"É claro, pensam eles, que, se um aluno não entende nada de Matemática, fracassará aí como em todos os outros pontos. Mas os números relativos não têm nada de particularmente difícil".

Há muitos trabalhos didáticos sobre a análise dos conceitos numéricos. Hans Freudenthal, por exemplo, dedicou 160 páginas de sua obra clássica (Freudenthal, 1973) ao exame das numerosas dificuldades observadas na aprendizagem dos números. Todavia, ele mal se refere à regra dos sinais. A leitura das páginas 279/281 de seu livro nem sequer sugere que ele se tenha apercebido do extraordinário fenômeno aqui estudado.

Esse estanho esquecimento é facilmente explicável. À época em que escreveu o livro, Freudenthal escolhia os temas de suas análises didáticas entre suas observações pessoais. Ora, nenhum matemático da sua geração (nem da nossa) se lembra de haver sido confundido pela regra dos sinais.(*) Vinte anos antes, as coisas eram diferentes.

Jean Piaget, ao contrário, embora baseando sua didática em uma filosofia pessoal, mostrou-se sensível às observações feitas sobre crianças. Por isso mesmo, a dificuldade concernente aos números relativos não lhe escapou. Nas páginas 110/115 (Piaget, 1949), ele consagra um denso comentário às dificuldades provocadas pelos números relativos. Cita também o surpreendente texto de d'Alembert que

---

(*) Há um ano, eu poderia jurar que jamais havia encontrado a menor dificuldade quanto aos números relativos. Atualmente, vejo que o meu primeiro contato com uma prova totalmente formal da regra dos sinais ocorreu por volta de meus 25 anos, quando do surgimento dos primeiros volumes de Bourbaki. Escrevendo este artigo, vaguei de surpresa em surpresa, ao tomar conhecimento das numerosas sutilezas de entendimento sobre o tema que, antes, me passaram despercebidas.

examinaremos adiante. Sua admiração provoca uma reflexão didática. Ele se espanta com o fato de que o matemático-enciclopedista "viesse a julgar obscura a noção de quantidade positiva", sem notar que isto ocorreu com *todos os matemáticos* até o século XIX ! Limita-se a afirmar que a *única* dificuldade se prenderia ao caráter fixo do número, como se o concebia então. Tal obstáculo desapareceria, para Piaget, ao se entender que um número simboliza *uma ação*, não *um estado*.

> Tais hesitações do grande d'Alembert são particularmente instrutivas quanto à natureza ativa e não estática do número negativo e do número inteiro em geral. De fato, está claro que, se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção, ou ainda menos, e percepções nulas não são suscetíveis de gradação. Espantoso é que essa contradição entre a interpretação sensualista do conhecimento e a realidade matemática, não tenha levado um espírito tão voltado para o concreto e pouco dado às considera

> ções mecânicas como d'Alembert a entender que a natureza essencial do número não é nem estática nem perceptiva e, sim, muito dinâmica e ligada à própria ação, interiorizada em operações.

A explicação de Piaget comporta uma grande dose de verdade, porém não esgota o assunto. Citaremos muitos autores que constantemente insistem no caráter dinâmico do número positivo, relacionado sobretudo a atividades de medição.

Tais matemáticos, todavia, têm dificuldade em adotar a mesma atitude diante dos números relativos. Perturbam-se com outros obstáculos não mencionados por Piaget, entre os quais destacamos o que chamamos "a ambigüidade dos dois zeros". Durante séculos os matemáticos se impressionaram com o zero absoluto, abaixo do qual nada se podeia conceber. Isto os impediu de manejar com facilidade o zero origem, marcado arbitrariamente sobre um eixo orientado. Esta confusão surge, aliás, no curto trecho citado de Piaget, sobre "ausência de percepção" e "gradação de percepções nulas".

Muitos são os autores a afirmar que "nada poderia ser mais imóvel que a imobilidade". Para descobrir, a partir daí, o conceito de velocidade negativa, foi necessária toda uma construção intelectual, que só seria verdadeiramente possível muito depois.

No corpo do trabalho, citamos cerca de vinte autores. Chegamos a destacar uma dezena de obstáculos que se opõem à satisfatória compreensão dos números relativos. Tais obstáculos são revelados por perto de vinte sintomas, que nem sempre podem ser relacionados cada um a um único obstáculo determinado.

