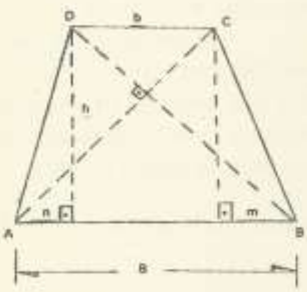
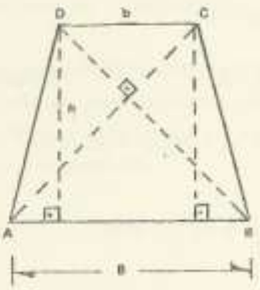
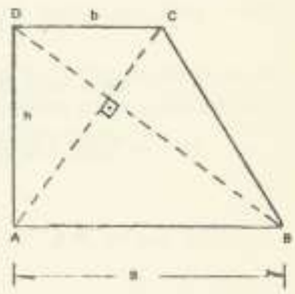
Em qualquer trapézio cujas diagonais são perpendiculares, a altura é igual à raiz quadrada da soma dos produtos das bases com o produto das projeções dos lados não paralelos sobre a base maior.

COROLÁRIO Nº 1 — Se o trapézio é isósceles, então a altura é média aritimética entre as bases.

COROLÁRIO Nº 2 — Se o trapézio é retângulo, então a altura é média geométrica entre as bases.







HIP.: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

TESE: $h = \sqrt{bB + mn}$

HIP.: $AB \parallel CD$

$\overline{AD} = \overline{BC}$

$AC \perp BD$

TESE: $h = \dfrac{b + B}{2}$

HIP.: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

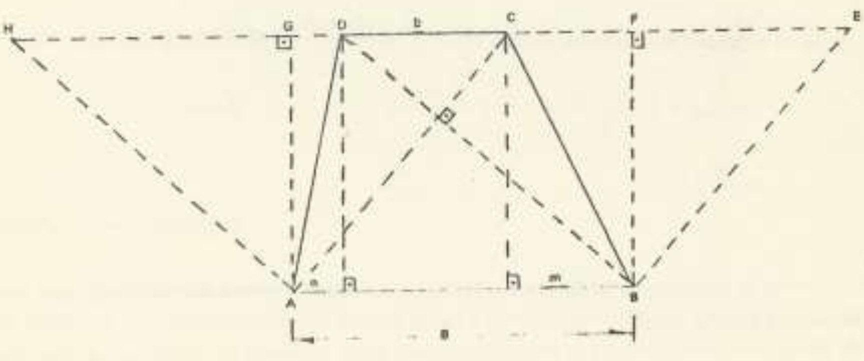
$\hat{A} = 90^o$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

TESE: $h = \sqrt{bB}$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja ABCD um trapézio cujas diagonais são perpendiculares, conforme figura abaixo.



Pelo vértice B, traça-se a paralela à diagonal $\overline{AC}$, até encontrar o prolongamento da base $\overline{CD} = b$. Como $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{BD}$, então o triângulo DBE é retângulo ($\hat{B} = 90^o$). Repetindo, agora, a mesma construção partindo-se do vértice A, temos o triângulo retângulo CAH ($\hat{A} = 90^o$).

Usando-se relações pitagóricas nos referidos triângulos, tem-se:

$$h^2 = \overline{BF}^2 = \overline{FE} \, . \, \overline{FD} = (B - m)\,(b + m) \quad (1)$$

$$h^2 = \overline{AG}^2 = \overline{GC} \, . \, \overline{GH} = (b + n)\,(B - n) \quad (2)$$

Desenvolvendo e somando as Eq. (1) e (2), tem-se:

$$h^2 = bB + Bm - bm - m^2$$

$$h^2 = bB - bn + Bn - n^2 \qquad \text{ou ainda}$$

$$2h^2 = 2bB - b\,(m + n) + B\,(m + n) - (m^2 + n^2)$$

Visto que $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$ e que $m + n = B - b$ (3)

Neste caso, tem-se:

$$2h^2 = 2bB + (m + n)\,(B - b) - [\,(m + n)^2 - 2mn\,] =$$

$$= 2bB + (m + n)\,(B - b) - (m + n)^2 + 2mn =$$

$$= 2bB + (B - b)^2 - (B - b)^2 + 2mn =$$

$$= 2\,(bB + mn).$$

Logo,

$$h^2 = bB + mn \quad \text{ou} \quad h = \sqrt{bB + mn}$$

Se o trapézio é Isósceles, então $m = n = \frac{B - b}{2}$ e neste caso, tem-se:

$$h^2 = bB + \left(\frac{B - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{B + b}{2}\right)^2 \qquad \text{Assim,}$$

$$h = \frac{B + b}{2}$$

Se o trapézio é retângulo então, neste caso, o produto $mn = 0$, pois uma das projeções é nula. Assim,

$$h^2 = bB \quad \text{ou} \quad h = \sqrt{bB}$$

De posse de todas essas idéias, não resistimos à tentação — como ficaria esse teorema se ao invés de trabalharmos com trapézios cujas diagonais são perpendiculares, trabalhássemos com quadriláteros cujas diagonais fossem perpendiculares. E, assim, surgiu a generalização do teorema de ELOI TAVARES (sobre quadriláteros).

