BOLETIM

JUNHO/82

13

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

Publicado sob o auspício da
Universidade Santa Úrsula.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A educação matemática, no quadro da educação geral, deve estar estreitamente relacionada com a realidade do educando. Não se compreende com isso que ela tenha mero caráter atual, mas, sim, que possibilite uma visão crítica e criativa, para a elaboração de alternativas que contribuam para a melhoria da qualidade de vida do homem.

Importa que se relacione o específico de cada disciplina com os aspectos bio-psico-sociais; que se situe o indivíduo em seu contexto, mas de forma a abrir fronteiras para que possa vir a modificá-lo; que se busque uma permanente recriação de seu espaço para a conquista de sua verdadeira humanidade.

Com a certeza de que o conhecimento de experiências bem sucedidas e de teorias novas permite o progresso científico, nossos Boletins procuram difundir o que se nos apresenta como de interesse daqueles que trabalham em educação matemática.

Assim, incluimos neste número a conferência do Dr. Howard Fehr sobre a atualização da Geometria, procurando despertar os professores para a necessidade de reformulação de seus programas; incluimos, também, um trabalho sobre as Estruturas na Matemática, e outro sobre Conjunto N dos Números Naturais e o Princípio da Indução elaborado por alunos do Curso de Pós-Graduação em Matemática-GEPEM-USU. Destacamos as notícias sobre o XXXIII Encontro Internacional da CIEAEM em Pallanza (Itália) e sobre a palestra do Prof. Claude Gaulin (Universidade de Laval - Quebec) a respeito do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática, ambas de grande importância e atualidade.

Finalmente, colocamos uma resenha sobre o livro "Cálculo I, II e III" de autoria de G.S.S. Avila - Editôra Universidade de Brasília, recentemente publicado.

REFORMA DO ENSINO DA GEOMETRIA
Prof. Howard F. Fehr (EE.UU.)
Tradução de Moema Sá Carvalho

- Conferência pronunciada na Primeira Conferência Inter-Americana sobre Educação Matemática - Bogotá, Colombia, Dezembro de 1961, publicada em "Educacion Matemática en Las Américas".
Howard Fehr - Bureau of Publications Teachers College, Columbia University.

O estudo da Geometria apresenta alguns dos problemas mais discutidos do ensino da Matemática atual, tanto no nível secundário quanto no universitário.

O descontentamento geral com os programas provém, em parte, da influência dos progressos da Matemática na compreensão do que constitui o que se denomina "Geometria".

Por consequinte, antes de se considerar um plano de reformas, é necessário examinarem-se aqueles movimentos que deram forma à nossa visão atual do tema e medir seus efeitos no ensino.

DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA

O papel desempenhado pelo descobrimento das geometrias não euclideanas ao libertar esse tema do jugo da intuição é demasiado conhecido para que mereça mais do que nossa atenção passageira. Menos conhecido, talvez, seja o fato de que, desde o século XVI, Clavius tenha apontado uma falha no tratamento dispensado por Euclides às proporções.(1) Um século mais tarde Leibniz chamou a atenção sobre o lapso de Euclides no caso de interseção de duas circunferências, cada uma passando pelo centro da outra. A dependência de várias das suas demonstrações de uma suposição acerca da ordem dos pontos de uma reta, não expressada explicitamente, adquiriu significado especial quando se converteu no ponto central do movimento para "salvar" a Geometria de Euclides, com intenção de assegurar que o conjunto de seus axiomas seria completo.

Entretanto, apesar das críticas que se lhe fizeram, a única Geometria prosseguiu sendo a euclideana, até o ano de 1800. Essa situação mudou sensívelmente no século XIX, quando houve uma explosão de especulações sobre esse tema com especial atenção, em princípio, ao desenvolvimento de diferentes tipos de geometrias. Felix Klein (2) contribuiu com novas luzes sobre esses tipos de geometria, usando a teoria dos grupos de transformações aplicadas às variedades, para classificar as diferentes Geometrias. Ainda que o chamado

(1) - Euclides não aprovou a existência de uma quarta proporcional a três grandezas dadas.

(2) - Programa de Erlangen, 1872.

"Programa de Erlangen" de Klein tenha tido o mérito de mostrar a unidade essencial de todos os ramos da Geometria desenvolvidos até essa época, sabemos hoje que tem sérias limitações, especialmente quando é considerada em relação aos espaços métricos, projetivos e topológicos.