Vamos, pois, dedicar-nos agora a uma meticulosa explicação dos textos, pois só assim se poderá chegar a conclusões variadas. Esta forma de exposição será, contudo, necessariamente descosida, claudicante, à maneira da <u>elaboração ziguezagueante da compreensão dos números relativos</u> através dos séculos.

Se adotarmos, em nosso trabalho, um despojamento cronológico, as transposições de obstáculos aparecerão fora de ordem. Há precursores que cedo superaram esta dificuldade, e retardatários que incorrem nos mesmos erros anteriores.

Pode-se pretender traçar uma classificação estruturada. Esta forma de apresentação tem o inconveniente de elidir numerosos fatos e de introduzir na exposição uma estrutura que esteve ausente do percurso histórico.

Entretanto, para facilitar a leitura, assumimos o risco de propor provisoriamente uma certa visão de conjunto de nosso artigo, sem dissimular o que tal procedimento pode ter de simplista e redutivo. Fica disto advertido o leitor.

Optamos, assim, por indicar desde já seis dos obstáculos que serão abundantemente descritos a seguir, e dez dos autores citados. Elaboramos, então, um quadro bastante esquemático, inserindo nas casas os sinais + ou -, para indicar se o autor, pelo texto citado, terá ou não conseguido transpor a barreira.

Trata-se de uma codificação sumária,que, aliás, encaramos com reservas, mas que oferece a vantagem de fornecer uma referência provisória à leitura que se seguirá.

LISTA PROVISÓRIA DE ALGUNS OBSTÁCULOS

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.

3. Dificuldade em unificar a reta numé rica.

   Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.

4. A ambiguidade dos dois zeros (v. fls. 36).

5. Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.

6. Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. Comentários mais precisos estão disseminados por este artigo. Basta-nos, como exemplo, assinalar que a passagem citada por Piaget faz alusões (conscientes ou não) aos obstáculos 3 e 4.

Ver quadro mais adiante...

Os pontos de interrogação designam os casos em que não pudemos responder, seja porque os textos citados não foram suficientes para nos esclarecer, seja porque a simplificação do código adotado provisoriamente não permite a apresentação de nuanças que serão examinadas mais adiante.

O quadro, embora sumário, já nos revela fatos interessantes. Ele evidencia bem o caráter parcial da compreensão adquirida pelos matemáticos clássicos citados. Ainda que manipulassem os números relativos com uma engenhosidade digna de admiração, enquanto todos os obstáculos não foram vencidos, subsistiram vastas áreas de incompreensão; o sucesso não era assegurado de maneira estável.

Parecia-me, no início de minhas pesquisas, que o progresso crucial foi a transposição das barreiras (5) e (6). O quadro nos mostra, contudo, o caso de MacLaurin, que cum priu essas etapas, mas, por não dominar (3) e (4), não atingiu o objetivo.

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	—					
SIMON STEVIN	+	—	—	—	—	—
RENÉ DESCARTES	+	?	—	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	—	—	+	+
LÉONARD EULER	+	+	+	?	—	—
JEAN D'ALEMBERT	+	-	—	—	—	—
LAZARE CARNOT	+	-	—	—	—	—
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	—	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	—	—	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

E como a insuficiente clareza não lhe permitiu convencer definitivamente seus leitores, os progressos que obteve ficaram provisoriamente perdidos para a posteridade.

Lazare Carnot, ao contrário, formulou com muita nitidez tudo que lhe parecia incompreensível na idéia de número negativo, tornando-se um dos mais eficientes artífices do sucesso final.

II. Um sintoma

Enveredei pelo caminho aqui explorado, lendo "A vida de Henri Brulard (Stendhal, 1835)", autobiografia de Stendhal (1783-1843), cujo nome verdadeiro era Henri Beyle. Este escritor participou das primeiras promoções da Escola Central de Grenoble, uma das primeiras instituições em que o ensino da Matemática foi ministrado a partir dos 13 anos de idade. O jo vem Henri ali estudou dos 14 aos 17 e evoca, no livro, passagens de sua escolarização. É um testemunho particularmente precioso (talvez único) sobre o que seriam os primeiros contatos de um adolescente com o ensino recentemente institucionalizado da Matemática.