Preliminarmente, faremos algumas considerações e uma pequena definição.

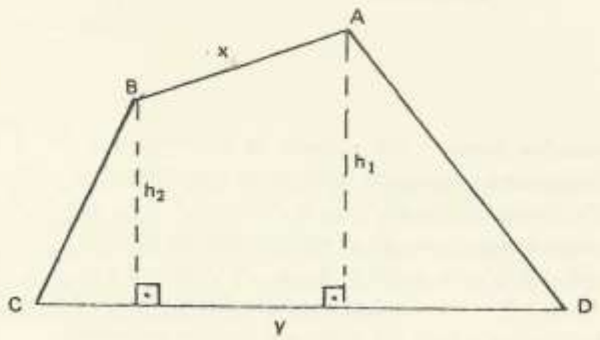
Só iremos trabalhar com quadriláteros convexos, cujas diagonais são perpendiculares. Para nós, projeção de um segmento de reta sobre outro ou sobre seu prolongamento, significará projeção ortogonal.

Se $\overline{AB}$ é um lado de um quadrilátero ABCD, então o lado oposto a esse é o lado $\overline{CD}$, i.e., o lado que não possui extremidades comuns com o lado $\overline{AB}$.

Seja x um lado de um quadrilátero convexo cujo lado oposto é y. Definem-se como **alturas relativas** do lado x em relação ao lado oposto y, os segmentos de perpendiculares traçadas de cada extremidade do referido lado, com relação ao lado oposto ou seu prolongamento.

Pelo exposto, cada lado de um quadrilátero convexo tem duas **alturas relativas**. Se, por acaso, há um lado que é paralelo ao lado oposto então, neste caso, as **alturas relativas** coincidem. Como exemplo temos os trapézios e os paralelogramos.

A figura abaixo elucida melhor a exposição.



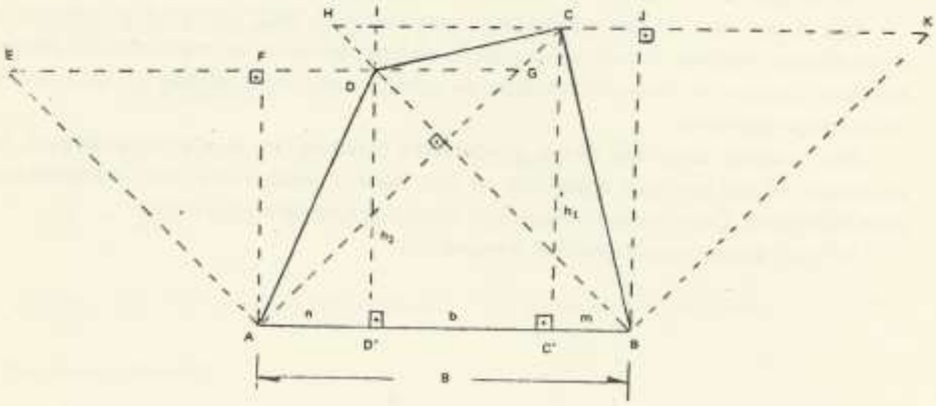
h_1 e h_2 são as **alturas relativas** do lado $\overline{AB} = x$ em relação ao lado oposto $\overline{CD} = y$.

TEOREMA (Generalização)

Em um quadrilátero convexo, cujas diagonais são perpendiculares, o produto das **alturas relativas** de um determinado lado é igual à soma algébrica dos produtos do lado oposto com a projeção do referido lado sobre este com o produto das projeções dos outros dois lados.

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo vértice B, traça-se a paralela à diagonal $\overline{AC}$ até encontrar a paralela $\overline{HK}$ ao lado $\overline{AB}$, sendo H o ponto de encontro do prolongamento da diagonal $\overline{BD}$ com a referida paralela. Pelo vértice A, traça-se a paralela à diagonal $\overline{BD}$ até encontrar a paralela $\overline{EG}$ ao lado $\overline{AB}$, conforme figura abaixo.



