BOLETIM

JUNHO/83

15

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

DIRETORIA DO GEPEM

PRESIDENTE: Moema Mariani de Sá Carvalho

VICE-PRESIDENTE: José Carlos de Mello e Souza

DIRETOR CULTURAL: Amélia Maria N.P.de Queiroz

SECRETÁRIO GERAL: Vera Maria Ferreira Rodrigues

SECRETÁRIO: Regina Célia Monken

DIRETOR DE PUBLICAÇÕES: M.Laura Mouzinho Leite Lopes

ASSESSOR DE PUBLICAÇÕES: Maria José Monnerat

1º TESOUREIRO: Wilson Belmonte dos Santos

2º TESOUREIRO: Francisco Estarque Casás

ELEITA PARA O BIÊNIO 84/86
EM 27 DE MARÇO DE 1984

APRESENTAÇÃO

> "A verdadeira ciência não está na solução de problemas, os quais, muitas vezes, dependem de habilidades específicas, intelectuais ou mecânicas, mas sim no enunciar de novas situações-problema ou dar nova interpretação a enunciados já resolvidos."
>
> (Einstein)

Em primeiro lugar, gostaríamos de comunicar que, por problemas financeiros, a publicação dos Boletins está defasada, motivo que nos leva a condensar, neste número 15, os dois últimos números, pretendendo regularizar a semestralidade nos próximos.

Na busca de textos, palestras e experiências que auxiliem os professores de Matemática a melhorar a qualidade de ensino, objetivando o melhor desempenho dos alunos na escola e na vida, selecionamos para este boletim:

. um artigo sobre o ensino de Geome -, tria, da professora Maria Laura M. Leite Lopes, em que são abordados pontos de vista importantes sobre a Geometria na escola, desde as primeiras séries do 1º grau, e uma visão abrangente de seu conceito;

. um texto versando sobre jogos lógicos, de autoria das professoras Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb, que, a partir de um jogo publicado no Jornal do Brasil, tecem considerações sobre Lógica Matemática, através da solução do problema proposto;

. procurando aprofundar o grau de consideração das características bio-psicológicas dos alunos, um artigo da professora Moema M. de Sá Carvalho sobre o ensino da Matemática entre nós: "Alunos despreparados".

. texto sobre o computador no ensino fundamental, da professora Amélia Maria Noronha Pessoa de Queiroz, em que é feita uma apreciação sobre a introdução de noções e/ou utilização de computadores no ensino de 1º e 2º graus;

. palestra proferida por Herminia Sinclair, da Universidade de Genebra, no IV Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em 1980, em Berkeley, sobre a aquisição da linguagem e a compreensão de Matemática, que traz uma grande contribuição para o processo ensino-aprendizagem;

. relato de experiência da professora Janete Bolite Frant, sobre coordenação vertical de Matemática, realizada no Colégio Pernalonga-Isa Prates;

. o discurso de paraninfo da professora Estela Kaufman Fainguelernt, em que são ressaltadas a missão e a responsabilidade social do professor, destacando-o como principal dinamizador do processo educacional na escola e na universidade.

Gostaríamos de viver e sentir uma verdadeira participação de nossos sócios na elaboração dos boletins, para que seu campo de idéias e ação se amplie cada vez mais. Envie-nos sugestões, artigos e experiências que você tenha realizado, para que seus colegas também possam delas usufruir.

Amélia Maria N. P. de Queiroz
Editora do Boletim

SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA

Maria Laura M. Leite Lopes

"A Geometria conduz a alma à verdade."
(Platão)

Como todo conhecimento humano, a GEOMETRIA começou com intuições , partindo da resolução de problemas práticos de medida da terra e, posteriormente, de navegação. Neste sentido, pode ser considerada a primeira teoria física na tentativa do homem descrever o seu Universo.

Os antigos papiros, quer sejam egípcios, babilônios, caldeus ou chineses, testemunham que 2 000 anos a.C. existiam práticas geométricas para cálculos de áreas e resultados pertinentes sobre propriedades dos triângulos.

