ele liquidou o problema dos números relativos.

Sabe-se que a concepção geométrica dos números complexos já fora elucidada por C. Wessel (1798) e J.R. Argand (1813). As publicações desses obscuros autores passaram totalmente despercebidas; e foi somente em 1831 que Gauss descobriu o plano complexo, rapidamente popularizado no mundo matemático.

Isto prova que a trivialização dos números relativos se estendeu por mais de quinze séculos, enquanto os números complexos só traumatizaram os matemáticos por cerca de quatro séculos.

Ademais, é significativo que tais feitos tenham sido realizados por "não graduados". Mesmo Hankel, que gozava de certa consideração na Alemanha, não foi evidentemente um matemático de alto gabarito. E foram motivos pedagógicos que suscitaram os trabalhos de Wessel e Argand.

Os epistemólogos devem entender que os maiores gênios, que, em geral confiam, com justiça, na agudeza de suas intuições costumam frear o progresso em campos análogos aos que examinamos aqui. Eles minimizam a necessidade de esclarecimento exigido em assuntos nos quais, na prática, se desincumbem bem.

Suas primeiras dúvidas só aparecem excepcionalmente, quando se trata de explicar aos outros. Ainda então, eles costumam utilizar uma pedagogia ostensiva:"Vejam-me fazer ! Imitem-me ! Não tentem compreender por que é que meu "truque" dá certo !"

Surge assim outro obstáculo que se manifesta constantemente desde o início: o obstáculo da dificuldade despercebida. O problema da explicação da regra dos sinais foi sempre uma questão desprezada. Muitos grandes ma temáticos teriam vergonha de confessar que nem tudo era claro para eles nesse assunto elementar.

A revolução realizada por Hankel consiste em abordar o problema de *uma perspectiva totalmente diversa*. Não se trata mais de extrair da Natureza exemplos práticos que "expliquem" os números relativos de modo metafórico. Tais números não são mais *descobertos*, mas *inventados*, *imaginados*.

Conhecendo, por exemplo, as propriedades aditivas de $\mathbb{R}$ e a multiplicação de $\mathbb{R}^+$, Hankel propõe explicitamente estender a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$, respeitando um *princípio* de permanência: a estrutura algébrica procurada deve ter boas propriedades.

A existência e unicidade dessa extensão resulta do seguinte teorema: a única multiplicação em $\mathbb{R}$, que estende a multiplicação usual em $\mathbb{R}^+$, *respeitando* a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais.

Uma vez formulado o problema, a demonstração é trivial:

$$0 - a \times 0 = a \times \quad + \text{op.}b) = ab + a \times (\text{op.}b)$$

$$0 = 0 \times (\text{op.}b) = (\text{op.}a) \times (\text{op.}b) + a\, (\text{op.}b)$$

Donde:

$$(\text{op.}\ a) \times (\text{op.}b) = ab$$

Aliás, esta demonstração nem mesmo é original. Ela figura em essência em muitos textos anteriores, sobretudo em McLaurin e Laplace. Nota-se entretanto uma diferença considerável: Laplace acredita na existência, a priori, de uma multiplicação dos relativos, na Natureza. Segundo ele, basta descobri-la, e o raciocínio precedente prova que isto só é possível de acordo com a regra dos sinais.

Compare-se esta situação à de Hamilton,

inventando os quatérnios. Ele também acreditava, no início, na existência de uma multiplicação *natural*, num "espaço complexo" de três dimensões, estendendo a do plano complexo. Mas, entendendo que isso era impossível, renunciou à comutatividade e acrescentou mais uma dimensão !

Ficou assim refutada a argumentação neoplatônica de René Thom (1974) que pretende que os conceitos matemáticos sejam preexistentes, talvez não na Natureza, mas no espírito humano, sob forma de *arquétipos*. Toda descoberta seria apenas uma *reminiscência*. A história de 1600 anos de confusão a respeito de números relativos prova que a emergência da regra dos sinais não poderia ser fruto de uma superficial *maiêutica* socrática. E a aventura dos quatérnios confirma que pode acontecer que um progresso seja obtido *contra* os arquétipos simplistas que atravancam o inconsciente humano.

VI. Os Últimos Obstáculos

Os obstáculos antes assinalados não constituem o essencial dos entraves ao esclarecimento da questão dos números relativos. A perturbação introduzida por Hankel inscreve-se na *rutura de uma ideologia* que impregnava o pensamento matemático até o fim do século XIX.

Essa ideologia referia-se ao que se pensava inconscientemente sobre as relações mantidas pela Matemática com a realidade física.

Lembremo-nos de que os conceitos matemáticos têm sua origem remota na vida prática. Mas um salto epistemológico decisivo foi efetuado na Antiguidade, quando se proclamou que os objetos matemáticos devem ser convenientemente *idealizados* para inserir-se num discurso hipotético-dedutivo: uma reta não é um bastão; o número π é coisa muito diferente da medida de um barbante enrolado num cilindro !

Os "Elementos" de Euclides tiveram o mérito de sugerir as regras do processo dedutivo. À frente de cada livro, enuncia-se uma lista de proposições preliminares que devem ser admitidas. Depois disso, o raciocínio deve ser exercido sem qualquer outro recurso à experiência sensível.