Pelas construções acima e em virtude da hipótese que $\overline{AC}$ é perpendicular a BD temos os seguintes triângulos retângulos fundamentais: HBK ($\hat{B} = 90^o$) e EAG ($\hat{A} = 90^o$), onde $\overline{CC'} = \overline{JB} = h_1$ e $\overline{DD'} = \overline{FA} = h_2$ são as alturas dos respectivos triângulos que, por sua vez, são as alturas relativas do lado $\overline{CD}$ cuja projeção sobre o lado oposto $\overline{AB}$ é $\overline{D'C'}$ = b e $\overline{AB}$ = B, i.e., m $(\overline{AB})$ = B e m $(\overline{D'C'})$ = b. Mais ainda, façamos $\overline{AD'}$ = n e $\overline{BC'}$ = m como as medidas das projeções dos outros dois lados do quadrilátero ABCD sobre o lado $\overline{AB}$, chamado de lado projetado.

Usando-se relações pitagóricas nos referidos triângulos, tem-se:

$$h_1^2 = \overline{JK} \, . \, \overline{JH} = (B - m)\ (b + m + \overline{IH}) \qquad \text{ou ainda}$$

$$h_1^2 = (B - m\ (b + m + x), \text{ fazendo-se } \overline{IH} = x \tag{1}$$

$$h_2^2 = \overline{FE} \, . \, \overline{FG} = (B - n)y, \quad \text{onde} \quad \overline{FG} = y \tag{2}$$

Por outro lado, os triângulos retângulos HID e AFG são semelhantes. Logo pode-se escrever:

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FG}} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{h_1 - h_2} = \frac{h_2}{y} \quad \text{ou ainda}$$

$$y = \frac{h_2\ (h_1 - h_2)}{x}, \quad x \neq 0 \tag{3}$$

Substituindo-se a Eq. (3) na Eq. (2), tem-se:

$$h_2^2 = (B - n) \frac{h_2 (h_1 - h_2)}{x} \quad \text{ou} \quad h_2 = (B - n) \frac{(h_1 - h_2}{x} \quad \text{ou ainda}$$

$$x = \frac{(B - n)\ (h_1 - h_2)}{h_2} = (B - n)\ (\frac{h_1}{h_2} - 1)$$

Substituindo o valor de x na Eq. (1), tem-se:

$$h_1^2 = (B - m)\ [b + m + (B - n)\ (\frac{h_1}{h_2} - 1)]$$

Porém, $B = b + m + n$ ou $B - n = b + m$ (4)

Neste caso, tem-se:

$$h_1^2 = (B - m)\ [b + m + (b + m)\ (\frac{h_1}{h2} - 1)] \quad \text{ou}$$

$$h_1^2 = (B - m)\ (b + m) \frac{h_1}{h_2} \quad \text{ou} \quad h_1 h_2 = (B - m)\ (b + m) \quad \text{ou}$$

$h_1 h_2 = bB + m(B - b - m) = bB + mn$. Portanto,

$$h_1 h_2 = bB + mn.$$

OBSERVAÇÕES:

A Eq. (4), $B = b + m + n$, só é verdade se as projeções dos outros dois lados do quadrilátero ABCD estiverem contidas no lado projetado $\overline{AB}$. Todavia, o teorema continua verdadeiro se as referidas projeções caírem fora do lado projetado $\overline{AB}$. Porém, se uma das projeções cair fora e a outra cair dentro do lado projetado $\overline{AB}$, então a expressão do teorema fica assim $h_1 h_2 = bB - mn$.

Razão pela qual, no enunciado do teorema, optamos pela expressão soma algébrica. Isto é, as duas projeções m e n devem ser orientadas.

A demonstração do teorema via Cálculo Vetorial é imediatíssima. É isso que consideramos pesquisa didática em sala de aula. Para finalizarmos, faremos uma aplicação do teorema e três comparações. Voltando ao problema original — qual a altura de um trapézio retângulo, cujas diagonais são perpendiculares, sabendo-se que as bases medem 4 e 9 centímetros?

PRIMEIRA SOLUÇÃO:

Usando o nosso teorema, temos a solução relâmpago:

$$h = \sqrt{4.9} = 6 \text{ cm}$$

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Teorema de LEGENDRE: Em um quadrilátero, cujas diagonais são perpendiculares, a soma dos quadrados de dois lados opostos é igual à soma dos quadrados dos outros dois.