O desenvolvimento da geometria nos últimos cinco lustros do século XIX se caracterizou por duas tendências diferentes. Uma (a Geometria Diferencial) conseguiu arrastar a Geometria tão completamente para o domínio da Análise que esse tema se estuda hoje em dia sob esse ponto de vista e a palavra "geometria" aí usada tem atualmente mais o valor de adjetivo do que substantivo. A outra tendência teve por força motriz o desejo de restaurar o prestígio de que havia gozado a Geometria de Euclides durante séculos. O amadurecimento dessas tendências conduz a que seja possível contemplar-se a Geometria como um conjunto de proposições que se desenvolva em forma ordenada, i.é, de acordo com as leis da lógica, a partir de um conjunto de axiomas.

A Pasch deve-se atribuir a primeira formulação abstrata de um conjunto completo de axiomas.

Esse trabalho inicial foi seguido pouco tempo após por Peano, Pieri, e outros membros do "Formulario". (Deve-se observar que os autores do "Formulario" foram, para 1890, a contrapartida do Bourbaki atual, no sentido de que se tratava de um grupo de matemáticos que escrevia Matemática a vançada sob uma firma única).

O período de aperfeiçoamento da Geometria de Euclides culminou em 1899 com o famoso "Grundlangen der Geometrie" de Hilbert, que não só é mais conhecido que outras formulações da Geometria, como tem exercido maior influência que qualquer outro sobre o ensino dessa matéria em todos os níveis. Ao aparecer o tratamento de Hilbert - significativamente quando se inicia o novo século - foram cortados os últimos laços que ligavam a Geometria à intuição e foi confirmado o fato de que, no que concerne aos matemáticos, o formalismo havia obtido uma notável vitória.

ENSINO DA GEOMETRIA

Nas primeiras décadas deste século o movimento dedicado a refinar a base axiomática da Geometria de Euclides surtiu pouco ou nenhum efeito sobre o ensino dessa matéria tanto no nível secundário quanto no universitário. A única mudança na geometria do bacharelado desse período, que pode ser atribuída a esse movimento, foi a modificação nos livros-texto da definição de "axioma" que passou de "verdade evidente" para "uma afirmação que deve ser aceita sem demonstração".

Fora dessa mudança, Euclides, com todas as suas omissões, prevaleceu. No nível universitário, os cursos de Geometria tomavam títulos: "Geo metria Projetiva Sintética","Geometria Analítica" ou "Geometria Pré-Universitária". O tema desse último curso compreendia tópicos tais como os pontos de Brocard, o teorema de Ceva e outros similares, apresentados todos ao estilo clássico de Euclides.

Essa situação de inércia mudou na década de 1930 com o renascimento de interesse pelos axiomas de Hilbert como base apropriada para um programa de instrução na escola secundária.

Nessa época G.D. Birkhoff elaborou uma modificação significativa dos axiomas de Euclides, seguindo a norma geral imposta por Hilbert, porém conseguindo uma grande economia ao fazer uso das propriedades do conjunto dos números reais: a de ordem e a de completividade. O problema que Birkhoff esperava resolver dessa maneira foi apropriadamente abordado em uma tentativa semelhante feita por Saunders MacLane, como a de encontrar ' "Um conjunto simples e intuitivo de fatos sobre distância e ângulos que bastasse para caracterizar a Geometria Plana".(3) Com o patrocínio da "National Science Foundation", os axiomas de Birkhoff,' modificados por sua vez por Edwin C. Moise, foram utilizados na preparação de textos experimentais.(4)

(3) Saunders MacLane,"Metric Postulates for Plane Geometry", American Mathematical Monthly, vol 66, 1959, pp 543 - 555.

(4) School Mathematics Study Group "Geometry",vol I e II, Yale University Press. 1961.

que estão sendo usados em muitos colégios dos Estados Unidos.

Outra tendência do estudo da Geometria na escola secundária, iniciado na Alemanha, onde se aplica atualmente em forma bastante generalizada, recorda alguns aspectos do Programa de Erlangen, de Klein.

O grupo de transformações (rotações, reflexões e translações) é utilizado para caracterizar a Geometria euclideana, porém precedido de um sistema de axiomas que conservam a congruência de triângulos da Geometria de Euclides como fundamentais para o desenvolvimento posterior do estudo da Geometria.