A ideologia denunciada consiste nisto: todas as regras de conduta de Euclides foram constantemente proclamadas, mas não foram escrupulosamente respeitadas. O matemático subentendia derrogações julgadas "evidentes" para a disciplina axiomática.

Ao lado das certezas trazidas pela demonstração, insinua-se um outro critério de verdade: a <u>luz natural</u> do espírito. Já vimos essa luz obscurecendo a maior parte dos textos anteriormente citados. Esta ideologia é particularmente bem expressa por Blaise Pascal em seu opúsculo póstumo (1658).

> "A ordem da geometria, escreve ele, não define tudo e não prova tudo; mas apenas supõe coisas claras e constantes pela luz natural e, por isto, ele é perfeitamente verdadeira, sustentada pela natureza em lugar do discurso".

E acrescenta:

> "Isto é o que a geometria ensina perfeitamente. Ela não define nenhuma destas coisas, espaço, tempo, movimento, número, igualdade, nem os numerosos similares, pois tais termos designam tão simplesmente, para os que entendem a língua, as coisas que significam, que o esclarecimento que poderíamos fazer traria mais obscuridade do que instrução".

De outro modo, nós disporíamos de uma intuição, uma idéia preconcebida do que deve ser um "verdadeiro" número. Quando um raciocínio formal contradiz os ensinamentos da luz natural, surgem os obstáculos encontrados por d'Alembert e Carnot. Se criamos novos objetos matemáticos que afrontam os preconceitos, aqueles são classificados como incompreensí veis, inconcebíveis, absurdos, surdos, irracionais, falsos, imaginários, etc.

Quando, no decurso da história das ciências, o jogo formal ou a experiência revelaram algum objeto intelectual contradito pela luz natural, passava-se a caçar um "bom modelo", familiar à época. Assim, a invenção das geometrias não-euclidianas só se tornou segura, quando Beltrami, Gauss e Poincaré lhe propuseram representações intelectualmente manipuláveis.

Mas os objetos "abstratos", não identificáveis na vida prática, foram, em geral, recebidos com os receios de um profano ao contemplar uma obra de arte cubista ou surrealista, murmurando: "Que é isso ?"

Assim, o passo decisivo encetado por Hankel é parte de uma vasta rejeição da ideologia da luz natural.

Desde então, aceita-se facilmente que $(-3)^2 > (+2)^2$, pois este resultado é coerente com a dedução formal, e não haveria mais preocupações com o fato de que isto pudesse chocar-se com as idéias preconcebidas de um Lazare Carnot.(*)

No plano da filogênese, isto equivale ao que, em Piaget, representa a passagem ao estágio das operações formais. Essa mudança de ponto de vista constitui uma verdadeira revolução coperniciana, passo essencial da formação do espírito científico. Eis o que diz a respeito Gaston Bachelard:

> "A opinião pensa mal; ela não pensa: ela traduz necessidades de conhecimento. Designando os objetos por sua utilidade,

(*) Esta inversão é comparável a fenômenos observados em salas de aula, e que alguns designam por "espera do professor", ou por "contrato didático". Antes de Hankel, procurava-se um tipo de explicação impossível para a regra dos sinais. A passagem à explicação formal é uma mudança brusca de problemática, que depende do "pensamento lateral", apreciado por de Bono.

> ela se impede de conhecê-los. Nada se pode fundamentar na opinião, antes é preciso eliminá-la. Ela é o primeiro obstáculo a transpor. Não bastaria, por exemplo, retificá-la em pontos particulares, mantendo, como uma espécie de moral provisória, um conhecimento vulgar provisório. O espírito científico nos proíbe de manter uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questão que não sabemos formular claramente. Antes de tudo é necessário saber colocar os problemas. E, por mais que se fale, na vida científica, os problemas não se colocam por si mesmos. É precisamente este sentido do problema que marca o verdadeiro espírito científico. Para um espírito científico, o conhecimento é uma resposta a uma questão. Se não houver questão, não pode haver conhecimento científico. Nada anda sozinho. Nada é dado. Tudo é construído".

No entanto, a legitimação dos números relativos teria podido ocorrer muito antes, evitando-se o obstáculo (5). Bastaria que se dispusesse de um bom modelo, familiar à época e suscetível de ilustrar todas as principais propriedades do sistema numérico.

Um modelo eficaz deveria satisfazer às seguintes condições:

a. explicar simultaneamente a adição e a multiplicação dos números relativos, bem como as interações dessas operações.

b. basear-se em operações internas.

c. ser suficientemente familiar aos que ainda ignoravam os números relativos.

Vimos que o modelo comercial dos ganhos e dívidas é um obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas. Acidentes pedagógicos, aliás, são possíveis com alunos não familiarizados com este exemplo:

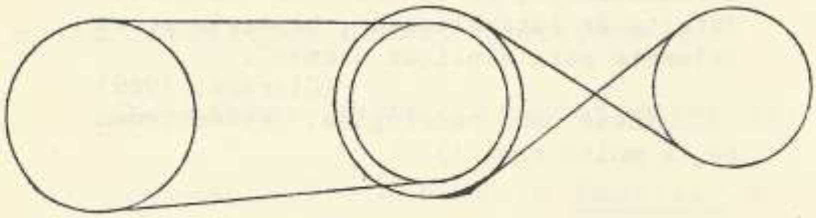
> Um caso:"Pudemos observar um aluno de 14 anos, aplicado e de inteligência média, que tinha grandes dificuldades no manejo dos números relativos. Para efetuar (+5) + (-7), ele recitava mentalmente a regra, lembrando-se de que os números tinham sinais contrários, etc., levando assim cerca de um minuto para chegar ao resultado exato. Ele se cansava muito rapidamente e terminava por cometer numerosos erros. Verificou-se que os pais do menino nunca o haviam mandado fazer compras. Aos 14 anos, ele não sabia pegar ou prestar contas do dinheiro !