Fazendo $\overline{BC} = z = \sqrt{h^2 + (9-4)^2}$ e aplicando o teorema de LEGENDRE, tem-se:

$$h^2 + z^2 = 4^2 + 9^2 \quad \text{ou}$$

$$2h^2 + 25 = 97 \rightarrow h = 6 \text{ cm}$$

TERCEIRA SOLUÇÃO: (Solução por áreas)

Fazendo $\overline{AC} = d$, $\overline{BD} = D$, $\overline{DB} = x$, $\overline{EB} = y$ e aplicando cálculo de áreas, tem-se:

$$\frac{d\,.\,x}{2} + \frac{d\,.\,y}{2} = \frac{d\,(x+y)}{2} = \frac{d\,.\,D}{2} = \frac{(9+4)\,h}{2} \quad \text{(área do trapézio)}$$

$$d\,.\,D = 13\,h \;(^*)$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos CDA e DAB, tem-se:

$$d = \sqrt{16 + h^2} \qquad \text{e} \qquad D = \sqrt{36 + h^2}$$

Substituindo d e D na Eq. $(^*)$, tem-se:

$$\sqrt{16 + h^2}\;\sqrt{36 + h^2} = 13h$$

$$h^4 - 72h^2 + 1296 = 0 \quad \text{ou} \quad (h^2 - 36)^2 = 0.\ \text{Assim, } h = 6 \text{ cm.}$$

QUARTA SOLUÇÃO: (Solução vetorial)

De acordo com os dados, tem-se as seguintes coordenadas:

A (0,0), B (9,0), C (4, h) e D (0, h)

Em virtude da hipótese, os vetores AC e BD são perpendiculares, logo o produto escalar é nulo, assim,

$$AC \cdot BC = 0 \text{ ou } \begin{pmatrix} 4 \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ h \end{pmatrix} = 0$$

$$-36 + h^2 = 0 \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

i) A primeira parte deste artigo foi distribuída para alguns colegas de magistério em 15/01/75 e, a partir daí, engavetamos o trabalho em virtude de termos encerrado o ensino de 2º grau, face a nossa pós-graduação em Matemática na PUC-RJ;

ii) Com a criação da Revista do Professor de Matemática (RPM), pela SBM, fomos ao fundo do baú e publicamos, no Comunicado do CESEP, na Página de Matemática, nº IX, em 16/04/84, só uma parte (por falta de espaço). Éramos, na ocasião, responsáveis pelo hebdomadário do Curso de Matemática daquele Centro de ensino superior.

Nossa intenção é que o TEOREMA seja estudado logo após o teorema de Pitágoras — à guisa de aplicação, na 8ª série do 1º grau;

iii) A recíproca do TEOREMA é verdadeira. Mas ainda, o TEOREMA é equivalente ao Teorema de LEGENDRE.

GRUPOS CÍCLICOS (Continuação)

Eduardo Quadra
GEPEM/USU

No Boletim 17 definimos "lei externa" e demonstramos suas propriedades. Neste número será vista a importância desta definição para a maior compreensão dos grupos cíclicos e suas propriedades.

SUBGRUPOS

1. DEFINIÇÃO:

Seja $(G, *)$ um grupo.
$(H, *)$ é subgrupo de $(G, *) \Leftrightarrow (H, *)$ é grupo, $H \subset G$.

2. PROPOSIÇÃO:

Sejam $(G, *)$ um grupo, $H \subset G$, e o elemento neutro de G.
$(H, *)$ é subgrupo de $(G, *) \Leftrightarrow e \in H$, $(x * y') \in H$, $\forall\, x, y \in H$

$\Rightarrow$ (pelas propriedades de grupo, é imediata).

$$\Leftarrow \begin{cases} * \text{ é associativa em } G \Rightarrow * \text{ é associativa em } H \\ e \in H, \text{ seja } x \in H \Rightarrow (e * x') \in H \Rightarrow x' \in H \\ x, y \in H \Rightarrow x, y' \in H \Rightarrow x * (y')' \in H \Rightarrow (x * y) \in H \end{cases}$$

OBS.: a condição $e \in H$ equivale a $H \neq \emptyset$

3. É DE DEMONSTRAÇÃO IMEDIATA: sendo (H, *) subgrupo de (G, *)

a) "os elementos neutros" de (H, *) é de (G, *) coincidem.

b) "os simétricos" de um elemento $x \in H$, coincidem no grupo (H, *) e no grupo (G, *)

GRUPOS CÍCLICOS

I. Seja (G, *) um grupo e $a \in G$. Seja e o elemento neutro.

PROPOSIÇÃO: Definido o conjunto: $\{ n \perp a / n \in \mathbb{Z} \} = [a]$

então: ([a], *) é subgrupo de (G, *)

(i) $0 \perp a = e \Rightarrow e \in [a]$

(ii) $x, y \in [a] \Rightarrow x = m \perp a, y = n \perp a$

$$x * y' = (m \perp a) * (n \perp a)' = (m \perp a) * ((-n) \perp a) = (m + (-n)) \perp a \in [a].$$

Diz-se que [a] é o subgrupo de (G,*), gerado por a, ou ainda que a gera [a]

II. Seja (G, *) um grupo. G é cíclico se e só se $\exists\, a \in G$ tq $[a] = G$

Um grupo cíclico pode possuir vários geradores.

