negativo, o que muda a equação $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5a}{6}$ em $y = \frac{xx}{6a} - x + \frac{5a}{6}$. Onde se vê que sendo x menor que 6a, $\frac{xx}{6a}$ é menor que x, de modo que o termo constante $\frac{5a}{6}$ é menos aumentado pelo termo positivo $\frac{xx}{6a}$ do que diminuído pelo termo negativo $-x$". (Cramer, 1750)

Aqui a obscuridade se situa unicamente no nível da linguagem: entende-se perfeitamente o que o autor quis dizer. O discurso confuso é apenas um sintoma de uma incompreensão mais profunda: a recusa de raciocinar sobre números negativos, heterogêneos aos positivos.

Observamos no texto que a mudança de variável $x \rightarrow -x$ permite a Cramer, na última fase, raciocinar sobre desigualdades. É preciso saber que os sinais < e > foram introduzidos em 1631 nos livros do inglês Thomas Harriot (Cajori, 1928), e a análise infinitesimal levaria à prática das majorações. Até o fim do século XIX, todavia, o repertório de conheci mentos transmitidos aos iniciantes não incluía a resolução de inequações. (A obra mais antiga que encontrei, na qual um capítulo especial é dedicado às desigualdades é um tratado de Álgebra de Joseph Bertrand (1870). Ali está enunciada e demonstrada a regra da inversão das desigualdades, por multiplicação dos dois membros por um fator negativo). (V. também Bourdon, 1834).

É claro que, na época de Euler, já se sabia muito bem racionar sobre majorações. Recorria-se, porém, toda hora, a artifícios, análogos ao que Cramer utilizou para evitar a comparação de números relativos.

Os trabalhos de Alexis Clairaut (1713-1765) não facilitam, absolutamente, a investigação epistemológica. Este autor adota uma estratégia pedagógica que consiste em desenvolver abundantemente tudo que lhe parece per feitamente claro, e passar por cima, sistematicamente, de todas as questões que atormentavam seus contemporâneos. Na falta de documentação, não nos arriscaremos a mencionar as barreiras que Clairaut não conseguiu transpor.

Apresentamos, todavia, uma passagem dos seus "Elementos de Álgebra" (1749), em que ele se manifesta a respeito de um tema que conseguiu entender totalmente:

> "Alguém irá perguntar talvez se podemos juntar negativo com positivo, ou antes se podemos afirmar que acrescentamos o negativo. A isto respondo que a expressão é exata, se não confundirmos juntar com aumentar. Se, por exemplo, duas pessoas juntam os seus bens, quaisquer que eles sejam, eu diria que estariam acrescentando esses bens. Se um deles tem dívidas e créditos efetivos, e se as dívidas superam os créditos, suas posses serão negativas. O acréscimo de seus bens aos do outro diminuiria os bens deste, de tal modo que a soma resultaria menor do que as posses do outro, ou mesmo inteiramente negativa".

Em outras passagens, Clairaut aborda a

questão da significação das raízes negativas de um problema. Analisando um "problema de torneiras", conclui que a fonte está "tirando água do reservatório", em vez de fornecê-la.

Ora, nessa época e mesmo mais tarde, o surgimento de uma raiz negativa era apresentado, não como solução do problema, mas como indicação de uma questão mal formulada. Lê-se, por exemplo, num manual de Álgebra de Bourdon (1834):

> "Todo valor negativo encontrado para a incógnita de um problema do primeiro grau indica um vício de sentido nas condições do enunciado, ou, pelo menos, na equação que o traduz algebricamente (observem a explicação que se segue). Esse valor, abstraído seu sinal, pode ser entendido como a resposta a um problema cujo enunciado não difere do problema proposto, a não ser pelo fato de que algumas quantidades, antes aditivas, tornam-se substrativas, e assim reciprocamente".

Assim, pois, a obtenção de uma raiz negativa é considerada como um acidente fácil de superar. Atualmente, ela é uma solução perfeitamente desejável. Vejam como mudou.