> O ensino concreto dos números relativos a partir de ganhos e perdas parecia-lhe, pois, totalmente abstrato. Esta circunstância, associada a um manifesto defeito de lateralização, bastaria provavelmente para explicar o caso".
>
> (Glaeses, 1969)
>
> (Esse caso patológico, evidentemente, é muito raro !)

Outro modelo, evidentemente, vinha à mente de todos os matemáticos: o de Euclides, em que a multiplicação de duas distâncias é representada por uma <u>área</u>. Este modelo apresenta todos os inconvenientes relacionados a uma operação externa. Mas, para que se possa explicar a multiplicação dos números relativos, seria necessário que se dispusesse previamente da idéia de uma <u>área orientada</u>. Chegou-se, assim, inevitavelmente, a um círculo vicioso, pois a noção de área orientada se baseia na regra dos sinais, ou sobre preliminares ainda mais elaboradas.

Na falta de melhor, pode-se ilustrar a

regrados sinais utilizando transmissões de correias:



As correias cruzadas invertem o sentido de rotação e podem, assim, representar números negativos. Uma vantagem didática deste dispositivo é que ele permite apresentar numerosas relações de transmissão, jogando com as razões entre os raios das rodas. Não se pode, porém, racionalmente, *adicionar* correias. Essa metáfora não permite ilustrar a distributividade em relação à adição.

De qualquer forma, os autores de obras elementares dedicaram-se em vão à caça do *bom* modelo. É provavel que um modelo perfeito não exista: esse modelo deveria realizar um isomorfismo *canônico* entre $\mathbb{R}$ e uma situação "concreta". Particularmente, 0 e 1 deveriam ter imagens canônicas.

Isto é possível no que diz respeito ao 0. No modelo comercial, 0 corresponde ao balanço equilibrado, sem lucro e sem prejuízo. Mas a escolha da imagem de 1 está, geralmente, subordinada à escolha de uma unidade de medida. E é claro que, se a imagem de 1 é arbitrária, a multiplicação, no modelo, só pode ser arbitrária, e será eliminada pela menor mudança de unidade.

Os modelos propostos consistem em representar $\mathbb{R}$ por diversos espaços $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2 \ldots$, que são $\mathbb{Q}$ -vetoriais, e depois definir o produtor por uma multiplicação bilinear:

$\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ (mostraremos um exemplo mais adiante).

A revolução realizda por Hankel foi a de <u>recusar a busca do bom modelo</u>. Esse pro gresso levou muito tempo para impor-se.

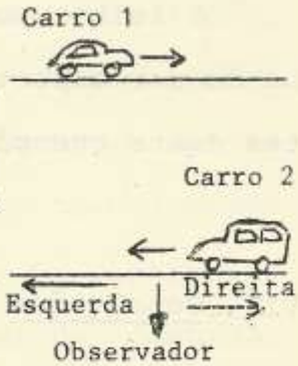
Em 1896, Carlo Bourlet introduziu, pela primeira vez na França, uma exposição pretensamente completa dos números relativos, num manual de ensino secundário (Bourlet, 1896). Sua obra se inicia com uma cuidada apresentação das propriedades aditivas dos números relativos, baseadas na definição de um ponto sobre um eixo e no modelo comercial.

Passemos, contudo, ao capítulo seguinte. Como apresentar a multiplicação ? Subitamente a explicação se torna dogmática: a multiplicação cai de pára-quedas através de uma definição.

Henry Brulard continuaria desinformado, se pudesse utilizar o manual de Emile Borel, publicado em 1920. No entanto, a segunda edição, assinada por Emile Borel e Paul Montel (1926) utiliza uma metáfora, ainda hoje adota da em alguns manuais (por exemplo, o do IREM de Estrasburgo, 1979).

A única diferença, decisiva, prende-se ao fato de que o modelo serve a Montel - Borel como introdução à multiplicação, enquanto no manual do IREM de Estrasburgo os números relativos primeiro são introduzidos abstratamente; num capítulo posterior, explica-se a "significação" da multiplicação através da seguinte explanação:

> Em uma estrada não muito movimentada), um carro pode desenvolver sempre, aproximadamente, a mesma velocidade. Quer-se saber onde estava em dado momento um carro que vimos passar, e onde estará ele dentro de algum tempo.
>
> Por exemplo: vimos passar à nossa frente o carro 1 e admitimos que ele corra a 110km/h. Uma hora depois de passar por nós, portanto, ele estará 110km a nossa direita. Uma hora antes, ele estaria 110km a nossa esquerda.
>
> Questão 1: Admitindo que o carro 2 ande a 100km/h, onde estará ele dentro de duas horas ? E onde estava há uma ho-



ra e meia ?