Bachmann (5) mostrou que esse grupo pode ser substituído pelo grupo das reflexões unicamente.

A sobrevivência da Geometria de Euclides se deve principalmente à crença de que ela seria o único tema disponível e apropriado para iniciar as mentes jovens na natureza de uma estrutura matemática.

Cabe observar que, em oposição a essa idéia, temos mais de meio século de desenvolvimento de aritmética e álgebra, que mostram em forma elementar a natureza de uma estrutura axiomática.

(5) Bachmann, "Aufbaw der Geometrie aus dem Spiegellungsberfriff" Sringer Verlag, 1955.

E, sem dúvida, tanto no nível secundário quanto no universitário, temos evitado, até há muito pouco tempo, o ensino dessas matérias em qualquer outra forma que não fosse clássica. No momento atual é claro que, se assim o desejarmos, podemos utilizar ramos da Matemática diferentes da Geometria para desenvolver as idéias de uma estrutura axiomática e permitir, assim, um tratamento da geometria sob o que se poderia chamar um ponto de vista contemporâneo.

Apesar de todos os conhecimentos à nossa disposição, os atuais tratamentos reformulados da Geometria nos Estados Unidos estão dirigidos essencialmente para a conservação da Geometria de Euclides, corrigidos seus defeitos por meio da introdução dos números reais. As conferências de Aarhus (1960) e Bolonha (1961) se concentraram principalmente na apresentação de sistemas de axiomas que permitem conservar a Geometria de Euclides. O progresso ao nível da escola secundária parece haver-se estancado no pântano da Geometria de Euclides.

Em um nível superior, nos Estados Unidos, a Geometria começou a desaparecer ultimamente. Os geômetras do tipo moderno "guardaram há muito tempo todos os tesouros euclideanos em um museu no qual o pó da História apagou prontamente o seu brilho". Da mesma maneira, a Geometria Analítica como tema está desaparecendo rapidamente e o essencial dessa matéria se encontra agora ao se estudar Análise ou Cálculo. Em substituição a essas geome trias, uma nova tendência que está adquirindo força é a de dar cursos que examinem os "Fundamentos da Geometria". Para tais cursos, o trabalho monumental de O. Veblen e Young sobre Geometria Projetiva tem servido de fonte. Outro livro, mais limitado em seu conteúdo, porém que está sendo alvo de renovado interesse é o trabalho de H. Forder, sobre os "Fundamentos de la Geometria Euclideana". Esse tratado fornece uma estrutura completa do espaço métrico euclideano, utilizando axiomas escolhidos entre os propostos por Hilbert, Peano, Pieri, Huntington e outros. Um livro que introduz no programa universitário elementar temas de vanguarda da Matemática é o trabalho de L.M. Blumenthal, "Una Visión Moderna de la Geometria". Começando pelo conceito de anel ternário desenvolvido por Marshall em 1943, Blumenthal propõe um sistema de coordenadas no plano afim e chega a desenvolver um conjunto de postulados métricos para o plano euclideano. Por último, e no nível universitário, ponhamos os tratados de Levi (6) e de Libois (7) que empreenderam igualmente o estudo da Geometria por meio do espaço afim.

Se nos pedissem uma característica destacada da Matemática do século XX elegeríamos provavelmente a sua unidade. Isto se deve sobretudo ao uso generalizado dos conjuntos e das estruturas.

(6) Levi, Howard "Foundations of Geometry and Trigonometry". Prentice Hall 1960.
(7) Libois, Paul. "Introdution à la Geometrie". Capítulos I, II e III. Inprenta de la Universidad de Bruseles, 1960.

Um desenvolvimento notório da Geometria e que a liga mais estreitamente à matemática em sua totalidade é o tratamento do espaço. Esse movimento pode-se descrever como aquele no qual os matemáticos, ao observar os vetores tal como foram concebidos e usado pelos físicos, os tenham transformado em uma estrutura matemática para estudar o espaço. A evolução gradual das classes equivalentes de vetores livres em um plano ou no espaço para os vetores centrados, para o vetor como conjunto ordenado de dois ou três números reais unicamente, para o espaço métrico e para o topológico foi o maior êxito moderno no campo da Geometria.