([a], *) é grupo cíclico.

Se G é finito, (G, *) é grupo cíclico finito. Caso contrário é infinito.

III. ORDEM DE UM ELEMENTO.

Seja (G, *) um grupo, $a \in G$, e o elemento neutro de G.

Diz-se que a tem ordem finita se [a] é finito. Neste caso diz-se que a e [a] tem mesma ordem. Se [a] é infinito, diz-se que a tem ordem infinita.

DEFINIÇÃO: Se a tem ordem finita, a ordem de a é o menor natural não nulo m tal que $m \perp a = e$.

OBS.:

1. o único elemento de ordem 1 é o neutro: $\sigma(a) = 1 \Leftrightarrow a = e$
2. se [a] é finito, $b \in [a]$, então b tem ordem finita; mas nem todo elemento de um grupo infinito tem necessariamente ordem inifinta.
3. se a tem ordem finita, $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ tq $m \perp a = e$
4. $\sigma(a) = \min \{ n \in \mathbb{N}^* / n \perp a = e \}$

IV. EXEMPLOS:

1. $(\mathbf{Z}, +)$ é cíclico pois $[1] = [-1] = \mathbf{Z}$.

$$[1] = \{ z . 1/z \in \mathbf{Z} \} = \{ (-z) . (-1)/z \in \mathbf{Z} \} = [-1] = \mathbf{Z}$$

2. $(\mathbf{Z}_m, +)$ é grupo cíclico finito pois $[\bar{1}] = \mathbf{Z}m$

$$[\bar{1}] = \{ z . \bar{1} / z \in \mathbf{Z} \} = \mathbf{Z}m$$

3. $(\{2, 4, 6, 8\}, *)$ é cíclico.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \perp 2 = 6 \\ 1 \perp 2 = 2 \\ 2 \perp 2 = 4 \\ 3 \perp 2 = 8 \end{array}\right\} \text{2 gera}$$

2 e 8 geram $\{2, 4, 6, 8\}$
4 e 6 não geram
2 e 8 tem ordem 4 : $4 \perp 2 = 4 \perp 8 = 6$
4 tem ordem 2 : $2 \perp 4 = 6$
6 tem ordem 1 : $1 \perp 6 = 6$

*	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

V. PROPRIEDADES: SEJA $(G, *)$ grupo com neutro **e**, $a \in G$.

1. Seja m a ordem de a (logo $m \perp a = e$)

(i) $n \perp a = e \Leftrightarrow m / n$

$\Rightarrow\rfloor$ Pela definição de ordem, $m \leqslant n \Rightarrow 0 \leqslant n - m$
Suponhamos $n = m\,q + r \; (0 \leqslant r < m)$. Vamos mostrar que $r = 0$.
$e = n \perp a = [(q\,m + r) \perp a = [(qm) \perp a] * (r \perp a) = (q \perp (m \perp a)) * (r \perp a) =$
$= (q \perp e) * (r \perp a) = e * (r \perp a) = r \perp a \Rightarrow r = 0$ pois $0 \leqslant r < m$ e
m é o menor natural não nulo tq $m \perp a = e$. Logo, $n = q \cdot m$, ou seja, m / n.

$\Leftarrow\rfloor$ $m \perp a = e, m / n \Rightarrow m \perp a = e$ e $q \cdot m = n \Rightarrow n \perp a = (q \cdot m) \perp a =$
$= q \perp (m \perp a) = q \perp e = e$

(ii) $i \perp a = j \perp a \Leftrightarrow i \overset{(m)}{\equiv} j$
$i \perp a = j \perp a \Leftrightarrow (i - j) \perp a = e \Leftrightarrow m / (i - j) \Leftrightarrow i \overset{(m)}{\equiv} j$

2. a tem ordem finita $\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{N}^*$ tq $t \perp a = e$

$\Rightarrow\rfloor$ $[a]$ é cíclico finito $\Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbf{Z}, m < n$ tq $m \perp a = n \perp a \Rightarrow$
$\Rightarrow (m \perp a) * (n \perp a)' = e \Rightarrow (m + (-n)) \perp a = e \Rightarrow \exists\, t \in \mathbf{Z}, t = m - n$ tq
$t \perp a = e$.

$\Leftarrow\rfloor$ $\exists\, t \in \mathbf{Z}$ tq $t \perp a = e$. Seja $(m \perp a) \in [a]$ tq $m = qt + r$ e $0 \leqslant r < t$.
$m \perp a = (qt + r) \perp a = ((qt) \perp a) * (r \perp a) = (q \perp (t \perp a)) * (r \perp a) =$
$= (q \perp e) * (r \perp a) = e * (r \perp a) = r \perp a \Rightarrow [a] =$
$= \{e, a, 2 \perp a, 3 \perp a, \ldots, (t-1) \perp a\}$, pois $0 \leqslant r \leqslant t - 1$. Daí $[a]$ tem ordem finita.