Orientemos a estrada, atribuindo o sinal + à nossa direita, e o sinal - à nossa esquerda (se quiséssemos, poderíamos fazer a escolha contrária). O zero está diante de nós. Assim, (+150) significa 150Km para nossa direita, e (-80) significa 80km para nossa esquerda. O mesmo vale para a velocidade dos carros.

Orientemos também o tempo: 0 é o momento presente; o sinal + é atribuído ao futuro, e o sinal -, ao passado.

O exemplo do carro 1 se traduz pelas operações:

(+1) x (+110) (uma hora no futuro e 110Km /h para a direita)

e

(-1) x (+110) (uma hora no passado e 110Km /h para a esquerda).

O leitor poderá julgar, à luz do que acaba de ser exposto, as vantagens e inconvenientes deste exemplo.

VII. Conclusões

O ensino de nosso estudo constitui, de início, uma afronta à pedagogia das opiniões. Esta proclama de bom grado que a Matemática deve ser ensinada com base em exemplos concretos. A didática científica se esforça para evidenciar as vantagens e desvantagens de um ensino baseado em exemplos. O estudo histórico que apresentamos mostra precisamente um caso em que uma pedagogia baseada exclusivamente em exemplos concretos é perniciosa.

Ademais, uma aprendizagem satisfatória das propriedades aditivas, apoiada num "bom modelo", pode criar bloqueios posteriores, quando for o caso de compreender as propriedades multiplicativas.

Não seria o caso de moceter uma precipitação, tentando, imediatamente, aplicar este estudo à realidade pedagógica de uma turma. Nós evidenciamos, na verdade, pelo exame de todos os documentos históricos que nos chegaram às mãos, um certo número de obstáculos que embaraçaram o progresso no decurso da história. Resta agora praticar experiências com os alunos, para pesquisar se alguns desses obstáculos não terão ainda conseqüências atuais.

Destacamos que têm-se efetuado pesquisas no Centro de Pesquisa Didática de Nottingham (Shiu C.M.), as quais ganhariam força se leva das adiante com apoio em nosso estudo.

BIBLIOGRAFIA

ALEMBERT, Jean (d'). Artigos Négatif et Quantité na Enciclopédia.

BACHELARD, Gaston (1938). La formation de l'esprit scientifique. Paris Vrin, 1975.

BEZOUD, Etienne (1772). Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine. Paris, J.B.G.Musier.

BOREL, Emile (1920). Algèbre (1º Ciclo). Paris, Armand Colin.

BOREL, Emile & MONTEL, Paul (1926). Algèbre. Paris Armand Colin.

BOURLET, Carlo (1896). Leçons d'Algèbre élèmentaire.

BOURDON, Jean (1834). Eléments d'Arithmétique. Paris Bachelier.

BRAHMEGUPTA and BHASCARA (1817). Algebra with arithmetic and mensuration. (Translated by H.T. Colebrooke), London, John Muray.

CAJORI, Florin (1928). A History of Mathematical Notations. (Vol. 1). The Open Court Publishing Company. La Salle. Illinois.

CARNOT, Lazare (1803). Géométrie de Position. Paris, Duprat.

CAUCHY, Augustin (1821). Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Paris, De Bure.

CLAIRAUT, Alexis (1749). Eléments d'Algèbre. Chez David l'Ainé.

CRAMER, Gabriel (1750). Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Chez le Frères Cramer et Philibert.

DESCARTES, René (1628). La Géométrie. Paris, Hermann, 1927.

DIOPHANTE, d'Alexandrie. Arithmétique. Paris, Blanchard, 1959.

DUHAMEL, J.H.C. (1866). Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement (2ª Parte). Gauthier-Villars. Paris.

EULER, Léonard (1770). Vollständige Anleitung zur Algebra Opera Omnia. Series Prima. Volumen Primum, 1911.

EUCLIDE. Oeuvres complètes. Paris Blanchard, 1966.

FERMAT, Pierre de (1891). Ouevres complètes. Paris Gauthier-Villars.

FREUDENTHAL, Hans (1973). Mathematics as an Education Task. Dordrecht Reidel.

GLAESER, Georges (1969). Mathématiques pour l'élève Professeur. Paris, Hermann.

HANKEL, Hermann (1867). Theorie des Complexen Zahlsysteme. Leipzig. Leopold Voss.

IREM de Strasbourg (1979). Mathématique en 4º Istra.

KANT, Emmanuel (1763). Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative. Paris, Vrin, 1949.

MACLAURIN, Colin (1742). Traité des Fluxions. (Trad. P. Pezenas, 1749).

MACLAURIN, Colin (1748). Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer. Paris. C.A. Jombert, 1753.

MERSENNE, Marin (1639). Les Nouvelles pensées et Galilée. Paris, Vrin, 1973.

OZANAM, Jacques (1691). Dictionnaire mathématique.

PASCAL, Blaise (1658). De l'esprit géométrique et de l'art de persuader in Oeuvres Complètes. La Pléiade. 1962.

PIAGET, Jean (1949). Introduction à l'épistemologie génétique. Paris, PUF, 1973.

SHIU, C.M. Teaching the addition and substraction of Directed Numbers. Shell Center for Mathematical Education.University of Nottingham. (s.d.).