O processo lógico dedutivo foi iniciado pela escola grega. A síntese dos conhecimentos da época está contida nos 13 volumes do célebre tratado "Os Elementos" de Euclides, cujo impacto permanece, até hoje, 25 séculos depois, norteando o ensino da Geometria. Provavelmente este impacto reside no fato de que foi através da obra de Euclides que nos veio o ideal de um desenvolvimento lógico e consistente da Matemática, como observa Felix Klein em "Elementary Mathematics, vol.II, Geometry".

Contudo, no que respeita à sala de aula, as seguintes afirmações de Richard Courant deveriam pautar a atuação do professor:(1)

"Em Educação Matemática é verdade que o método dedutivo, começando com axiomas aparentemente dogmáticos, proporciona um atalho para a travessia de um extenso território. Entretanto, o método socrático, construtivo, partindo do particular para o geral e que evita o impulso dogmático, conduz com mais segurança à formação do pensamento produtivo independente..."

(1) Richard Courant. "Matemáticas en el mundo moderno". Selecciones de Scientific American y Editorial Blume.

"... A intuição, esse elemento vital e tão sutil, está sempre motivando e guiando o pensamento, mesmo o mais abstrato..." (1)

O ensino da Geometria, na nossa escola do 1º grau, é quase inexistente no primeiro segmento. Espera-se para introduzir na 7a. série uma Geometria axiomatizada na suposição de que o aluno alcançou o estágio do pensamento dedutivo abstrato por volta dos 12-13 anos.

Analisemos esta distorção, notando que:

(i) os alunos da 7a. série não se encontram na fase das operações formais e, talvez, alguns não estejam nem na das operações concretas;

(ii) não é possível o aluno aceitar dogmaticamente certos fatos sem terem passado pelos seus sentidos através de manipulações;

---

(1) Idem, ibidem

(iii) a axiomática da Geometria Euclidiana que se lhe impõe não é a mais conveniente pela sua artificialidade, seu dogmatismo e sua inadequação ao estágio atual do desenvolvimento da Matemática.

A primeira asserção não será discutida nestas notas, por ser um assunto mais ligado à Psicologia que à Matemática. Salientemos, todavia, que o professor que ignora o estágio do desenvolvimento cognitivo de seus alunos está fadado ao insucesso. Infelizmente, são bastantes e numerosos aqueles professores que agem sem o menor conhecimento das possibilidades intrínsecas (físicas e psicológicas) dos alunos.

A segunda afirmação encontra respaldo nas palavras de Courant e na nossa experiência pessoal quando procuramos introduzir, desde o pré-escolar, noções geométricas para crianças de 3-4 anos, como preconizam vários pedagogos-matemáticos.

Sabemos, da Psicologia da Aprendizagem, que o processo de aquisição de um conhecimento não é imediato; necessita de uma maturação a ser feita ao longo de vários anos.

Então, como e quando iniciar as observações dos fatos geométricos?

A nosso ver, as idéias geométricas de *caminhos* e de *forma* são as primeiras noções a serem incorporadas pela criança na tentativa de explorar o seu universo e de procurar ampliá-lo. Também o homem, desde as mais remotas épocas, enfrentou situações análogas ao ter de posicionar-se em relação ao seu meio ambiente e deslocar-se a fim de obter alimentos para a sua subsistência. Afastar-se do local onde se abrigava constituia-se num problema (geométrico) a resolver: qual o *caminho* a percorrer e como regressar? Quais os seus referenciais espaciais?

Outro problema para o homem primitivo teria sido: qual a forma da pedra a ser arremessada para alcançar determinada caça à determinada dis tância?

Se tais problemas são vivenciados pelo homem no seu desenvolvimento ontogênico como o foram no filogênico, por que, então, deixar passar um tempo longo e precioso para depois autoritariamente introduzir, nas escolas, noções geométricas sem relacionamento com as experiências que as originaram? Por que começar sempre por conceitos ligados à medida? Por que a axiomatização?

Parece que as razões são claras e decorrem do ranço histórico constantemente presente no ensino.