Ora, nem o ensino recebido, nem a leitura do célebre manual de Bezout (1772) chegaram a satisfazer a curiosidade do jovem aluno quando ele quis compreender a origem da regra dos sinais. Seus professores, eles próprios, não a compreendiam ! Eles não tentavam nem compreender, nem explicar. Contornavam a dificuldade apresentando o tema sob a forma de um dogma revelado: "cada proposição no Bezout, escreve Stendhal, tem o aspecto de um grande segredo ouvido de uma velha vizinha".

Eis seu testemunho:

"Para mim, a hipocrisia era impossível em

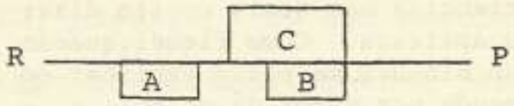
Matemática e, na minha simplicidade juvenil, eu pensava que isto era assim em todas as ciências nas quais ouvira dizer que ela se aplicava. Como fiquei,quando percebi que ninguém me podia explicar como é que menos por menos dá mais (- x - = +) ? (Esta é uma das bases fundamentais na ciência a que chamamos "Álgebra").

Faziam pior do que não me explicar essa dificuldade (que é, sem dúvida, explicável, visto que conduz à verdade);explicavam-na por razões evidentemente pouco claras para aqueles que as apresentavam. Pressionado por mim, o Sr. Chabert se embaraçava, repetia sua "lição", exatamente aquela contra a qual eu levantava objeções, e terminava tendo a coragem de dizer-me: "Mas é o costume, todo mundo admite esta explicação. Euler e Lagrange, que aparentemente valiam tanto quanto o senhor, admitiam-na muito bem".

Levei muito tempo para convencer-me de que minha objeção sobre o - x - = + não podia absolutamente entrar na cabeça do Sr. Chabert; e o que o Sr. Dupuy sempre me responderia com um sorriso superior apenas; e que os "grandes" a quem eu fazia perguntas sempre caçoariam de mim.

Limitei-me ao que, ainda hoje, digo a mim mesmo: é indispensável que - por - dá + seja verdadeiro, pois, evidentemente, empregando a todo momento esta regra no cálculo, chegamos a resultados "verdadeiros e indubitáveis".

Minha grande desgraça era esta figura:



> Suponhamos que RP seja a linha que separa o positivo do negativo, tudo que está em cima é positivo, como negativo é tudo que está em baixo; tomando o quadrado B tantas vezes quantas são as unidades no quadrado A, como posso fazer o quadrado C mudar de lado ?
>
> E, fazendo uma comparação desajeitada, que o sotaque arrastado de Grenoble do Sr. Chabert tornava ainda mais desajeitada, suponhamos que as quantidades negativas são as dívidas de um homem. Multiplicando-se 10.000 francos de dívida por 500 francos, como esse homem possuirá, ou conseguirá obter, uma fortuna de 5.000.000 ?"

Vê-se que aqui Stendhal e seus professores esbarraram duas vezes no obstáculo (4). O modelo comercial que facilita a compreensão da multiplicação.

Este texto é apenas um sintoma de uma incompreensão cuja história iremos seguir século por século.

III. Um pouco de História

A origem da regra dos sinais é atribuída geralmente a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C.). Esse autor não faz qualquer referência aos números negativos. No entanto, no início do Livro I da sua "Aritmética" (Diofantes), aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, ele escreve:

> "O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta".

Embora ele não oferecesse demonstração, esta já estava ao alcance dos antigos gregos. Os comentadores ou tradutores de Diofantes não tiveram problemas para redigir uma prova.

Eis, por exemplo, como ela se apresenta na "Aritmética" de Simon Stevin, publicada em

625 (Stevin, 1634):

"Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos.

Explicação do dado. Seja 8-5 multiplicado por 9-7, deste modo: - 7 vezes - 5 faz + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - por -, faz +). Depois - 7 vezes 8 faz - 56 (-56, porque, como está dito no teorema, - por +, faz -). E similarmente seja 8 - 5 multiplicado pelo 9, e darão produtos 72 - 45; depois juntem + 72 + 35, fazem 107. Depois juntem os - 56 - 45, fazem - 101; e subtraído o 101 de 107 resta 6, para produto de tal multiplicação. Da qual a disposição dos caracteres da operação é este:

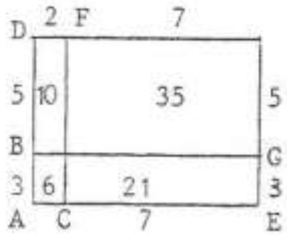
Explicação do quesito. É preciso demonstrar pelo dito dado, que + multiplicado por +, faz +, e que - por -, faz +, e que + por -, ou - por +, faz -.