STENDHAL (1835). Vie de Henry Brulard. Paris. Gallimard, 1973.

STEVIN, Simon (1634). Les Oeuvres Mathématiques, augmentez par Albert Girard. Leyde. Elzevier.

THOM, René (1974). Modèle Mathématique de la morphogenèse. Paris. Col. 10/18.

****

Este artigo foi traduzido por Lauro Tinoco do original "L'Epistémologie des Nombres Relatifs", publicado em 1981, vols. 2,3 de Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage édition, BP141, 38002 Grenoble Cedex, França.

GRUPOS CÍCLICOS

Eduardo Quadra, Professor da USU

1. Os Grupos Cíclicos e os Homomorfismos entre grupos são dois temas fascinantes da Teoria dos Grupos, cuja plena compreensão permite um melhor entendimento de Álgebra Linear, e possibilita uma abordagem mais global do Anel dos Inteiros, com repercussões no estudo dos ANÉIS e dos DOMÍNIOS de forma ampla.

2. Alguns tópicos de um curso básico de Álgebra Moderna, tais como Teorema de Lagrange, Classes Laterais, Subgrupos Normais e Grupos Quocientes costumam despertar em alunos do curso básico dificuldades que podem ser evitadas, pois advém mais da forma adotada usualmente para sua notação do que do seu conteúdo.

3. Com base na suposição de que a notação influi

no entendimento de uma noção, procurei uma nova forma de apresentar estes conteúdos, apoiada numa nomenclatura mais globalizante e coerente, e que partia dos conceitos mais amplos para os mais específicos.

4. O rendimento das minhas turmas de Licenciatura em Matemática da USU cresceu a partir da adoção deste procedimento. Pela comparação dos resultados obtidos antes e depois da mudança, conclui que o nível de compreensão aumentou em decorrência desta.

5. A fonte da qual retirei as idéias foi o livro "GROUPES", de Georges Papy. A grande novidade consistiu na adoção de um símbolo para representar a lei de composição externa (ou lei escalar). Na leitura do texto veremos como este fato aparentemente tão insignificante se torna relevante na construção dessa teoria.

6. Como conhecimento prévio para a leitura do

presente texto são suficientes as noções de grupo comutativo, do axioma da indução, das propriedades dos anéis dos inteiros e de conjunto quociente.

OPERAÇÃO ESCALAR OU LEI EXTERNA EM UM GRUPO

1. Definição: Seja $(G,*)$ um grupo, com elemento neutro $\underline{e}$, e onde x' representa o simétrico de x.

Lei de composição externa sobre G é a função

$\perp : \mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$, onde $\perp$ é definida por:

$(z;\ x) \longmapsto z \perp x$

$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

(i) $0 \perp x = e$

(ii) $n \perp x = [(n-1) \perp x) * x$

(iii) $(-n) \perp x = (n \perp x)' = n \perp x'$

2. Exemplos

a) $G = \dot{\pi}_O$ (plano com origem)

$* = +$ (adição de vetores)

$0 \perp \vec{v} = \vec{0}$; $4\vec{v} = 3\vec{v} + \vec{v} = ((2\vec{v} + \vec{v}) + \vec{v} = (\vec{v} + \vec{v}) + \vec{v}) + \vec{v}$

$(-3)\ \vec{v} = -(3\vec{v}) = -((\vec{v} + \vec{v}) + \vec{v})$

$3(-\vec{v}) = (-\vec{v}) + (-\vec{v}) + (-\vec{v})$

b) $G = Zm$ (classes residuais módulo m)

$* =$ (adição módulo m)

$0\bar{x} = \bar{0}$; $3\ \bar{x} = (\bar{x} \underset{m}{+} \bar{x}) \underset{m}{+} \bar{x} = \overline{x + x} \underset{m}{+} \bar{x} = \overline{(x+x)+x} = \overline{3x}$

Mostre por indução que $n.\bar{x} = \overline{nx}$

c) $G = \{a,b,c\}$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$0 \perp a = a$

$0 \perp c = a$

$1 \perp c = 0 \perp c * C = a * c = c$

$2 \perp c = 1 \perp c * c = c * c = b$

$3 \perp c = 2 \perp c * c = b * c = a$

$(-3) \perp c = (3 \perp c)' = a' = a$

$(-3) \perp c = 3 \perp c' = 3\ b = (b * b) * b =$

$c * b = a$

3. Consequências imediatas da definição:

$\forall x \in G, \quad n \in \mathbb{N}^*$

(i) $1 \perp x = x$

(ii) $(-1) \perp x = x'$

(iii) $(-1) \perp x' = x$

(iv) $(-1.n) \perp a = (-n) \perp a)' = (-1) \perp (n \perp a)$

Comprove estas 4 propriedades, justificando-as pela definição.

4. Propriedades: Sejam $(G,*)$ um grupo; $a,b \in G$; $m,n \in \mathbb{Z}$.

a) $(m+n) \perp a = (m \perp a) * (n \perp a)$

b) $m \perp (n \perp a) = (m.m) \perp a$

c) sendo $*$ comutativa, $m \perp (a*b) = (m \perp a) * (m \perp b)$

Concretize estas 3 propriedades, com base nos exemplos do item 2.