A axiomatização vem, como dissemos de início, da obra de Euclides que apesar de ser uma série de compêndios tanto de Aritmética como de Geometria tornou-se, na nossa civilização ocidental, o paradigma de tratado da segunda. Podemos dizer que copiou-se, traduziu-se e adulterou-se "Os Elementos", mas sempre pautou-se por ele o ensino da Geometria, conservando-se os defeitos e esquecendo-se os méritos.

Quanto à iniciação por conceitos métricos, deve-se ao fato de que foram práticas de medidas que nos chegaram através da tradição oral ou escrita dos povos antigos. Se, ao menos na sala de aula, os conceitos métricos decorressem da resolução de situações-problema da vida cotidiana dos alunos, como aconteceu no Egito ou na China, nada poderíamos objetar.

O grande mal do ensino da Matemática em geral, e da Geometria, em particular, é a artificialidade das situações inventadas pelos professores, propondo problemas que só passam pelas suas cabeças. Não há preocupação de ligar situações à vivência do aluno como também não correspondem, de um modo geral, ao desenvolvimento de suas estruturas mentais.

Estas considerações acerca do ensino da Geometria foram escritas em 1979 para "Cadernos

Pedagógicos", do Centro Educacional de Niterói (CEN), com o título "Sobre o Ensino da Geometria".

O professor Alan Hoffer, no artigo "Geometry is more than proof", publicado na "Mathematics Teacher", janeiro de 1981, vem reforçar a nossa argumentação.

O quadro anexo das habilidades básicas em Geometria mostra que o estudo da Geometria pode, progressivamente, acompanhar o desenvolvimento cognitivo da criança.

Bem mais tarde, sempre através de manipulações, podemos tratar de problemas de medida. Devemos, contudo, distanciar a introdução dos conceitos de perímetro e de área para permitir a sedimentação do primeiro e, em seguida, apresentar o segundo.

Nunca é demasiado lembrar que preconizamos uma Geometria Experimental, onde as formas gozam de uma gama rica de sugestões de trabalho.

Ainda queremos insistir no fato da necessidade de aproveitar a vivência da criança num mundo tridimensional, evitando, assim, o achatamento de sua percepção que, graças aos esforços dos professores, passa a ser plana. Portanto, não deixar de lado manipulações com sólidos geométricos para integrar nos conhecimentos gerais do aluno as propriedades características dos corpos no espaço e algumas propriedades de retas e de planos.

Ainda como práticas podem ser estudados os problemas clássicos da Geometria Euclidiana plana, usando-se e abusando-se das construções de desenho geométrico. Temos que dar aos alunos os instrumentos que os povos antigos possuiam para resolver os seus problemas de agrimensura, de navegação ou de arquitetura.

Para iniciar a criança com as práticas dedutivas é essencial que, ainda no período pré-operatório, sejam sugeridos jogos com material concreto obedecendo a certas regras. Deve-se mesmo introduzir ludicamente os axiomas da Geometria de Incidência desde que se evitem as palavras "ponto" e "reta" tão carregadas de significado tradicional.

Uma grande variedade de objetos e relações entre eles que satisfaçam às regras estabelecidas induzem o aluno a perceber, mais tarde, quais os sentidos de "elementos primitivos" e de "axiomas" que são as bases do tratamento lógico-dedutivo da Matemática.

Quando o aluno atingir o período das operações formais e dominar as práticas aqui expostas, então, uma axiomática pode ser introduzida. No presente estágio do desenvolvimento da Matemática pode-se reduzir a Geometria Euclidiana ao estudo de alguns capítulos da Álgebra Linear com a vantagem de fazer o aluno penetrar num ramo de conhecimento que é, como afirma Dieudonné, "uma das teorias mais centrais e mais eficazes da Matemática Contemporânea, rica em aplicações as mais variadas da Teoria dos Números à Física Teórica, passando pela Análise, a Geometria e a Topologia..." (2)

---

(2) Jean Dieudonné,"Algèbre Lineaire et Geomé - trie élémentaire". Hermann, Paris, 1964.