	8 - 5
	9 - 7
-56	35
72	-45
	6

Demonstração. O multiplicador 9 - 7 vale 2; mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto ao lado acima, também 6, é o verdadeiro produto; mas o mesmo é obtido por multiplicação, lá onde dissemos que + multiplicado por +, dá produto +, e - por - dá produto +, e + por -, ou - por +, dá produto -, portanto o teorema é verdadeiro.

<u>Outra demonstração geométrica</u>. Seja AB 8 - 5 (a saber AD 8 - DB 5). Depois AC 9 - 7 (a saber AE 9 - EC 7), seu produto será CB; ou ainda de acorco com a multiplicação precedente ED 72 - EF 56 - DG 45 + GF 35, os quais nos mostrarão serem iguais a CB desse modo. Em suma, ED + GF, subtraído de EF e DG, resta CB.

<u>Conclusão</u>. Portanto mais multiplicado por mais, dá produto mais. E menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar.



Observar-se-á que o primeiro argumento é apenas uma verificação sobre exemplo numérico, sem alcance geral. Mas a demonstração geométrica pode servir de base a um desenvolvimento geral de (a-b) x (c-d) = ac-ad-bc + bd. De qualquer forma, não aparecem em Diofantes <u>números negativos isolados</u>. A regra (-) x (-) = (+) só intervêm como um <u>procedimento transitório</u>, antes de se obter um resultado "aceitável", ou seja, positivo.

A partir daí, os matemáticos põem-se a calcular. (obstáculo (1) estará definitivamente ultrapassado).

Embora desejassem evitar o emprego dos números negativos, a prática do cálculo vai forçá-los à sua introdução, como intermediários do cálculo. Durante muito tempo eles se espantaram ao perceber que cálculos efetuados com "falsos números" levavam afinal ao resultado exato !

É comum, por exemplo, que, substituindo-se um número positivo a em uma identidade polinomial P8x) x Q(x)≡ R(x), se obtenha um resultado positivo R(a), sem que P(a) e Q(a) o sejam.

Assim, a prática "clandestina" do cálculo dos números relativos antecedeu em 1600 anos sua compreensão. Eis uma lição que a didática da Matemática jamais deveria esquecer!

Para alguns matemáticos pouco escrupulosos, o êxito justificaria o emprego de números relativos isolados. Eles aparecem em Brahmagupta (séc. VII d.C.) (Brahmagupta, Bhascara, 1817). As obras indianas da época são apenas coletâneas de sentenças, acompanhadas de exemplos de aplicação numérica. Não há, contudo, preocupação de explicar por que "o negativo multiplicado pelo negativo dá o afirmativo".

Saiba-se que, na Idade Média e no Renascimento, o "Milagre" da eficácia inexplicada de um cálculo com relativos se repete em outros campos. A situação dos números incomensuráveis parece preocupar muito mais os matemáticos que tentam justificar a aritmética e a álgebra.

Simon Stevin (1540-1620) é o mais ilustre dentre estes. Sua idéia de número está expressa na definição:

"Número é aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa".

Ele não se preocupa em provar que os números decimais "rompidos" (isto é, fracionários), irracionais, etc., intervêm efetivamente como símbolos de medida. Ele chega a refutar a tese de Euclides, para o qual a unidade não seria um número, e proclama:

> "Concluímos, pois, que não existem números absurdos, irracionais, irregulares, inexplicáveis, ou surdos; e, sim, que, entre eles (os números), há uma tal excelência e coerência, que temos meios de medir a noite e o dia, em sua admirável perfeição".

Todavia o número negativo isolado não está em sua lista. Ele nada afirma sobre seu direito de existir como símbolo de quantidade. Que significa este silêncio ?

Por outro lado, ao longo de sua obra,

ele trata abundantemente de números negativos, utilizados como artifícios de cálculo. Justifica-os (como nas demonstrações citadas anteriormente). Aperfeiçoa seu emprego, ao escrever: "Em vez de dizer diminua 3, diga acrescente -3".