3. Se a tem ordem infinita, $i \neq j$ $(i, j \in \mathbb{N})$, então $i \perp a \neq j \perp a$
$i \perp a = j \perp a \Rightarrow (i - j) \perp a = e$. Se $i - j \neq 0$, a tem ordem finita pela proposição 2. Logo $i - j = 0 \Rightarrow i = j$

4. Se a tem ordem finita m.

(i) $[a] = \{e, a, 2 \perp a, \ldots, (m-1) \perp a\}$

Em virtude da proposição 2, $\exists\, t \in \mathbb{N}^*$ tq $t \perp a = e$, Daí, $\{t \in \mathbb{N}^* / t \perp a = e\} \neq \emptyset$ e tem um mínimo, pelo princípio da Boa Ordem. Sendo m, por definição este mínimo, a mesma proposição mostra que $[a] = \{e, a, 2 \perp a, 3 \perp a, \ldots, (m-1) \perp a\}$

(ii) $e = 0 \perp a, a = 1 \perp a, 2 \perp a, 3 \perp a, \ldots, (m-1) \perp a$ são distintos dois a dois

Se $i \perp a = j \perp a$ e $0 \leqslant i < j \leqslant (m-1) \Rightarrow (j-i) \perp a = e$, e $0 < j - i < m$ o que contraria a definição de m. Logo $i \perp a \neq j \perp a$ se $0 \leqslant i < j \leqslant m - 1$.

5. Se [a] é infinito, os únicos geradores de [a] são: $a, -1 \perp a = a'$

(i) $z \perp a = (-z) \perp a' \Rightarrow a'$ gera [a]

(ii) $[a] = [b] \Rightarrow b = m \perp a, a = n \perp b \Rightarrow a = n \perp (m \perp a) = (n\,m) \perp a$

Da proposição 3 temos $1 \perp a = (n\,m) \perp a \Rightarrow 1 = n\,m$. Logo $m = \pm 1$

Daí $b = 1 \perp a = a$ ou $b = -1 \perp a = a'$

6. Se [a] é de ordem m, então é isomorfo, a $(\mathbb{Z}_m, \dot{m})$

Seja $f: \mathbb{Z}m \to [a]$

$\quad\quad \overline{x} \mapsto x \perp a$

(i) $f(\overline{x} \overset{+}{m} \overline{y}) = f(\overline{x+y}) = (x+y) \perp a = (x \perp a) * (y \perp a) = f(\overline{x}) * f(\overline{y})$

(ii) $f\,\mathbb{Z}_m = \{f(\overline{x}) / \overline{x} \in \mathbb{Z}_m\} = \{x \perp a / x \in \mathbb{Z}\} = [a] \Rightarrow f$ é sobrejeção

(iii) $t \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y$ pela proposição (4ii).

7. Se [a] é infinito, então [a] é isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$

Seja $f: \mathbb{Z} \to [a]$

$\quad\quad x \mapsto x \perp a$

(i) $f(x+y) = (x+y) \perp a = (x \perp a) * (y \perp a) = f(x) * f(y)$

(ii) $f\,\mathbb{Z} = \{f(x) / x \in \mathbb{Z}\} = \{x \perp a / x \in \mathbb{Z}\} = [a]$

(iii) $x \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y$ pela proposição 3.

OBSERVAÇÃO: Os interessados em obter maiores informações sobre o assunto podem dirigir-se ao autor, escrevendo parao endereço do GEPEM.

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA*

Augusto J. M. Wanderley
IM / UFRJ

Se computarmos o perímetro $\underline{L}$ e a área $\underline{A}$, da região plana delimitada por um quadrado, um triângulo equilátero ou uma circunferência, obteremos que nestes três casos particulares, vale

$$L^2 \geqslant 4\pi A$$

com igualdade verificada no caso da circunferência.

Nós nos propomos a demonstrar, usando apenas elementos contidos em um curso de Cálculo I, a seguinte generalização deste fato: **Teorema: Seja *C* uma curva plana, simples, fechada, com equações paramétricas dadas por funções continuamente deriváveis. Sejam *L* e *A*, o perímetro e a área da região delimitada por *C*, respectivamente. Então:**

$$L^2 \geqslant 4\pi A \text{ (\underline{Desigualdade isoperimétrica})}$$

Utilizaremos na demonstração, o seguinte:

Lema: Se $y: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ **é continuamente derivável, periódica, de período** 2π e $\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0$, **então**

$$\int_0^{2\pi} (y')^2\,dt \geqslant \int_0^{2\pi} y^2\,dt.$$

---

* Publicado no Boletim Informativo da Iniciação Científica do IM/UFRJ, ano 2, nº 3, Setembro 1985.