Nível / Habilidades	I. Reconhecimento	II. Análise	III. Síntese	IV. Dedução	V. Rigo
Visual	Reconhecer . diferentes figuras num desenho . informações fornecidas numa figura.	Observar propriedades de uma figura. Identificar uma figura como parte de outra figura maior.	Reconhecer interrelações entre diferentes tipos de figuras. Reconhecer propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usar informações sobre uma figura para deduzir mais informações.	Reconhecer que ções são injust quando se faz u guras. Conceber figura nadas em vários dedutivos.
Verbal	Associar o nome correto de uma figura dada. Interpretar frases que descrevem figuras.	Descrever precisamente várias propriedades de uma figura.	Definir palavras correta e concisamente. Formular sentenças mostrando interrelações entre figuras.	Compreender as distinções entre definições, axiomas e teoremas. Distinguir o que é dado num problema do que é pedido para encontrar ou fazer.	Formular extens sultados conhec Descrever vário mas dedutivos.
Gráfica	Fazer esboços de figuras destacando, com precisão, as partes dadas.	Transferir informações dadas verbalmente para um desenho. Usar propriedades dadas, para desenhar ou construir figuras.	Ser capaz de construir figuras relacionadas com certas figuras dadas.	Reconhecer quando e como usar elementos auxiliares numa figura. Deduzir de informações dadas como desenhar ou construir uma figura específica.	Compreender as e possibilidade rias representa ficas. Representar gra conceitos não u vários sistemas
Lógica	Perceber que há diferenças e semelhanças entre figuras. Compreender a conservação da forma de uma figura em várias posições.	Compreender que figuras podem ser classificadas em diferentes tipos. Reconhecer que propriedades podem ser usadas para distinguir figuras.	Compreender qualidades de uma boa definição. Usar propriedades das figuras para determinar se uma classe de figuras está contida em outra classe.	Usar regras de lógica para desenvolver demonstrações. Ser capaz de deduzir conseqüências de informações dadas.	Compreender as e possibilidade teses ou axioma Reconhecer quar tema de axiomas pendente, consis categórico.
Aplicação	Identificar formas geométricas nos objetos do meio ambiente.	Reconhecer propriedades geométricas de objetos do meio ambiente. Representar fenômenos físicos em papel ou num modelo.	Entender o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	Ser capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. Ser capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usar modelos m para represent mas abstratos. Desenvolver mo máticos para fenômenos físi ciais e natura

(*) Traduzido de "Mathematics Teacher" janeiro 81 p. 11-18
Alan Hoffer "Geometry is more than proof".

JOGOS LÓGICOS

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb

A lógica matemática está entrando no dia-a-dia do nosso povo.

Jogos que exigem o domínio do raciocínio dual (verdade-falsidade) aparecem cada vez com maior freqüência em revistas de divulgação popular.

Na Revista de Domingo do Jornal do Brasil, número 337 de 3 de outubro de 1982, na seção de jogos, é publicado o seguinte problema:

Quem é quem ?

São quatro senhores: Narciso, Jasmim, Lírio, Jacinto, que estão segurando flores diferentes: violeta, rosa, margarida, hortênsia; e que estão noivos destas quatro senhoritas: Hortênsia, Violeta, Margarida, Rosa.

Baseando-se no que eles dizem, e usando raciocínio e lógica, descubra o nome da noiva de cada um e a flor que cada um tem consigo.

O problema exige, como é dito no enunciado, raciocínio lógico, assim como algum conhecimento matemático. Uma, ou melhor, várias tabelas de dupla entrada constituem um esquema que facilita a resolução do problema.

No problema existem três tipos de variáveis , a saber: os senhores, as senhoritas, as flores. Existem, portanto, três possíveis tabelas de dupla entrada: senhores x senhoritas; senhores x flores; senhoritas x flores. Este número três, das tabelas de dupla entrada, é o resultado da combinação de três elementos (os tipos das variáveis) tomados dois a dois ($C_3^2 = 3$). Se o problema envolvesse quatro tipos de variáveis, teríamos seis tabelas de dupla entrada ($C_4^2 = 6$).