Seu embaraço, porém, manifesta-se claramente, quando sente necessidade de interpretar as raízes negativas de uma equação, e ele faz uma proposição engenhosa, que assim reformulamos: As raízes negativas das equações são as raízes positivas da transformada em $-x$ (ou ainda, se entendemos que -2 é raiz de uma equação $x^2 - px = q$, isto significa que $+2$ é raiz de $x^2 - px = q$).

Estamos diante de uma primeira manifestação do sintoma de evitação. Trata-se de inventar um processo que, na prática, renuncie à utilização dos números negativos.

Atualmente nenhum matemático tem necessidade de propor um tal desvio artificial. Se -2 é um número, do mesmo modo que +2, não tem cabimento arranjar-lhe uma interpretação, como solução para outro problema, proposto *ad hoc*.

Ao longo da história, os matemáticos se atreveriam a *praticar* cada vez melhor o cálculo dos números relativos. Mas, até o fim do século XVIII, as quantidades negativas não tinham adquirido o *status* de números. Ante sua intempestiva intrusão num cálculo, os sábios se viam às voltas com o problema: "Como me livrar dele ?"

Pierre de Fermat (1601-1665), por exemplo, fez com que seu amigo Jacques de Billy (Fermat 1891) redigisse conselhos sobre o comportamento a adotar diante de uma raiz "falsa" em uma equação diofantina. Ele propôs um método para obter dela, em alguns casos, uma solução "aceitável". (Este é outro típico exemplo do sintoma de evitação).

Costuma-se elidir uma parte importante do encaminhamento das idéias, atribuindo-se a René Descartes (1596-1650) o emprego de um sistema de coordenadas "cartesianas". Na verdade, ele jamais utilizou um eixo sobre o qual a abscissa de um ponto varia de $-\infty$ a $+\infty$. Simplesmente ele considerou separadamente duas semi-retas opostas, sabendo que as linhas negativas devem se dirigir em sentido oposto ao das linhas positivas. Mas as curvas que traçou limitam-se, em geral, ao primeiro quadrante. Por exemplo: atualmente não se entende por que a cúbica de equação $x^3 + y^3 = 3axy$ se chama "Fólio de Descartes". Com sua assíntota, ela absolutamente não sugere a forma de uma folha. Na realidade, foi o estudo da li mitação dessa curva ao primeiro quadrante que se tornou um desafio para Fermat em 1638.

Por outro lado, deve-se notar, que Descartes dedica um terço de seu livro "Geometria" (1628) à arte de se livrar das raízes falsas ! Ora, o ilustre autor proclama, por toda a sua obra, que só pretendia ater-se às questões fundamentais, deixando aos seus "sobrinhos" a tarefa de cuidar dos detalhes. Entende-se, pois, que, para ele, o artifício da mudança de origem das abscissas para obter equações com todas as raízes positivas não é uma questão subalterna; é um sintoma de evitação, que revela insegurança diante do uso dos números negativos.

Outro testemunho revelador nos é fornecido pelo "Dicionário Matemático" de Jacques Ozanan, publicado em 1691. No índice, estão enumeradas cerca de vinte espécies de números (entre os quais os números inteiros,"rompidos", incomensuráveis, surdos, etc.). É de crer, portanto, que na época não se cogitava de números negativos. No entanto, na rubrica "raiz", distinguem-se raízes verdadeiras, falsas ou imaginárias: "A raiz falsa é o valor negado da incógnita da equação". (!?) Esta incoerência contrasta com a relativa clareza que se observa no restante da obra.(*)

A partir do século XVII, os números negativos aparecem naturalmente nos trabalhos científicos. Eles são aceitos em razão de uma espécie de método Coué: a eficácia do cálculo é suficiente para confortar o matemático em sua fé. Nos trabalhos de cunho pedagógico é

(*) O leitor interessado poderá examinar também o início do capítulo LXVI da "Álgebra" de John Wallis (1673) (em latim), cujos excertos traduzidos em inglês figuram no "Source Book" de Smith. Wallis fala de números negativos, mas apresenta muitos sintomas de incompreensão análogos aos que citamos nos outros autores.

que se manifestam os apuros. O erudito não consegue dar uma explicação a seu ver satisfa tória. Não pode, contudo, confessar decente mente sua fraqueza e abusa de circunlóquios ricos em formas gramaticais negativas. Eis aí um sintoma encontrado em quase todos os auto res que citamos (exceto, talvez, em Clairaut, que sempre escreve com autoridade !).