Destaque-se que Euler, na obra citada, propõe numerosos exercícios e os desenvolve no texto. É que ele dá um jeito para que todos os exemplos de equações do primeiro grau tenham apenas raízes positivas. Isto o dispensa de levantar a questão. Por outro lado, Euler admitiu em seu texto algumas equações quadráticas com raiz negativa. Mas, nestes casos, não faz qualquer comentário, sem prever que o leitor, esbarrando nessa dificuldade pela primeira vez, poderia confundir-se.

Resumindo, nós encontramos textos em que grandes sábios revelam, com maior ou menor espontaneidade, índices de incompreensão do tema, tão banal, dos números relativos. E nossa surpresa cresce diante das sínteses de d'Alembert e Carnot, que não hesitaram em os-tentar a sua incompreensão sem a menor inibição.

O texto mais revelador da confusão que reinava no fim do século XVIII é, certamente, o artigo Negativo, que d'Alembert (1717-1783) escreveu para a Enciclopédia de Diderot. Segue-se um excerto:

> "As quantidades negativas são o contrário das positivas: onde termina o positivo, começa o negativo. Veja POSITIVO.
>
> Deve-se confessar que não é fácil fixar a idéia das quantidades negativas e que algumas pessoas engenhosas chegaram a contribuir para confundi-la, pelas noções pouco exatas que divulgaram. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber. Os que pretendem que 1 não é comparável a -1 e que a relação (razão) entre 1 e -1 é diferente da razão entre -1 e 1 incidem num duplo erro: 1º — porque, todos os dias, nas operações algébricas, dividimos 1 por -1; 2º — a igualdade do produto de - 1 por - 1, e de + 1 por + 1 revela que 1 está para - 1 assim como - 1 está para 1.
>
> Considerando a exatidão e a simplicidade das operações algébricas com quantidades negativas, somos levados a crer que a idéia precisa que se deve fazer das quantidades negativas é uma idéia simples, não dedutível, absolutamente, de uma metafísica alambicada. Para tentar desco

brir a verdadeira noção, deve-se, primeiro, notar que as quantidades a que chamamos negativas e que falsamente consideramos como abaixo de zero, são comumente representadas por quantidades reais, como na Geometria, onde as linhas negativas só diferem das positivas por sua situação em relação a qualquer linha no ponto comum. Veja CURVA. Daí, é natural concluir que as quantidades negativas encontradas no cálculo são, de fato, quantidades reais, mas quantidades reais a que se deve associar uma idéia diferente daquela que fazíamos. Imaginemos, por exemplo, que estamos procurando o valor de um número x, que somado a 100 perfaça 50. Pelas regras da Álgebra, teremos x + 100 = 50 e x = - 50. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Enunciaríamos, portanto, o problema dessa maneira: encontrar uma quantidade x que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos 100 - x = 50, e x = 50, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades negativas, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal — que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. Veja EQUAÇÃO

Note-se que estamos falando de quantidades negativas isoladas, como -a, ou das quantidades a - b, em que b é maior que a; pois, para aquelas em que a - b é positivo, isto é, em que b é menor que a, o sinal não acarreta qualquer dificul dade. Realmente, pois, não existe absolutamente quantidade negativa isolada. -3 tomado abstratamente, não apresenta qualquer idéia ao espírito; mas se digo que um homem deu a outro -3 escudos, isto quer dizer, em linguagem inteligível, que ele lhe tirou 3 escudos.

Eis porque o produto de -a por -b dá +ab; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal -, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais - de que fossem precedidas nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades -a e -b, só estão precedidas pelo sinal - porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal +, e então seu produto seria +ab, o que significa a multiplicação de -a por -b, onde retiramos b vezes a quantidade negativa - a. Ora, pela idéia que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa é retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar -a por -b e, sim, +a por +b, o que dá o produto +ab. Não é possível desenvolver suficientemente esta idéia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a

> aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades negativas, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades negativas são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer idéias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas negativas de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas".

Pode-se perguntar se é nos artigos de vulgarização que se deve ir buscar o fundo do pensamento de um matemático. Uma leitura atenta do texto acima mostra que d'Alembert, por certo, não teria multiplicado suas confissões de incompreensão e perplexidade se dispusesse das explicações simples com que contamos hoje em dia.