Algumas tentativas de introduzir vetores no desenvolvimento da Geometria analítica lograram pouco avanço nos países europeus e não tiveram êxito nos Estados Unidos. Um texto de Reynolds, escrito em 1928 e outros de Murnaghan, em 1946, não tiveram aceitação nos estudos universitários. Nos últimos anos, esse tratamento está aparecendo nos textos de Cálculo sob o título de "Espaço Vetorial" Nesse contexto, seu propósito é desenvolver aqueles tópicos dos espaços afins e euclideanos de duas e três dimensões necessários para o estudo e as aplicações de Cálculo Diferencial às curvas e às superfícies. Mesmo aí, onde se estão utilizando esses textos, a introdução do espaço vetorial não obteve grande êxito. Há fortes razões para crer que a dificuldade se encontra na falta de preparo por parte dos alunos para estudar o espaço em uma forma que não seja através do desenvolvimento sintético da Geometria de Euclides.

REFORMA DO ENSINO

No que segue me referirei à Geometria de Euclides como a apresentação sintética dos elementos de Euclides junto com qualquer outro refinamento moderno, tal como os feitos por Hilbert, Forder, Birkhoff e outros; e me referirei à Geometria euclideana como o espaço concebido como um conjunto de elementos chamados pontos, e no qual se introduza uma estrutura e uma métrica que dê as distâncias e conserve as relações que se encontram na Geometria de Euclides. Esse espaço euclideano está no cerne da Matemática e suas propriedades nos oferecem o meio de estender e generalizar muitos dos outros ramos da Matemática (por exemplo: a Relatividade, a Geometria Diferencial, os grupos, os Espaços Métricos e a Topologia). A Geometria de Euclides, em troca, não tem nada a ver com esses temas; é hoje estéril, encontra-se fora do caminho principal dos avanços matemáticos e pode ser relegada sem temor aos arquivos para uso dos historiadores de amanhã.

A maneira de enfocar a Geometria ou qualquer outro ramo da Matemática é muito diferente hoje do que era no começo do século. Partia-se, então, de um conjunto de objetos cuja existência geralmente se admitia, porém sem os descrever, ao qual se impunha uma estrutura total na forma de um conjunto completo de axiomas (basta mencionar unicamente Hilbert e seus "Fundamentos", ou Huntington e seus 27 postulados de álgebra complexa). O tema ficava então completo com exceção do desenvolvimento tautológico dos teoremas da estrutura.

Hoje se parte de um conjunto básico cujos elementos ou não estão definidos, ou se constróem a partir de conjuntos mais fundamentais. Em Geometria nos referimos ao espaço como a um "conjunto" e a seus elementos como "pontos". Introduzimos logo uma estrutura no conjunto e desenvolvemos as propriedades possíveis segundo essa estrutura (isto é, um espaço vetorial afim). Sobre essa estrutura e em formas muito diversas podemos introduzir uma estrutura adicional, obtendo,assim, um novo espaço (por exemplo, ao introduzir uma norma no espaço vetorial afim se obtém um espaço vetorial normado). Podemos,então, desenvolver ainda mais a estrutura, introduzindo uma métrica (uma função de distância) em nosso espaço normado, e, de acordo com a função que defina a distância, obteremos diferentes espaços; se se utilizar a função euclideana se obterá um espaço vetorial euclideano. E, conforme seja a descrição de nossos pontos, poderemos obter $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ ou uma infinidade de dimensões em nosso espaço.

Se o método anteriormente descrito de empregar um par ordenado (conjunto, estrutura) para definir um sistema em Matemática está de acordo com o espírito da época, e se a possibilidade de introduzir diferentes estruturas em um conjunto ' proporciona flexibilidade a esse sistema, devemos captar algo desse espírito no estudo da geometria no bacharelado. Necessitamos algumas idéias geométricas novas e audazes que nos convidam a libertar-nos de Euclides. Essa foi a tese de Dieudonné na conferência de Royaumont, onde assinalou os aspectos nos quais se poderia acelerar a reforma. Utilizando suas observações e as idéias de alguns dos que participaram do seminário de Dubrovnik, desejaria propor o seguinte programa de ensino de Geometria, a partir da idade de 11 anos até chegar aos cursos universitários. O tempo de que disponho me permite apenas apresentar o esquema principal desse programa, se bem que seja relativamente simples completar os seus detalhes:

GEOMETRIA DO BACHARELADO

Antes de ingressar na escola secundária, aos 11 anos ou mais, as crianças já devem ter adquirido uma grande quantidade de idéias geométricas, todas elas de natureza física. Aproveitando esses conhecimentos e utilizando métodos de laboratório, tais como os de medir, dobrar, desenhar e construir modelos, o aluno pode adquirir e empregar entre os 12 e os 15 anos toda a informação contida nos elementos de Euclides sobre Geometria plana e do espaço. Durante esse período, e pouco a pouco, pode abstrair os elementos conceituais essenciais tais como "ponto", "figura", "reta", "plano", "es paço", como construções puramente mentais, e generalizar as relações entre esses elementos até estabelecer certos encadeamentos dedutivos de teoremas sobre algo menos que uma base axiomática.

Entre os 14 e os 15 anos o aluno encontrará trabalho dedutivo adicional em Álgebra ao estudar novos sistemas numéricos e a estrutura algébrica. Aos 15 e 16 anos deverá ser capaz de combinar a Álgebra com a Geometria, em um estudo da geometria plana afim.

Em prosseguimento e a título de sugestão, segue-se um esboço do que se poderia fazer.

1. Introdução das classes de equivalência dos vetores livres; adição de dois vetores (como uma operação diferente da de dois números); o grupo dos vetores face à adição; teoremas e exercícios.

2. O produto de um vetor por um número real ou multiplicação por escalar e suas propriedades. Essas propriedades permitirão a demonstração de todos os teoremas da geometria plana afim. As de mais importância são:

   (a) Dado um ponto p e um vetor $\vec{v}$, uma reta é o conjunto dos pontos M para os quais $\overrightarrow{PM} = r\vec{v}$.

   (b) $\vec{v} = k\vec{v}$ implica que v e v' estejam sobre retas paralelas reciprocamente.

   (c) Se $k\vec{v} = h\vec{v}$ e $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ não estão sobre retas paralelas então $k = h = 0$

(d) Se $a\vec{v} + b\vec{w} = c\vec{v} + b\vec{w}$, então a=c e b=d, Sendo $\vec{v}, \vec{w} \neq 0$ e $\vec{v} \neq k\vec{w}$ (1)

3. Introdução das coordenadas e dos vetores centrados. Base do sistema de coordenadas e de projeção paralela e as componentes de um vetor. Poderemos, então, estabelecer a equação de uma reta no plano a fim de estudar suas propriedades.

4. Introdução da noção de perpendicularidade e de produto interno. Definir $a \perp b$ se $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{a} - \vec{b}$. Poderemos desenvolver, então, o teorema de Pitágoras, a lei dos cosenos e toda Geometria euclideana plana. Além disso poderemos relacionar a Álgebra com a Geometria, dando uma interpretação vetorial a um par de equações lineares com duas incógnitas.

Todo esse trabalho é Geometria real, elementar e preparatória para a maneira pela qual se utilizará a Geometria na Física e na Geometria Analítica. Pode-se utilizar como exemplo de um desenvolvimento axiomático. Possui estrutura. Segue as sugestões que Dieudonné e Choquet fizeram em Royaumont e Aarhus respectivamente e está completamente de acordo com os pontos de vista expressados por Henri Cartan em Bolonha, ao pedir que se levasse o estudante, tão diretamente quanto fosse possível, ao estudo da geometria afim e dos espaços vetoriais. Não foi sua intenção que se excluisse nem um dos passos pedagógicos neces-

(1) Nota do Tradutor

sários para tornar possível a transição entre a geometria intuitiva e esse material, porém pediu-se que todos os pontos desnecessários, por dedutivos que fossem (Geometria Projetiva, geometrias finitas etc) se postergassem.

À idade de 17, 18 anos, essa Geometria pode desenvolver-se, ainda, com a introdução do espaço euclideano a uma, duas e três dimensões. Junto com o estudo dos conjuntos, as operações entre conjuntos e as representações e o uso dos diversos sistemas de coordenadas, será essa a melhor preparação para o estudo da Análise, de que podemos dispor no momento.

No nível universitário, o estudo sistemático dos espaços vetoriais e da transformação linear' (Álgebra Linear) pode completar esse estudo da ' Geometria. Nessa etapa ninguém se perguntará se estará fazendo Álgebra ou Geometria. Adicional-'mente, deveria estudar-se a Geometria pura sob o ponto de vista moderno, tratando os fundamentos e as relações das geometrias finitas, a geometria afim, a geometria projetiva, a geometria conforme e a natureza do espaço (métrico, topológico e transformações).