Este sintoma aparece nos trabalhos de Colin MacLaurin. No "Tratado dos Fluxos(1742), ele escreve:

> "O uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas conseqüências difí- ceis de admitir, em princípio, e que pro piciam idéias aparentemente sem qualquer fundamento real".

Mais além, ao final de um discurso confuso, o autor esbarra brutalmente contra o obstáculo (3), condenando o emprego da relação entre nú meros positivos e negativos, considerados co mo quantidades incomparáveis heterogêneas ! (Ar gumento em termos quase idênticos pode ser visto em textos de d'Alembert e Carnot, citados mais adiante).

O "Tratado de Álgebra", publicado em 1748, dois anos após a morte de MacLaurin, tornou-se uma obra de referência, na Grã-Bretanha, como no continente europeu. Eis como ele apresenta as quantidades negativas:

> "Chamam-se quantidades <u>positivas</u>, ou <u>afirmativas</u>, as que são precedidas do sinal +, e <u>negativas</u>, as que são precedidas do sinal −. Para se ter uma idéia clara e exata desses dois tipos de quantidades, deve-se notar que toda quantidade pode entrar num cálculo algébrico, acrescentada, ou subtraída, ou seja, como aumento, ou como diminuição; ora, a oposição que se observa entre aumento e diminuição ocorre na comparação das quantidades. Por exemplo: entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o do dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada à direita, e uma linha traçada à esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-

> se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que, quando a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor".

O leitor perceberá que o obstáculo da passagem ao dinâmico assinalado por Piaget aí está perfeitamente ultrapassado ! Mas a compreensão está longe de ser adquirida, sob o efeito dos obstáculos (3) e (4), visivelmente não transpostos.

Entretanto o autor reconhece implicitamente que o que é absurdo de fazer com o zero absoluto (duas últimas linhas) é perfeitamente legítimo com um zero origem. Mais adiante, ele enuncia a regra dos sinais, comentando-a nestes termos:

> "Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou

seja, que os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -. Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão - por - dá +, que, todavia, é uma conseqüência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras ? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade.

+ a - a = 0: assim, multiplicando + a - a por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por n, terei como primeiro termo + na, portanto o segundo será - na, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão - no produto. Se multiplico + a - a por - n, de acordo com o caso precedente, obterei -na como primeiro termo; logo terei + na como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo - multiplicado por - dá + no produto".

O texto revela um progresso considerável, ao abordar formalmente a demonstração da regra dos sinais. A ligação com distributividade em relação à adição é implicitamente bem deduzida.

Pode-se perguntar até que ponto MacLaurin adota o ponto de vista formalista. A passagem que acabamos de citar já revela uma nítida vantagem do autor sobre todos os demais matemáticos até o século XIX.

O início de seu tratado dos fluxos (1742) é bem mais explícito:

> "A Matemática trata das relações entre as quantidades e de todas as suas propriedades, que podem ser submetidas a uma regra ou medida".

E, algumas linhas adiante:

> "Nesta ciência, examinan-se as relações das coisas, mais do que suas essências interiores, isto porque podemos ter uma idéia clara do que seja o fundamento de uma relação, sem ter uma idéia perfeita e inteira dos atributos de uma coisa. Nossas idéias sobre as relações são geralmente mais claras e mais distintas do que sobre as próprias coisas que mantêm essas relações; é principalmente a isto que devemos atribuir a evidência particular da Matemática. Não é preciso que os objetos

> de nossas teorias sejam descritos na atualidade, nem que eles existam fora de nós; mas é essencial que suas relações sejam claramente concebidas e evidentemente deduzidas; é também preferível dedicar-se particularmente a considerar aquelas e que podem aumentar nossos conhecimentos em Física".

