suas leis de equi