Ademais, o que importa aqui não é tanto o nível de compreensão de um matemático encarado isoladamente, mas o impacto que o relato de d'Alembert terá exercido sobre seus leitores. O artigo Negativo seria uma referência constante por todo um século. Todos o citaram, sem poupar elogios à clareza das explicações dadas !!!

Citamos, a seguir, duas passagens do artigo Quantidade, que o mesmo autor redigiu para a Enciclopédia.

> "Quantidades negativas são aquelas que são consideradas como menores que nada, e que são precedidas do sinal -.
>
> Segundo alguns autores, as quantidades negativas são as ausências das positivas.
>
> Segundo esses mesmos autores, uma vez que uma ausência pode exceder a outra (por exemplo, a ausência de 7 é maior que a de 3), uma quantidade negativa, tomada certo número de vezes, pode ser maior que outra.
>
> Segue-se daí que as quantidades negativas são homogêneas entre si. Mas, acrescentam eles, já que a ausência de uma quantidade positiva tomada tantas vezes quanto se quiser jamais poderá superar a quantidade positiva, e já que ela se torna sempre mais defectiva, as quantidades negativas são heterogêneas às positivas. Daí eles concluem que, sendo as quantidades negativas heterogêneas às positivas e homogêneas às negativas, não pode haver razão entre uma quantidade positiva e uma negativa, mas pode haver razão entre duas negativas. Por exemplo:

> $-3\underline{a}$: $-5\underline{a}$ :: 3 : 5. A razão é aqui a mesma que se as quantidades fossem positivas. Eles pretendem mostrar, todavia, que entre 1 e -1 e entre -1 e 1 a razão é diferente. No entanto, por outro lado é verdadeiro que 1: -1 :: -1 : 1, pois o produto dos extremos é igual ao produto dos meios; assim a noção que esses autores dão das quantidades negativas não é perfeitamente exata".

O leitor mais assíduo de d'Alembert foi Lazare Carnot (1753-1823). O "Organizador da Vitória" era considerado, no seu tempo, como um dos maiores matemáticos franceses depois, de Lagrange, Laplace, Legendre e Monge. Sua geometria de posição (Carnot, 1803) gozou, por muito tempo, de imenso prestígio, que atualmente é mal compreendido. A contribuição da obra é muito fraca. Os teoremas de Carnot não são mais que exercícios resolvidos por meio de métodos fora de moda. O mérito do livro consiste em suas repetidas exigências de clareza. O autor se embaraça sistematicamente nas contradições das idéias tradicionais e proclama sem cessar:

> "Não compreendo ! Não compreendo !"

Eis algumas amostras de sua obra:

> "Para obter realmente uma quantidade negativa isolada, seria preciso retirar uma quantidade efetiva do zero, privar o nada de alguma coisa: operação impossível. Como, portanto, conceber uma quantidade negativa isolada ?"

E acrescenta:

> "As noções até agora conhecidas das quantidades negativas isoladas se reduzem à duas: aquela de que acabamos de falar, saber que são quantidades menores que zero; e aquela que consiste em dizer que as quantidades negativas têm a mesma natureza que as quantidades positivas, mas tomadas em sentido contrário. d'Alembert destrói ambas as noções. Inicialmente ele refuta a primeira com um argumento que me parece irreplicável.
>
> Seja, diz ele, esta proporção: 1: -1 :: -1 : 1; se a noção combatida fosse exata, isto é, se -1 fosse menor que zero, com mais razão ele seria menor que 1; assim, o segundo termo desta proporção deveria ser menor que o terceiro, isto é, 1 deveria ser menor que -1; e assim -1 seria ao mesmo tempo menor e maior que 1,

o que é contraditório.

Quanto à segunda das noções apresentadas acima, d'Alembert a condena com o mesmo sucesso em sua memória sobre as quantidades negativas de que já falei. No entanto, como ele não tem o que propor em substituição, parece adotar esta noção como base, querendo apenas demonstrar que ela está sujeita a diversas exceções. É necessário, diz ele, demonstrar essa posição (quantidades negativas em sentido contrário ao das positivas), na medida em que ela nem sempre acontece".