Prosseguindo, citarei alguns dos movimentos principais do pensamento matemático que devam influir em nossa atitude quanto ao ensino da Geometria:

1. A descoberta das geometrias não euclideanas e sua influencia na axiomatização de todos os

ramos do estudo matemático.

2. As classificações das geometrias de Riemann, Klein e outros.

3. A aritmetização da Matemática efetuada, como sabemos, por Dedekind, Weiertrass, Cantor e outros.

4. O desenvolvimento da Geometria Diferencial.

5. O aperfeiçoamento da Geometria de Euclides nos fins do século passado.

6. O desenvolvimento dos espaços vetorial, métrico e topológico.

7. A tendência para as estruturas matemáticas e para a unidade da Matemática.

8. A importância de todos esses movimentos no reconhecimento do que é desejável no ensino geométrico ao nível da escola secundária. Isso indica que:

(a) O tratamento atual da Geometria de Euclides deve desaparecer. Contribui pouco para os estudos posteriores e se encontra fora das correntes principais da Matemática.

(b) O espaço é importante e deve ficar no cerne do ensino da Geometria. Deve desenvolver-se como um espaço aritmético, com estrutura vetorial e métrica euclideana.

(c) Toda a Geometria euclideana plana e do espaço deve ser aprendida informalmente nos primeiros anos da escola secundária.

(d) Nos programas universitários nascentes de Análise, uma parte importante se dedicará aos espaços vetoriais e à Álgebra Linear. O bacharelado deve ensinar aos estudantes a ver o espaço sob esse ponto de vista.

Para conseguir tudo isso necessitamos investigar e experimentar, com o propósito de encontrar um programa para o bacharelado que esteja em harmonia com o espírito contemporâneo da Matemática e com suficiente flexibilidade para poder adaptar-se aos novos procedimentos que vão surgindo na Matemática. Não deveremos permitir jamais que uma dada Geometria domine os programas de ensino e do pensamento dos homens de forma tal que impeça qualquer mudança, que é exatamente o que a de Euclides tem feito durante os últimos cem anos.

CONJUNTO N DOS NÚMEROS NATURAIS E O
PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

Trabalho de grupo realizado pelos alunos abaixo relacionados, do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, "lato-sensu", na disciplina Fundamentos da Matemática, ministrada pelo Prof. Cesar Dacorso Neto.

ROSANGELA COHEN
ELIANA BENITÁH
JANETE F. BOLITE

A DESCOBERTA E A DEMONSTRAÇÃO

Intuição e lógica - O pensamento matemático desenvolve-se em duas fases bem distintas: a da descoberta, posse imediata de uma verdade nova; a da demonstração, construção lógica dessa verdade. Guiado quase sempre por induções extremamente vagas, o trabalho criador começa por antecipar um resultado, e só depois encontra a ligação do fato novo aos fatos já admitidos, justificando-o e sancionando-o.

Sem pretender que haja uma oposição de fundo entre a ordem intuitiva e a ordem racional, de cuja harmonia nasce a obra de ciência, pode-se dizer que o espírito vê antes de compreender. E isso tanto é verdade do homem de gênio, quando cria, como do homem vulgar, quando aprende. Os fatos novos afloram à nossa consciência de um modo diverso daquele pelo qual nós os coordenamos e estabelecemos, dedutivamente. A pesquisa exige, sem dúvida, uma certa dose de lógica espontânea, mas o seu instrumento por excelência é a intuição, como o instrumento da demonstração é o raciocínio.

1. Todo o ritmo da história da matemática oscila entre essas duas tendências - entre o ponto de vista contemplativo de Platão e o ponto de vista construtivo de Euclides.

2. Os elementos não-dedutivos - Se a matemática construída é o tipo da ciência racional, a matemática em construção singularmente se asemelha às ciências experimentais. A pesquisa matemática faz constante apelo à imaginação geométrica, mecânica ou física, ao senso estético, a analogias e induções de toda a ordem.

Archimedes descobriu a quadratura da parábola pesando lâminas de metal. O mesmo processo foi mais tarde aplicado por Galileu à ciclóide e não faltam, na história da ciência, exemplos desse gênero.