A igualdade vale se e somente se

$$y(t) = M\cos t + N\,\text{sen}\,t,$$

com *M*, *N* números reais.

Demonstração:

Seja $\alpha \in [0,2\pi]$ e $y(\alpha) = a$. Defina $(y(t) - a)^2 \operatorname{cotg}(t-\alpha)$ com zero, no ponto $t = \alpha$.

Temos

$$\int_0^{2\pi} [(y')^2 - y^2]dt = \int_0^{2\pi} [(y')^2 - (y-a)^2]dt + 2\pi a^2.$$

Como $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{(y')^2 - (y-a)^2 - [y' - (y-a)\operatorname{cotg}(t-\alpha)]^2\right\} dt =$

$$= [(y-a)^2 \operatorname{cotg}(t-\alpha)]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (y')^2\, dt \geqslant \int_0^{2\pi} y^2\, dt.$$

Além disso temos igualdade, se e somente se,

$$y' - y\operatorname{cotg}(t-\alpha) = 0$$

isto é, se e somente se,

$$y = M\cos t + N\,\text{sen}\,t,$$

com M, N números reais. Isto completa a prova do lema.

Para demonstrar o teorema, sejam $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, equações paramétricas de *C*, usando o comprimento de arco como parâmetro. Seja ainda $t = \frac{2\pi}{L}s$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (*). Temos:

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi \int_0^{2\pi} [(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2]\,dt + 4\pi \int_0^{2\pi} y\,\frac{dx}{dt}\,dt =$$

$$= 2\pi \left[\int_0^{2\pi} (\frac{dx}{dt} + y)^2\, dt + \int_0^{2\pi} ((\frac{dy}{dt})^2 - y^2)\, dt\right] \geqslant 0,$$

(*) Não há perda de generalidade em supor $\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0$.

graças ao lema acima. Além disso, $L^2 = 4\pi A$ se e somente se

$$x'(t) = -M \cos t - N \operatorname{sen} t,\ y(t) = M \cos t + N \operatorname{sen} t,$$

isto é, se e somente se

$x(t) = -M \operatorname{sen} t + N \cos t + P$, e $y(t) = M \cos t + N \operatorname{sen} t$ que são equações paramétricas de uma circunferência.

Corolário: De todas as curvas planas, simples, fechadas, com um dado perímetro, a que engloba a maior área é a circunferência com aquele perímetro.

Assim, resolvemos também um "problema variacional" ou, do "Cálculo das Variações", a saber, obter máximo A(f) onde a variável f é uma curva plana, simples, fechada, com um dado perímetro.

NOTAS HISTÓRICAS. O problema cuja solução é indicada no corolário, já aparece mencionado em uma lenda sobre a fundação de Cartago pela rainha Elisa, citada como Dido, na Enéida, de Virgílio. Daí ser conhecido como o "problema de Dido". A desigualdade isoperimétrica aparece no "Duas Novas Ciências" de G. Galileu, no caso particular de polígonos **convexos**. Galileu demonstra que $L^2 \geqslant 4A\alpha$ onde α é a área do polígono circunscrito à circunferência de raio um, com lados paralelos aos do polígono dado. A igualdade vale se e somente se o próprio polígono é circunscrito a uma circunferência. Na verdade, uma forma desta desigualdade já apareceu no final do século I, no "Almajesto", livro I, de Ptolomeu, onde ela é relacionada com a questão do porquê, face às leis físicas com as quais lidamos, os corpos celestes devem ter a forma de uma esfera. A propósito esta última questão só foi resolvida nos últimos anos por G. Szegö, vencedor da Olimpíada de Matemática da Hungria, em 1930. A solução de Szegö faz uso da desigualdade isoperimétrica.

TABELA DAS MEDIDAS E MOEDAS EM CIRCULAÇÃO NA JUDÉIA NO TEMPO DE JESUS CRISTO

Extraído do texto ARITMÉTICA PROGRESSIVA
de Antônio Trajano, pp. 144-145, 69ª Edição

Como as medidas e moedas mencionadas nos livros do Novo Testamento são quase desconhecidas e ignoradas, ao ponto de serem muito raras as pessoas que têm uma idéia exata das dimensões ou valores que elas representam, vamos dar aqui alguns esclarecimentos sobre este ponto, para os discípulos se familiarizarem com estas medidas e moedas, e poderem compreender com precisão e clareza os textos onde elas são referidas para ilustrar o ensino.