Não parece estar lendo Hilbert ou Bourbaki ? Observe-se, particularmente a passagem em que ele aceita os objetos matemáticos, descritos em termos de estrutura, sem exigir "que eles existam fora de nós".(*)

Mas as passagens citadas antes disto também demonstram que esse espetacular progresso não bastou a McLaurin para adquirir uma compreensão completa. Esbarrando nos obstáculos (3) e (4), ele é incapaz de apresentar a teoria dos números relativos com todo o desembaraço desejável. Os leitores não suspeitaram

---

(*) Na edição inglesa do "Tratado dos Fluxos" (1742), essa profissão de fé é acompanhada por uma nota que remete ao "Ensaio sobre o entendimento humano" (Livro 2, cap. 25). Deve-se concluir daí que Locke é o pai de Bourbaki ?

de que MacLaurin quase compreendeu os números relativos. Seu avanço histórico seria provisóriamente perdido para a posteridade.

Enquanto todas as facetas do problema não forem simultaneamente dominadas, corre-se sempre o risco de uma recaída na incompreensão.

Léonard Euler (1707-1783) foi,seguramente, um virtuose do cálculo. Em seus artigos científicos, ele maneja os números relativos e complexos com engenhosidade e arrojo, sem levantar muitas questões a respeito da legitimidade de suas construções. No entanto, em uma obra destinada a principiantes (Euler, 1770), a intenção pedagógica o fez sentir-se obrigado a fornecer explicações, tentando, especificamente, justificar a regra dos sinais. Sua argumentação pode ser dividida em três partes:

1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer difi

culdade: três dívidas de $\underline{a}$ escudos fazem uma dívida de $3\underline{a}$ escudos. Logo $\underline{b} \times (-\underline{a}) = -\underline{ab}$.

— Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma <u>operação externa</u>. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.

2. Por comutatividade, Euler deduz daí que $(-\underline{a}) \times \underline{b} = -\underline{ab}$.

— Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de $\underline{a}$ escudos ?

3. Resta determinar o que <u>é</u> (grifo nosso) o produto $(-\underline{a})$ por $(-\underline{b})$.

— É claro, diz Euler, que o valor absoluto é $\underline{ab}$. Trata-se, portanto de decidir entre $+\underline{ab}$ e $-\underline{ab}$. Como $(-\underline{a}) \times \underline{b}$ já vale $-\underline{ab}$, a única possibilidade restante é de que $(-\underline{a}) \times (-\underline{b}) = +\underline{ab}$. (!!!)

Essa acrobacia não ultrapassa o nível da vulgarização. Mas se Euler não apresenta aqui melhor justificativa para a regra dos sinais, é porque, sem dúvida, não conhecia outra mais válida. A mesma obra revela ainda outro obstáculo, que Euler (e muitos outros) não conseguiu transpor e que se refere à incompreensão da unificação da reta numérica. Euler declara que a representação de um número negativo é uma letra precedida do sinal –.

Atualmente, em vez disso, o símbolo $-x$ designa o oposto do número x (de sinal indeterminado). A convenção explicitamente enunciada por Euler entra, aliás, em contradição com sua prática cotidiana: o ilustre analista jamais hesita em substituir, num polinômio ou uma série inteira, uma variável por um valor negativo ou imaginário.

As resultantes incoerências de lingua

gem são particularmente nítidas no seguinte texto de Gabriel Cramer, contemporâneo de Euler. Percebe-se que, no segundo parágrafo deste excerto, a letra <u>x</u> muda várias vezes de significado, enquanto se supõe que o parâmetro <u>a</u> seja implicitamente positivo !

> "Assim, na Curva que representa a equação $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ou $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5a}{6}$ (§.II), a equação mostra que, na Origem, onde x é zero, o valor de y é $\frac{5a}{6}$. $Aa = \frac{5a}{6}$ é, pois, a grandeza da <u>primeira ordenada</u>. Supondo, a seguir, x positivo, vê-se que, à medida que ela aumenta, os termos $\frac{xx}{6a}$ e x também aumentam, sem que o termo constante $\frac{5a}{6}$ diminua; o que prova que a abscissa x crescendo, a ordenada $y(= \frac{xx}{6a} + x + \frac{5a}{6})$, que é positiva, também cresce. Portanto, do lado das abscissas positivas, a Curva tem apenas um ramo ad, que incide totalmente no ângulo das coordenadas positivas, e que, partindo da extremidade <u>a</u> da primeira ordenada <u>Aa</u>, tende ao infinito afastando-se do Eixo das abscissas e do Eixo das ordenadas.
>
> Para conhecer o curso desta Linha do lado das abscissas negativas, faz-se x