Segue-se, da mesma obra, uma passagem ainda mais espantosa:

"Uma multidão de paradoxos, ou antes de palpáveis absurdos resultaria da mesma noção; por exemplo: -3 seria menor que 2; contudo, $(-3)^2$ seria maior que 2^2, ou seja, entre duas quantidades diferentes, o quadrado da maior seria menor que o quadrado da menor, o que afronta todas as idéias claras que se poderiam formar sobre a quantidade.

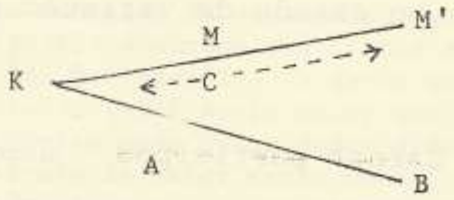
Passemos à segunda noção, que consiste em dizer que as quantidades negativas só diferem das quantidades positivas por serem tomadas em sentido oposto. Esta idéia é engenhosa, mas não é mais justa que a precedente. De fato, se duas quantidades, uma positiva, outra negativa, sendo ambas reais e não diferindo senão por sua posição, por que a raiz de uma

> seria uma quantidade imaginária, enquanto a da outra seria efetiva ? Por que $\sqrt{-a}$ não seria tão real quanto $\sqrt{a}$? Pode-se conceber uma quantidade efetiva da qual não se possa extrair a raiz quadrada ? E de onde proviria o privilégio da primeira em conceder seu sinal ao produto $-a \times +a$?"

Lembremo-nos de que o autor, Lazare Carnot, era membro da Academia de Ciências ! Não é um garoto que acaba de fracassar no B.E.P.C. ! Somos forçados a observar que, em 1803, a comunidade científica não reconhecia, como noção rotineira, o estudo da variação da função $x \to x^2$.

Em suma, Carnot participou amplamente do progresso matemático no que concerne aos números relativos, não atribuindo respostas válidas às questões levantadas, mas desempenhando um papel provocador. Sob a influência dessas inquietantes interrogações, Os Moebius e os Chasles logo iriam elaborar a geometria orientada; particularmente, eles utilizaram todo um eixo para representar a reta $\mathbb{R}$ inteira, sem que fosse necessário recorrer, como Descartes ou Cramer (V. citações) a raciocínios isolados sobre semi-retas opostas.

Eis um exemplo de exercício longamente comentado por Carnot e, depois, constantemente citado, até a popularização dos métodos de Chasles: De um ponto K exterior a um círculo, traçar uma secante KMM', tal que a distância MM' tenha o comprimento dado C.



Em seu livro, Carnot (1803) emprega a palavra abscissa, mas ele a interpreta como uma distância à origem. Traçando uma secante auxiliar KAB e designando por x, a e b as distâncias KM, KA e KB, ele chega à equação:

$$x \quad x \quad x + cx - ab = 0$$

Neste contexto, ele não consegue interpretar a raiz negativa da equação. Essa dificuldade está, hoje, totalmente ultrapassada, uma vez que se obedeça escrupulosamente às regras da geometria orientada que ainda não havia sido inaugurada.

Entende-se que a fórmula de Chasles,(*) atualmente considerada como um truísmo, tenha constituído um considerável progresso. Mas, para que ela fosse formulada, foi necessária uma completa inversão do ponto de vista. A primícia indispensável deveria ser a transposição do obstáculo (3), que conduziria à deter

---

(*) A própria história do surgimento da geometria orientada merece um estudo epistemológico separado, pressupondo uma releitura atenta de Monge, Carnot, Poncelet, Chasles, Moebius, etc. Em particular, encontraremos nas "Aplicações de análise e geometria" (1862-1864) de Jean Victor Poncelet um capítulo inteiro dedicado à "lei dos sinais de posição em geometria", do qual poderíamos tirar muitas citações saborosas também relacionadas com o tema aqui examinado.

minação de um ponto sobre uma reta, não por sua distância à origem, mas por sua abscissa (no sentido atual do termo).

IV. Primeiros Obstáculos Epistemológicos

É hora de parar e fazer um balanço. Terminada esta etapa, a unificação da reta numérica está quase concluída.