A experimentação matemática - se assim se pode chamar - toma, porém, em geral, a forma abstrata da verificação de um resultado de cálculo. Para estudar um dado tipo de entidades, o matemático ensaia sobre casos particulares, compara-os entre si, observa as suas propriedades e procura, por analogia, estendê-las ao caso geral.

Encontram-se na teoria dos números interessantes exemplos de induções mais ou menos felizes. Fermat dizia-se, em uma carta a Pascal, "quase per suadido" de que os números da forma

$$2^{2^n} + 1 \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

são primos. Assim acontece, de fato, até $n = 4$, mas Euler mostrou que a propriedade já não se verifica para $n = 5$.

Um exemplo de indução aritmética até hoje não desmentida nem confirmada nos é dado pelo chamado teorema de Fermat:

A equação $x^n + y^n = z^n$ não tem solução no conjunto dos números inteiros, para $n > 2$.

Essa proposição só foi demonstrada para $n \leq 100$ e para certas classes de valores de n superiores a 100.

Se Fermat estava certo ou não ao enunciar seu grande teorema, não se sabe ainda, mas chegou-se à decisão sobre suas outras conjeturas em teoria dos números.

Talvez dois milênios antes de seu tempo tenha havido uma "hipótese chinesa" que dizia-n é primo se e sòmente se $2^n - 2$ é divisível por n, $n \in Z$, $n \geq 1$.

Eis aqui, por outro lado, um teorema enunciado por Waring desde 1770 e que só foi demonstrado em 1909: todo o inteiro positivo é uma soma de nove ou menos de nove cubos positivos.

A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA NOÇÃO DE NÚMERO

Os números naturais - Os povos de civilização rudimentar empregam correntemente os primei -

ros números cardinais e ordinais. Para indicar quantos peixes apanhou, um selvagem mostrará os dedos da mão; em sua simplicidade primitiva, é a relação de correspondência entre objetos de duas coleções, na qual a análise requintada reconhece a essência da noção de número.

O número natural nasceu da necessidade de se compararem umas às outras as grandezas discretas. As combinações dessas grandezas deram origem à idéia de operação sobre números. A prática da adição e o conhecimento mais ou menos claro das suas propriedades fazem parte da atividade mental elementar. Reunir coleções distintas em uma única, e prever o resultado, essa operação banal, é a gênese do pensamento matemático.

Enquanto não se passa da adição, o número natural é suficiente, supondo que foi convenientemente prolongada a seqüencia desses números e que se inventou um simbolismo para representá-los: um sistema de numeração.

Os documentos de fonte babilônica e egípcia revelam desde épocas muito remotas, um grande adiantamento nos processos de cálculo, compreendendo a adição, a multiplicação, a divisão, a determinação de quadrados e cubos. As tabelas babilônicas remontam ao ano 2300 a.C. e empregam os sistemas de numeração decimal e sexagesimal. Serviam os cálculos a fins exclusivamente utilitários: nas civilizações orientais, o número não passou de um auxiliar da prática, nas medidas, nas trocas comerciais, nas combinações do calendário.

É preciso esperar pela escola de Pitágoras para ver constituir-se uma verdadeira ciência do número puro. O gênio grego distinguiu categoricamente os números como auxiliares do cálculo, dos números considerados em si mesmos - entidades abstratas, possuindo propriedades dignas do estudo desinteressado.

As especulações de Pitágoras e dos seus discípulos lançam os fundamentos da teoria dos números, cuja utilidade prática é ainda hoje quase nula, e que fará nos tempos modernos a glória de um Fermat ou de um Gauss. Mas incontestavelmente a origem e a extensão progressiva da noção de número estão associadas às necessidades da prática vulgar, e só muito tarde essa noção adquiriu forma lógica.

A ESTRUTURA DA DEDUÇÃO MATEMÁTICA

O problema da dedução - Para a lógica clássica, o raciocínio dedutivo se reduz ao silogismo; não há dedução rigorosa senão dentro da forma silogística, que desce do geral ao particular, e cujo princípio é uma lei intrínseca do pensamento.

Ora, a Matemática nos apresenta a cada passo cadeias de proposições que se inferem umas das outras em sentido inverso ao do silogismo. As teorias matemáticas generalizam e conduzem a conclusões universais. Entretanto, seria impossível negar que algumas delas oferecem modelos perfeitos de dedução. O raciocínio matemático possui todos os caracteres de necessidade do raciocínio silogístico; e ainda mais, em vez da sua irremediável esterilidade, uma verdadeira capacidade criadora.