5. Demostração por indução das propriedades:

sejam $a, b \in G$; $m, n \in \mathbb{N}$

a) $(m+n) \perp a = (m \perp a) * (n \perp a)$. Faz-se indução sobre n:

(I) $(m + o) \perp a = m \perp a = (m \perp a) * e = (m \perp a) * (o \perp a)$

(II) supondo $(m+n) \perp a = (m \perp a) * (n \perp a)$

$[m+(n+1)] \perp a = [(m+n)+1] \perp a = [(m+n) \perp a] * a =$

$= [(m \perp a) * (n \perp a)] * a = (m \perp a) * [(n \perp a) * a] = (m \perp a) * [(n+1) \perp a]$

b) $m \perp (n \perp a) = (m.n) \perp a$. Faz-se indução sobre m:

(I) $o \perp (n \perp a) = e = o \perp a = (o.n) \perp a$

(II) supondo $m \perp (n \perp a) = (m.n) \perp a$,

$(m+1) \perp (n \perp a) = [m \perp (n \perp a)] * (n \perp a) = [(m.n) \perp a] * (n \perp a) =$

$= (m.n+n) \perp a = [(m+1).n] \perp a$

c) $m \perp (a*b) = (m \perp a) * (m*b)$ Faz-se indução sobre m:

(I) $o \perp (a*b) = e = e*e = (o \perp a) * (o \perp b)$

(II) Supondo $m \perp (a*b) = (m \perp a) * (m*b)$, e * comutation,

$(m+1) \perp (a*b) = (m \perp (a*b)] * (a*b) = [(m \perp a) * (m \perp b)] * (a*b) =$

$= [(m \perp a) * a] * [(m \perp b) * b] = [(m+1) \perp a] * [(m+1) \perp b]$

Tente justificar detalhadamente cada etapa das três demonstrações.

6. As três propriedades valem em $\mathbb{Z}$, pois sendo $m, n \in \mathbb{N}$, então:

a) $[(-m)+(-n)]\perp a = [-(m+n)]\perp a = (m+n)\perp a' =$

$(m\perp a') * (n\perp a') = [(-m)\perp a]*[(-n)\perp a]$

$[m+(-n)]\perp a = (m\perp a)*[(-n)\perp a]$ (já demonstrado)

$[(-m)+n]\perp a = -[m+(-n)]\perp a = [m+(-n)]\perp a' =$

$(m\perp a')* (-n)\perp a' = [(-m)\perp a] *(n\perp a)$

b) $(m)\perp[(-n)\perp a] = (-m)\perp(n\perp a') = m\perp(n\perp a')' =$

$m\perp[n\perp(a')'] = m\perp(n\perp a) = (m.n)\perp a =$

$[(-m).(-n)]\perp a$

$(-m)\perp(n\perp a) = m\perp(n\perp a)' = m\perp(n\perp a') = (m.n)\perp a' =$

$(-(m.n)]\perp a = [(-m).n]\perp a$

$m\perp[(-n)\perp a] = m\perp(n\perp a') = (m.n)\perp a' =$

$[-(m.n)]\perp a = [m.(-n)]\perp a$

c) $(-m) \perp (a*b) = m\perp(a*b)' = m\perp(b' * a') =$

$(m \perp b') * (m \perp a') = [(-m) \perp b] * [(-m)\perp a] =$

$[(-m)\perp a] * [(-m)\perp b]$

7. Notações Multiplicativa e Aditiva

GERAL	MULTIPLICATIVA
$n\perp a = [(n-1)\perp a] * a$	$a^n = a^{n-1} . a$
$(-n)\perp a = (n\perp a)' = n \perp a'$	$a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$
$0 \perp a = e$	$a^o = 1$
$1 \perp a = a$	$a^1 = a$
$m\perp(n\perp a) = (m.n)\perp a$	$(a^n)^m = a^{mn}$
$(m + n)\perp a = (m\perp a) * (n\perp a)$	$a^{m+n} = a^m . a^n$
$m\perp(a*b) = (m\perp a) * (m\perp b)$	$(a.b)^m = a^m . b^m$

ADITIVA

$n.a = (n-1) . a + a$

$(-n) . a = -(n.a) = n. (-a)$

$0 . a = 0$

$1 . a = a$

$m. (na) = (m.n) a$

$(m+n) . a = (m. a) + (n. a)$

$m (a+b) = (ma) + (mb)$

8. "Operações Inversas" num grupo $(G,*)$

Consideremos $a,b \in G$. As equações $x*b=a$ e $b*Y = a$ têm soluções únicas no grupo $(G,*)$: respectivamente $x = a*b'$ e $y = b' * a$.

Daí, poder-se associar a cada par ordenado $(a; b)$ o elemento $a*b'$, o que define em G uma operação $\overline{*}$:

$$\overline{*} : G \times G \longrightarrow G$$
$$(a;b) \longmapsto a \mathbin{\overline{*}} b = a * b'$$

De modo análogo, define-se $\underline{*}$ em G por:

$$\underline{*}: G \times G \longrightarrow G$$
$$(a;b) \longmapsto a \mathbin{\underline{*}} b = b' * a.$$

Diz-se que $\overline{*}$ e $\underline{*}$ são as leis inversas de $*$ em G. Para distingui-las, diz-se que $\overline{*}$ é a lei inversa à direita e que $\underline{*}$ é a lei inversa à esquerda.