A idéia de um sistema numérico unificado cujos elementos só se diferenciam quantitativamente custou a ser aceita. Encontra-se em muitos autores a persistência da visão do mundo de Aristóteles, descrita em termos de antinomias (quente e frio, úmido e seco, o bem e o mal, a alma e o corpo). O positivo e o negativo também se apresentam como heterogêneos, da mesma forma que, para nós, o doce e o salgado. Esses dois princípios podem, por certo, neutralizar-se parcialmente, mas eles têm natureza distintas.

O grande contraste, constantemente reafirmado, levaria a que o número positivo é real, enquanto as quantidades negativas seriam apenas ficções !

Para julgar corretamente esta situação, é preciso lembrar que, até o século XVIII, o homem comum teve poucas oportunidades de utilizar os números negativos na vida cotidiana.

Os comerciantes, é verdade, faziam suas contas, mas a prática das partidas dobradas em contabilidade começava a opor radicalmente créditos e débitos (combinando-os apenas no fim das páginas dos livros de registro). Prevaleceria, assim, o modelo das duas semi-retas opostas, funcionando separadamente, a não ser na hora do balanço.

Não se dispunha de escalas termométricas. Os primeiros fabricantes de termômetros ainda escalonavam seus instrumentos em relação à temperatura de fusão da manteiga !

Somente em 1730, Réaumur produziu os primeiros termômetros científicos e propôs sua escala de temperaturas. De qualquer modo, ainda decorreria um século antes que o grande público se acostumasse à expressão "temperatura abaixo de zero". Aliás, é significativo observar em Fahrenheit (1713) um sintoma característico de evitação.

Sua extravagante escala térmica se explica pela intenção de evitar os números negativos no escalonamento das temperaturas usuais.

Ainda nos restam alguns vestígios das maneiras de pensar dualistas daqueles tempos. A indústria frigorífica atual ainda utiliza uma unidade prática, a frigoria para designar a quilocaloria negativa.

No caso da reta numérica, observa-se que o zero não foi a única barreira difícil de transpor.

Em Euclides, por exemplo, os números servem para enumerar multidões. Por conseguinte, a unidade não é um número ! É, aliás, o contrário de um número da mesma forma que, em gramática, o singular se opõe ao plural.(*) Esse ponto de vista arcaico ainda iria encontrar eco nos debates entre matemáticos do século XVII.

A mesma dificuldade surge ainda no ensino contemporâneo. Quando se explica que x^n é o produto de n fatores iguais a x, o aluno pode não compreender o que significa x^1. Que é um produto de um só fator ? E o que significa x^0 ?

(*) Existe um argumento convincente para saber se é necessário colocar, ou não, um s na expressão: "Um recipiente de 1,70 litro (s)"?

Aos poucos, concluiu-se, em seguida, que os números compreendidos entre 0 e 1 eram da mesma natureza que aqueles que superam a unidade. A dificuldade em admitir isto, segundo o testemunho de numerosos professores, aparece entre os estudantes que se recusam a calcular a velocidade de um caramujo. "Um caramujo ! Não tem velocidade ! Não anda depressa !". Riremos menos dessa ingenuidade ao encontrá-la, sob forma de hesitação, nos escritos do padre Marin Mersenne (1639). No seu comentário da obra de Galileu, ele julgou necessário criar um neologismo em francês, a "tardivité", para indicar uma velocidade que se torna lenta. A expressão "velocidade nula", tal como "riqueza nula", parece constituir uma contradição em termos.

A passagem aos negativos constitui uma dificuldade ainda mais temível. Esbarra-se, no caso, na presença de duas significações do zero, que se misturam nos discursos dos vá rios autores, sem que se consiga fazer as di ferenciações necessárias.

De um lado, concebe-se um zero absoluto, o nada, abaixo do qual nada é concebível. En tende-se que não se pode ser mais pobre que o pobre absoluto, completamente desprovido, que nada possui. À luz deste conceito, os núme ros absolutos são evidentemente um absurdo.