As três tabelas podem ser colocadas em um esquema prático, para facilitar seu uso.

		SENHORITAS				FLORES			
		Marg.	Rosa	Viol.	Hort.	marg.	rosa	viol.	hort.
SENHORES	Narc.								
	Jasm.			1º quadro				2º quadro	
	Lírio								
	Jac.								
FLORES	margarida								
	rosa			3º quadro					
	violeta								
	hortênsia								

O 1º quadro indica: O senhor ... é noivo de ...

O 2º quadro indica: O senhor ... tem na mão ...

O 3º quadro indica: A flor ... está na mão do noivo de ...

USO DO ESQUEMA

Após ler as informações contidas no problema, assinalamos nas tabelas com V um "sim" e com X um "não".

Quando tivermos marcado no esquema as informações dadas pelo problema, induzimos todas as conclusões possíveis. Por exemplo:

- Se numa linha (ou coluna) existe um sinal V, preenchemos os outros espaços da linha e coluna correspondente com X.

- Se numa linha (ou coluna) houver X em todos os espaços exceto um, neste poremos o sinal V.

- Se descobrimos que o elemento A corresponde a B, e que B corresponde a C, podemos concluir que A corresponde a C.

RESOLVENDO O PROBLEMA DADO

As informações contidas no problema são dadas, tanto pelas imagens, quanto pelas falas dos quadros desenhados.

No primeiro desenho obtemos as informações a seguir:

- O senhor que segura violetas não se chama Narciso nem Jasmim.

- O senhor Narciso não segura hortênsias.

- O senhor Jasmim não é noivo de Margarida.

- O senhor que segura violeta não é noivo de Rosa.

Transferindo estas informações para o esquema temos:

	M	R	V	H	m	r	v	h
N							X	X
Jas	X						X	
L								
Jac								
m								
r								
v		X						
h								

Pelo segundo desenho obtemos as informações:

- Os senhores não seguram flores com nome da respectiva noiva.

Acrescentamos esta informação no esquema:

	M	R	V	H.	m	r	v	h
N							X	X
Jas	X						X	
L								
Jac								
m	X							
r		X						
v		X	X					
h				X				

Pelo terceiro desenho obtemos as informações:
- o senhor que segura margaridas não se chama Lírio nem Jacinto.
- Lírio não é noivo de Violeta.
- Lírio não segura hortênsias.

Acrescentamos estas informações nos esquemas:

	M	R	V	H	m	r	v	h	
N							X	X	
Jas	X						X		
L			X		X			X	
Jac					X				
m	X								
r		X							
v		X	X						
h				X					

Pelo quarto desenho obtemos as informações:

- O senhor que segura hortênsias não é noivo de Rosa.
- O senhor que segura hortênsias não se chama Jacinto.
- Jacinto não segura violetas.
- Jacinto não é noivo de Hortênsia.

Acrescentamos estas informações no esquema:

	M	R	V	H	m	r	v	h
N							X	X
Jas	X						X	
L			X		X			X
Jac				X	X		X	X
m	X							
r		X						
v		X	X					
h		X		X				

Escrevamos este último estágio do esquema, onde estão anotadas todas as informações contidas nos desenhos e procuremos aferir novas informações.

- no 3º quadro, 2ª coluna e 1ª linha, podemos colocar V e preencher o restante da $1^{\underline{a}}$ linha com X.

- no 2º quadro, $4^{\underline{a}}$ coluna e $2^{\underline{a}}$ linha, podemos colocar o sinal V e preencher o restante da $2^{\underline{a}}$ linha com X.

- no 2º quadro, $3^{\underline{a}}$ coluna e $3^{\underline{a}}$ linha, podemos colocar o sinal V e preencher o restante da $3^{\underline{a}}$ linha com X.

- no 2º quadro, $2^{\underline{a}}$ coluna e $4^{\underline{a}}$ linha, podemos colocar o sinal V e preencher o restante da $2^{\underline{a}}$ coluna com X.