9. Exercícios

a) Verifique que em geral, $\overline{*}$ não é nem asso ciativa e nem comutativa.

Idem para $\underline{*}$.

Qual a condição para que $\overline{*}$ seja comutativa ? E associativa ?

b) Verifique que em geral, $\overline{*}$ não possui neutro à esquerda. Idem para $\underline{*}$.

c) Em geral $x \mathbin{\overline{*}} Y \neq y \mathbin{\underline{*}} x$

d) Mostre que $(x \mathbin{\overline{*}} y)' = y \mathbin{\overline{*}} x$ e que

$(x \mathbin{\underline{*}} y)' = x' \mathbin{\overline{*}} y'$

e) Se $*$ é comutativa, $\overline{*} = \underline{*}$

f) Em $(\mathbb{Z}, +)$ concretize os exercícios anteriores.

g) Na operação potenciação, não comutativa, tem-se duas inversas "distintas":

$$x^b = a \Longrightarrow x = \sqrt[b]{a}$$

$$b^y = a \Longrightarrow y = \log_b a$$

h) Na tabela abaixo está definida *:

*	a	b	c	d	e	f
a	b	e	d	f	a	c
b	e	a	f	c	b	d
c	f	d	e	b	c	a
d	c	f	a	e	d	b
e	a	b	c	d	e	f
f	d	c	b	a	f	e

Construa as tabelas de $\overline{*}$ e $\underline{*}$.

Calcule:

$6 \perp d$

$280 \perp c$

$12 \perp (b*c)$

$(12 \perp b)*(12 \perp c)$

$(b \overline{*}\ c) \underline{*} (a \overline{*} f)$

Algumas soluções:

a) $(x \overline{*}\ y) \overline{*}\ z = x \overline{*}\ (y \overline{*} z) \iff (x*y')*z' =$

$x*(y*z')' \iff x*(y'*z') = x*(z*y')$

$\iff y' * z' = z* y'$

$z \overline{*}\ y = y \overline{*}\ x \iff x*y' = y*x' \iff x*y' =$

$(x * y')$

Para que $\overline{*}$ seja comutativa é necessário que $x = x'\ \forall x \in G$.

Para que $\overline{*}$ seja associativa é necessário que $\overline{*}$ seja comutativa.

b) $x \overline{*} e = x * e' = x * e = x$

$e \overline{*} x = e * x' = x'$

$x \underline{*} e = e' * x = e * x = x$

$e \underline{*} x = x' * e = x'$

c) $(x * y' \neq x' y = (x * y')'$

d) $(x \overline{*} y)' = (x * y')' = y * x' = y \overline{*} x$

$(x \underline{*} y)' = (y' * x)' = x' * y = x' \overline{*} y'$

e) $x \overline{*} y = x * y' = y' * x = x \underline{*} y$

f) $(z-y)-z=(x+(-y))+(-z)= x +[(-y)+(-z)]=$

$x-(y+z) \neq x - (y-z)$

$x-y= x+(-y) \neq y + (-x) = y-x$

$x-0 = x; \quad 0-x =(-x);$

$-(x-y) = -[x + (-y)] = y + (-x) = y- x$

Obs.: Continua no próximo número.

SEÇÃO de CONSULTAS

O Leitor Pergunta:

Responde Regina Monken

"O conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável. Como enumerá-lo ? Quem é o "antecessor" de $\frac{8}{11}$, por exemplo ? E o "sucessor" de 2 ?

Um conjunto é dito enumerável quando existir uma bijeção entre ele e uma parte de $\mathbb{N}$, conjunto dos números naturais.

Em outras palavras, quando um conjunto é enumerável, consegue-se estabelcer um critério de "ordem" pelo qual cada elemento tenha seu antecessor (exceto o primeito) e cada elemento tenha seu sucessor (exceto o último, quando existir).

O conjunto $\mathbb{Q}$, munido da "ordem natural" ($\leq$), não tem determinados o "antecessor" e o "sucessor" de um elemento qualquer.

Entendemos por "ordem natural" em $\mathbb{Q}$ aquela que corresponde à disposição dos seus elementos sobre uma reta orientada, ou seja, a "ordem" que, indicada por "$\leq$ ", vem definida por $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ se é só se $ad \leq bc$. O conjunto $\mathbb{Q}$, com essa ordem, é denso (denso em si mesmo), isto é, dados dois racionais x e y, $x < y$, existe uma infinidade de racionais "entre" x e y. Não temos, portanto, como indicar, nessa ordem, qual o "antecessor" ou o "sucessor" de um racional qualquer.

Mas afirmamos: $\mathbb{Q}$ é enumerável. Qual a "ordem" para enumerá-lo ?

Comecemos enumerando Q^+.

Distribuamos seus elementos na forma:

(Vide p. 138)

$$
\begin{array}{llllllll}
E_0 & 0 & & & & & & \\
E_1 & 1 & 2 & 3 & \dots & & & \\
E_2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \dots & & \\
E_3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \dots & \\
E_4 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \dots \\
E_5 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \dots
\end{array}
$$

Esse critério de ordenação em $\mathbb{Q}^+$ pode ser traduzido como: tomando-se os racionais representados pelas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ adotamos que $\frac{a}{b}$ "precede" $\frac{c}{d}$ se e só se $a + b < c + d$ ou se, sendo $a + b = c + d$ se tenha $a < c$.