Por outro lado, encontramos constante mente pessoas arruinadas, que nada possuem, mas que ainda podem conseguir créditos e cu jos bens podem ser hipotecados. O que é,aliás, um miliardário arruinado ? Em geral, é uma pessoa que ainda possui milhões. Surge assim a idéia do zero origem, proposta por conven- ção. Este zero propicia a criação dos núme ros negativos. O obstáculo provém da confusão entre as duas situações, às quais não se pode adaptar um mesmo modelo.

Há uma reflexão sobre este tema em uma obra da juventude de Emmanuel Kant, "Ensaio para introduzir em filosofia o conceito de grandeza negativa" (1763). A análise é conduzida ali em razão da clarificação da noção de existência. Após declarar: "Duas coisas são opostas entre si, quando a introdução de uma suprime a outra", o ilustre filósofo estabelece a distinção entre a oposição lógica, que esbarra no princípio da contradição, e a oposição real, tal que dois predicados de um sujeito são opostos, mas não contraditórios.

A obra de Kant, aliás, não visa a objetivos de clarificação matemática. Ela se destina a introduzir uma nova concepção da Filosofia, que prenuncia o criticismo Kantiano. O opúsculo não suscita, em particular, as dificuldades ligadas à regra dos sinais.

De fato, os obstáculos que examinamos até aqui concernem sobretudo às propriedades aditivas, aquelas que aparentemente apresen tam menos dificuldades. Entenda-se, contudo, que elas não são tão simples. Elas só foram finalmente ultrapassadas com a introdução da orientação, muito tardia. E, embora a orientação da reta seja um assunto considerado fácil, bem sabemos que a idéia geral de variedade orientada, perfeitamente dominada na metade do século XX pelos matemáticos, ainda causa perigosos problemas aos professores.

Em todo caso. na metade do século XIX, os números negativos conquistaram condição de igualdade com os números positivos. Durante muito tempo, contudo, ainda veríamos a persistência de sintomas de evitação característicos: muitos usuários, que pensam ter compreendido o que são números negativos e que docilmente aprenderam a servir-se da relação de Chasles, preferem criar expedientes para não empregá-los !

Até 1940, por exemplo, muitos manuais de ótica geométrica elementar expõem com timidez a teoria dos espelhos esféricos ou das lentes. Perdem-se numa profusão de casos figurativos, sempre com demonstrações casuísticas. Recusam-se a falar em <u>distância focal negativa</u>. Segue-se um exemplo de 1920.

> "Confundindo os ponto T e O, muito próximos se o espelho é de pequena abertura, e representando por <u>p</u> e p' as distâncias de P e P' ao espelho, e por <u>f</u> a distância focal, tem-se:
>
> $\frac{p - 2f}{2f - p'} = \frac{p}{p'}$, donde: $2pf - pp' = pp' - 2p'f$, ou $pf + p'f = pp'$; dividindo cada termo por $pp'f$:
>
> $$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (2)$$
>
> P é, portanto, fixo qualquer que seja o raio PI. Os raios que partem de P e que atingem o espelho passam todos, pois, pelo ponto P' após a reflexão; P' é a imagem de P.
>
> <u>A imagem de um ponto P, fornecida por um espelho côncavo, situa-se no eixo que passa por P</u>. A fórmula (2), acima, permite encontrar sua posição, conhecendo <u>p</u> e f.
>
> Se P está entre F e O, o raciocínio

precedente dá:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} .$$

A imagem é virtual (Fig. 238)

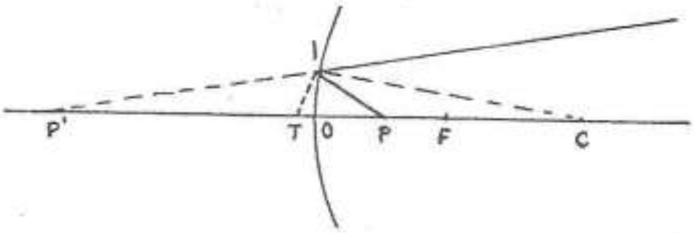


Fig. 238 — IMAGEM VIRTUAL DE UM PONTO.

Decididamente, todos os números (positivos e negativos) tornam-se iguais em direito, mas alguns são mais iguais do que os outros.