Assim, pois, o método das ciências matemáticas ultrapassa a lógica formal de Aristóteles e da Escolástica. Para desfazer o paradoxo, não basta' a vaga explicação tradicional de que a Matemática' emprega uma lógica da quantidade diferente da lógica da qualidade. A análise desse método demonstra que a lógica clássica é insuficiente para explicar certas formas de raciocínio, que merecem, tanto como o silogismo, ser consideradas como inerentes à estrutura da razão.

A renovação crítica da matemática teve como ' resultado uma imprevista ampliação do conceito de raciocínio dedutivo.

A fecundidade do raciocínio matemático explica-se, pois, segundo Poincaré, pela intervenção de princípios estranhos a essa disciplina.

Entre esses princípios está o do método de Recorrência a que muitos autores chamam impropriamente princípio de indução matemática ou de indução ' completa, e que se pode enunciar nos seguintes termos:

Se, por um lado, uma certa propriedade é verdadeira para um dado número inteiro m; se, por outro lado, acontece que, essa propriedade sendo verda-' deira para um número inteiro n, daí resulta que ela também é verdadeira para n + 1, qualquer que seja n, então a propriedade é verdadeira para todos os números inteiros a partir de m. Com efeito, a propriedade se transmite de m a m + 1, de m + 1 a m + 2, e assim por diante, ilimitadamente.

Esse princípio, apresentado pela primeira vez por Francesco Maurolico no Século XVI, intervém a cada passo nas demonstrações fundamentais da aritmética, e é um dos postulados de Peano. Como se verá posteriormente, Poincaré o considera como "raciocínio matemático por excelência."

Incontestavèlmente o princípio de recorrência introduz alguma coisa de novo na dedução, e, como diz L. Brunschwicg, "marca, em oposição à banalidade da lógica formal, um dos aspectos específicos do pensamento peculiar ao matemático."

Outros princípios do mesmo gênero se encontram em matemática, segundo Poincaré, que nos diz aliás, quais eles sejam. O princípio de recorrência, estranho à maior parte das demonstrações, é apenas um dos processos de generalização que utiliza essa ciência, e se aplica particularmente à sequência dos números inteiros. Por essa razão, alguns autores o consideram como uma verdadeira definição do número ordinal. Interpretação, digamos de passagem, por demais estreita, pois esse princípio rege todas as cadeias de objetos denominadas classes hereditárias.

A explicação de Poincaré é, em parte, justa. Admiti-la inteiramente, todavia, equivale a dizer que há uma lógica da matemática, especificamente distinta da lógica propriamente dita.

Pode-se, em vez disso, analisando mais profundamente o aparelho da demonstração matemática, expurgando-a de todos os elementos concretos e intui tivos - abstraindo, em suma, dos caracteres secundários - procurar descobrir um corpo mais amplo de relações lógicas que representem a estrutura de qualquer raciocínio dedutivo; uma nova lógica formal, mais compreensiva que a antiga. E efetivamente os trabalhos dos logicistas modernos, de Boole a Russel, reconheceram na trama do pensamento matemático uma riqueza de princípios lógicos que não só explicam a sua necessidade como a sua fecundidade; princípios verdadeiramente sintéticos, graças aos quais poderemos construir, de próximo em próximo, objetos cada vez mais complexos e relações cada vez mais gerais.

AXIOMAS DE PEANO

OS NÚMEROS NATURAIS - Os números 0,1,2,3,etc.,constituirão a nossa espécie fundamental de números; são chamados números naturais. Infelizmente a expressão é um pouco ambígua, pois alguns autores incluem o zero entre os naturais, enquanto outros não o fazem - mas não nos preocupemos com isso. A idéia intuitiva que temos dos números naturais é que são todos os números cada um dos quais pode ser obtido principiando com o zero e somando um, tantas vezes quantas forem necessárias. O matemático italiano Peano foi o primeiro a organizar as leis fundamentais desses números em um corpo axiomático. Examinemos esses axiomas para conhecermos mais de perto os números naturais. Os axiomas de Peano (fim século XIX, início século XX) postos em palavras, são estes:

1. Zero é um número natural