Observamos ainda que $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$,onde

$$
E_i = \begin{cases} \{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \frac{4}{i} \dots\} & \text{se } i \geq 1 \\ \{ 0 \} & \text{se } i = 0 \end{cases}
$$

E onde cada E_i é enumerável. Portanto $\mathbb{Q}^+$ é a reunião enumerável ($E_o \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots$) de conjuntos enumeráveis (os E_i). E portanto $\mathbb{Q}^+$ é enumerável [1].

Enumeremos, finalmente, o conjunto Q^+, segundo a "ordem" estabelecida pelas setas e eliminando as frações redutíveis:

$$Q^+ = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3} \ldots \right\}$$

Introduzindo os negativos de forma que cada racional negativo anteceda seu simétrico, fica:

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, 2, -\frac{1}{3}, \ldots -\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, -\frac{8}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{10} \ldots\}$$

Temos então definida uma "ordem" em $\mathbb{Q}$

na qual cada elemento tem o seu "antecessor" (exceto o zero) e o seu "sucessor" e onde fica evidenciada a bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$.

BIBLIOGRAFIA

RUDIN. Princípios de Análise Matemática, 3ª ed., 1971.

MELLO e SOUZA, J.C. e outros. Fundamentação da Matemática Elementar. Ed. Campus, 1984.

na qual cada elemento tem o seu antece[illegible]

(exceto o zero) e o seu sucessor e cada [illegible]

estabelecida a bijeção entre Q e N.

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, Princípios de Análise Matemática, [illegible]
ed., 1977), [illegible]

MELLO e SOUZA, J.C. e outros, Fundamentos
da Matemática Elementar, Ed. [illegible]
1969;

RELATÓRIO DA SECRETARIA DO GEPEM
RELATIVO AO ANO DE 1985

Cumprindo determinações estatutárias, apresentamos o relatório relativo ao ano de 1985.

1. ATIVIDADES PROMOVIDAS PELO GEPEM

1.1. Curso de Pós-Graduação "Lato - Sensu" em Educação Matemática

O Curso, realizado em convênio com a USU, continua se desenvolvendo satisfatoriamente, sob a coordenação da Profª Maria Laura Leite Lopes e com os Professores Estela Kaufman Fainguelernt, Gilda Palis, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Zuleika de Abreu.

A quarta turma concluiu em dezembro e

uma quinta turma o iniciou em março de 1985.

As inscrições para 1986 serão no período de 17 de fevereiro a 07 de março, devendo os interessados procurar o GEPEM.

1.2. Curso de Nivelamento

No 2º semestre foi criado um Curso de Nivelamento em Álgebra e Cálculo, com a finalidade de suprir deficiências apresentadas por alguns dos candidatos ao Curso de Pós-Graduação. O êxito do Curso nos levou a decidir pelo oferecimento regular de curso análogo em cada 2º semestre, a partir de 1986.

1.3. Nas seis reuniões mensais, foram abordados os seguintes temas:

— "Experiências de Ensino da Matemática. Reflexões sobre Temas Relevantes da Educação".

— Debate com o Grupo de Matemático do Projeto Fundão, em 16/4.

— "Como a Matemática chegou à Europa", pelo

Professor João Bosco Pitombeira e Carvalho, em 28/5.

— "A Criança e o Movimento", pela Profª Susana Sousa Barros, em 27/6.

— "G-Rio: uma nova posição pedagógica", pelo Grupo G-Rio, sob coordenação do Profº Roberto Baldino, em 26/9.

— "O Uso da Calculadora", com o Profº Antonio Machado Sousa Fº, em 30/10.

— "Geometria: como enfocar nas diferentes faixas etárias", pelas Profªs Anna Averbuch, Estela Kaufman Fainguelernt e França Cohen Gotlieb.

2. PARTICIPAÇÃO DO GEPEM EM ATIVIDADES EXTERNAS

— 2º Encontro de Profºs do Projeto Fundão — Setor Matemática —, em 31/8.

3. PUBLICAÇÕES

Foi publicado o BOLETIM 16 no início do ano, estando em dezembro o BOLETIM 17 em fase final de organização.

4. ASSUNTOS GERAIS

Continuamos a manter intercâmbio com publicações de Educação Matemática:

. "Mathématiques et Pedagogies", periódico bimensal da Sociedade Belga dos Professores de Matemática;

. "L'Educazione Matematica", publicação quadrimensal do Centro de Pesquisa e Orientação da Educação Matemática de Cagliari, Itália;

. "Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática", publicação semestral.

Estas publicações encontram-se à disposição dos associados, para consulta, em nossa sede.

5. ALTERAÇÃO NA DIRETORIA

Em virtude da renúncia da Profª Amelia Maria Noronha Pessoa de Queiroz ao cargo de Diretor Cultural, a Diretoria elegeu o Prof. Radiwal da Silva Alves Pereira, Prof. Adjunto da UFRJ, para a substituir, de acordo com os estatutos do GEPEM, na reunião de 14/11/85.