V. Um Pouco de História (Continuação e Fim)

Este segundo período se caracteriza por uma compreensão satisfatória das propriedades aditivas. É então que os obstáculos (5) e (6) assumem importância preponderante.

Agora as tentativas levarão sobretudo

à descoberta de uma justificativa aceitável para a regra dos sinais na multiplicação dos números relativos isolados.

Nas célebres conferências pedagógicas que Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) proferiu na Escola Normal Superior (pluvioso, ano III), ele começa manifestando o mesmo embaraço que seus antecessores, testemunhando assim que a teoria dos números relativos não era considerada matéria fácil. Ele entrevê, contudo, os elementos da solução:

> "(A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de -a por -b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar sensível essa idéia, observaremos que o produto de -a por +b é -ab (porque o produto nada mais é que -a repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de -a por b-b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim, já que o produto de -a por +b é -ab, o produto de -a por -b deve ser de sinal contrário ou igual a + ab para destruí-lo".

Nota-se no texto:

a. a mesma imperícia de Euler para demonstrar b x (-a) = -ab.

b. a colocação em evidência do papel da distributividade, na demonstração.

c. a ausência de referência a um modelo físico (o obstáculo (6) é contornado assim) e uma abordagem, na aparência, puramente formal.

d. mas a idéia de uma extensão formal do sistema numérico não parece ter sensibilizado o espírito de Laplace. O emprego das palavras que sublinhamos ("sensível", "deve ser",etc.) não revelaria uma crença implítica num sistema numérico preexistente do qual bastaria decifrar as propriedades ?

O leitor cético pode julgar,reportando-se a Duhamel (1866), em que a lição de Laplace é citada mais completamente. Aparece ali um comentário, bem espantoso, escrito por um acadêmico, professor da Escola Politécnica. Des tacamos:

> "Toda demonstração de regras sobre as quantidades negativas isoladas só pode ser uma ilusão, pois não faz nenhum sentido aplicável a operações aritméticas efetuadas com coisas que não são números e não têm existência real".

Revela-se aí o passo decisivo que falta executar, de Laplace a Hankel. Em 1821, Augustin Cauchy (1789-1857) publicou seu curso destinado à Escola Politécnica. De início, ele faz uma nítida distinção entre os números (reais positivos) e quantidades (números relativos). Apresenta estes últimos de maneira unificada, introduzindo o tema dinâmico, caro a Piaget. Este ponto de vista é temperado por um elemento estático: o sinal é assimilado a um estado simbolizado por um adjetivo.

> "Do mesmo modo que se vê a idéia de número nascer da medida de grandezas, adquire-se a idéia de quantidade (positiva ou negativa), se considerarmos cada grandeza de uma espécie dada capaz de servir para o crescimento ou a diminuição de outra

> grandeza fixa da mesma espécie. Para indicar essa destinação, indicam-se as grandezas que servem para aumentar por números precedidos do sinal +, e as grandezas que servem de diminuição por números precedidos do sinal -.
>
> Isto posto, os sinais + ou - colocados antes dos números podem-se comparar, segundo a observação feita, a adjetivos colocados junto a seus substantivos. Designam-se os números precedidos do sinal + pelo nome de quantidades positivas, e os números precedidos do sinal - pelo nome de quantidades negativas".

Aparecem assim as sementes de uma confusão entre os sinais (+ ou -) operatórios e predicativos. Os primeiros designam uma ação (aumentar, diminuir) e os segundos qualificam um estado (positivo, negativo).

De qualquer forma, Cauchy recorre a uma metáfora (positivo = aumento; negativo = diminuição), que explora por duas páginas, para justificar as propriedades aditivas dos números relativos. E, de repente, sem prevenir o leitor (e talvez inconscientemente), ele abandona o ponto de vista metafórico para abordar dogmaticamente a multiplicação.

Ele apresenta, de início, o grupo multiplicativo dos sinais {+,-} e assimila as "quantidades" aos elementos do produto cartesiano $\{+, -\} \times \mathbb{R}^+$. Os puristas lamentarão, sem dúvida, que ele esqueça de identificar +0 e -0. De qualquer modo, sua exposição não explica essa inopinada mudança de atitude. O modelo metafórico, apresentado inicialmente, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação.