O esquema fica, assim, com o aspecto a seguir:

	M	R	V	H	m	r	v	h
N						×	×	×
Jas	×				×	×	×	✓
L			×		×	×	✓	×
Jac				×	×	✓	×	×
m	×	✓	×	×				
r		×						
v		×	×					
h		×		×				

Observando o esquema vemos que ainda podemos colocar o sinal V no espaço correspondente à $1^{\underline{a}}$

linha e 1ª coluna do 2º quadro.

	M	R	V	H	m	r	v	h
N					✓	X	X	X
Jas	X				X	X	X	✓
L			X		X	X	✓	X
Jac				X	X	✓	X	X
m	X	✓	X	X				
r		X						
v		X	X					
h		X		X				

Podemos, agora, induzir outras informações, a saber:

- O senhor que segura margaridas é noivo de Rosa.

- Narciso segura margaridas.

Logo: Narciso é noivo de Rosa.

- Jasmim segura hortênsias.

Logo: Jasmim não é noivo de Hortênsia (de acordo com a fala do segundo desenho).

Deste modo, temos:

	M	R	V	H	m	r	v	h
N	X	V	X	X	V	X	X	X
Jas	X	X		X	X	X	X	V
L		X	X		X	X	V	X
Jac		X		X	X	V	X	X
m	X	V	X	X				
r		X						
v		X	X					
h		X		X				

Temos que:

- no 1º quadro, 4ª coluna e 3ª linha, podemos colocar V e preencher o resto da 3ª linha deste quadro com X.

- no 1º quadro, 3ª coluna e 4ª linha, podemos, devido à observação anterior, colocar V e preencher o resto da 4ª linha com X.

- resta, agora, colocar V na 3ª coluna e 2ª linha.

	M	R	V	H	m	r	v	h
N	X	V	X	X	V	X	X	X
Jas	X	X	V	X	X	X	X	V
L	X	X	X	V	X	X	V	X
Jac	V	X	X	X	X	V	X	X
m	X	V	X	X				
r		X						
v		X	X					
h		X		X				

Poderíamos completar o 3º quadro com os re - sultados já obtidos, mas isto não é necessário, uma vez que, preenchidos os dois primeiros quadros, o problema está resolvido.

Solução do problema:

Senhor	Senhorita	Flor
Narciso	Rosa	margarida
Jasmim	Violeta	hortênsia
Lírio	Hortênsia	violeta
Jacinto	Margarida	rosa

Usando este processo o leitor pode tentar re solver os problemas a seguir, cujas respostas se acham no final do presente artigo.

PROBLEMAS PROPOSTOS*

1) Três meninas, Ana, Beatriz e Célia, cujos so brenomes são Dória, Esteves e Fialho (não neces sariamente nesta ordem) têm 7, 9 ou 10 anos (não necessariamente nesta ordem).

Sabendo que a menina, cujo sobrenome é Dória, é 3 anos mais velha que Célia, e que a menina cu

---

* A.J.Duncum - Logic Problems, nº 11. Quality Puzzle Magazines. British European Associated Publishers Ltd.

jo sobrenome é Fialho tem 9 anos, qual o nome, me, o sobrenome e a idade de cada menina?

2) Cinco jovens tomam parte em um campeonato de natação. Seus nomes são Adriano, Cristina, Décio, Elizabeth, Fábio. Seus sobrenomes (não necessariamente nesta ordem) são Gomes, Lopes, Martins, Nunes, Osório.

Os clubes representados, um para cada competidor, são Flamengo, Fluminense, Vasco, Botafogo, América. As competições de que os nadadores participam, uma para cada nadador são de: 100 m costas, 100 m borboleta, 100 m livres, 200 m costas, 200 m livres.

Sabemos que:

- As competições de 200 m são só para homens, mas nenhuma foi ganha por nadador do Fluminense.

- Cristina Nunes não competiu em nado livre.

- A pessoa cujo sobrenome é Gomes, que representa o Flamengo, não nadou de costas, mas seu nome é Décio.

- O campeão de borboleta tem sobrenome Lopes.