Neste último caso, pode-se diminuir um número positivo, multiplicando-o por um fator compreendido entre 0 e 1. Daí resultariam confusões entre esses dois tipos de diminuições, e numa tal situação nebulosa não se compreenderia mais por que o produto de uma diminuição por uma diminuição é um aumento. Cauchy teria podido, contudo, assimilar o número negativo a uma diminuição aditiva (mas não o fez).

É então que Cauchy adota o novo ponto de vista (que encontramos em embrião em MacLaurin e Laplace). Ele tem vontade de apresentar a multiplicação de um modo formal, sem evocar modelos concretos ou metafóricos. Ele avisa que vai operar com símbolos (formados por um sinal e um valor absoluto) e expõe as regras operacionais a que tais símbolos serão submetidos.

Essa transposição de barreira, porém, não ocorrerá sem percalços. De início, ele comete a confusão entre sinais operatórios e predicativos.

Ele demonstra a composição apenas para sinais predicativos e depois aplica-a aos sinais operatórios, sem chamar a atenção para esse abuso:

"Com base nessas convenções, se represen tamos por A, seja um número, seja uma quantidade qualquer, e se fazemos

$$a = +A, \quad b = -A,$$

teremos

$$+a = +A, \quad +b = -A,$$

$$-a = -A, \quad -b = +A.$$

Se, nas quatro últimas equações, atribuir mos a a e b seus valores entre parênte ses, obtemos as fórmulas

$$+(+A) = +A, \; +(-A) = -A,$$

$$-(+A) = -A, \; -(-A) = +A. \qquad (1)$$

Em cada uma destas fórmulas, o sinal do segundo membro é o que chamamos de produto dos dois sinais do primeiro. Multiplicar dois sinais é formar seu produto. Apenas o exame das equações (1) basta para estabelecer a regra dos sinais, compreendida no teorema que vou enunciar.

1º teorema: O produto de dois sinais iguais é sempre +, e o produto de dois sinais opostos é sempre −.

Em seguida, o estilo de Cauchy manifesta um evidente desconforto, diante do manejo dos símbolos, tratando de números complexos:

"Em análise, chamamos expressão simbólica ou símbolo toda combinação de sinais algébricos que nada significa por si mesma, ou à qual se atribui um valor diferente do que ela naturalmente deveria ter. Da mesma forma, chamamos equações simbólicas àquelas que, examinadas e interpre

> tadas com base nas convenções geralmente estabelecidas, são inexatas ou não fazem sentido, mas das quais se podem deduzir resultados exatos, modificando e alterando, segundo regras fixas, ou as próprias equações, ou os símbolos que elas contêm".

Assim, os números complexos seriam símbolos desprovidos de sentido em si mesmos (mas não é este, por definição, o caso de todos os símbolos ?). Eles só o adquirem na condição não serem interpretados de acordo com o significado que deveriam ter !...

Essa embrulhada traduz uma confusão sobre um assunto sobre o qual Cauchy produziu uma obra decisiva, mas que ele não consegue explicar de maneira totalmente clara.

Destaque-se, enfim, que não se observa qualquer vestígio desses esforços pedagógicos na obra científica de Cauchy. As sutis diferenças que ele introduziu em seu Curso não tiveram influência no estilo de seus trabalhos de pesquisa.

Finalmente ! Em 1867, surge a obra de Herman Hankel, "Teoria dos sistemas dos números complexos", onde todos os obstáculos referentes à teoria dos números são ultrapassados.

De fato, a mudança essencial —passagem do ponto de vista "concreto" ao ponto de vista "formal" —, foi efetuada antes em outros campos da Matemática. No caso de que tratamos, Hankel limitou-se a aplicar idéias que já começavam a desenvolver-se.

Para o didaticista, é importante notar que o autor (que também foi um bom historiador da Matemática) não estava absolutamente consciente de ter eliminado uma tensão que persistia desde Diofantes ! Seu livro é dedicado a um assunto "mais nobre": a exposição formal da teoria dos números complexos. Foi apenas de passagem, a título de preliminares, que