Medidas de comprimento. Entre os Judeus havia, no tempo de Jesus Cristo, três medidas de comprimento, que eram o cúbito, o estádio e a jornada de um sábado.

Cúbito, do latim cubitus, era a medida geral de comprimento dos antigos egípcios, babilônicos, gregos e romanos, e tinha por base a distância desde o cotovelo até a extremidade do dedo superior. O cúbito hebreu era igual ao cúbito egípcio, porque os judeus, durante a sua longa estada no Egito, adotaram nas suas medições o cúbito ali usado.

No Museu Real de Paris há dois exemplares antigos do cúbito, sendo um hebreu e o outro egípcio. Estes exemplares estão divididos em 6 partes iguais chamadas mãos, e cada mão dividida em 4 partes iguais chamadas dedos. Só pelo labor e pelas letras é que eles podem ser distinguidos, porque ambos têm o comprimento de 20 polegadas inglesas exatas. Ora, como a polegada inglesa tem 0,0254m, segue-se que 20 polegadas são 0,508m, isto é, meio metro e oito milímetros.

Portanto	o cúbito	tem 0,508m
	a mão	tem 0,084m
	o dedo	tem 0,021m.

Estádio, distância de 1/8 de milha romana, era a medida itinerária que os judeus haviam adotado dos romanos (Luc. 24; 13). Tinha a extensão de 185 metros.

Jornada de um sábado era a distância desde o tabernáculo até as tendas mais afastadas no acampamento de Israel no deserto. Este espaço media 2000 cúbitos que perfazem 1016 metros. Era esta a maior distância que o israelita podia andar em um sábado, e isso somente para fins religiosos (Act. 1; 12).

Medidas de capacidade. As medidas de capacidade usadas entre os judeus naquela época eram as seguintes:

Medidas	Lugares onde são mencionadas	Equivalente em litros
Chénica	(Apoc. 6; 6)	1,08 l
Módio	(Math. 5; Marc. 4; 21)	8,64 l
Sáto, módio e meio	(Math. 13; 33)	12,96 l
Metréta	(João, 2; 6)	38,88 l
Báto	(Luc. 16; 6)	38,88 l
Córo	(Luc. 13; 3)	388,88 l

Moedas. Naquela época, circulavam na Judéia não somente moedas judaicas, mas também moedas gregas e romanas que tinham a seguinte relação:

O talento	valia	60 minas
a mina	valia	100 drachmas
a drachma	valia	10 asses
o asse	valia	4 quadrantes
o quadrante	valia	2 leptos
o siclo	valia	4 drachmas
o stater	valia	4 drachmas
o didrachma	valia	2 drachmas
a drachma	valia	1 denário
o denário	valia	10 asses

1 real = 1×10^{-9} Cz$

Moedas	Lugares onde são menciondas	Valores em moeda brasileira (real)	
Lepto	(Marc. 12; 42, Luc. 12; 59	$003	15/16
Quadrante	(Marc. 12; 42)	$007	1/2
Asse	(Math. 10; 29, Luc. 12; 6)	$031	7/8
Denário	(Math. 18; 28; Marc. 6; 37)	$315	
Drachma	(Luc. 15; 8 e 9)	$315	
Didrachma	(Math. 17; 23)	$630	
Stater	(Math. 17; 26)	1$260	
Siclo	(Math. 26; 15, Zach. 11; 13)	1$260	
Mina	(Luc. 19; 16)	31$500	
Talento	(Math. 18; 24 e outros)	1:890$000	

Nota: Estas tabelas foram calculadas com muita precisão e sobre bases que não oferecem dúvida alguma, por isso exprimem com exatidão os valores que apresentam.

Damos aqui os nomes originais das medidas e moedas judaicas, proque os tradutores que verteram o texto do Evangelho para a nossa língua, forom muito infelizes na escolha dos termos para traduzir os nomes originais destas medidas. Assim o **módio,** que tinha 8 litros, foi traduzido por **alqueire,** que, entre nós, tem 36 litros. A **metréta,** que tinha 38 litros foi traduzida por **almude,** que tem apenas 16. A **chénica,** que era maior que o litro, e como unidade de peso era igual a duas libras romanas, valor porque S. Jerônimo a traduziu fielmente para a vulgata (Apoc. 6; 6), a chénica foi vertida para o português pela expressão **meia oitava,** quando duas libras romanas eram equivalentes a 24 onças ou a 192 oitavas!!! O **sato,** unidade determinada e muito vulgar na Judéia, e que tinha 12 litros, foi traduzido pelo termo **medida** que não exprime grandeza alguma, e que deixa um sentido vago, porque tanto pode significar uma medida grande, como uma pequena. O **cúbito** que tinha pouco mais de 50 centímetros, sem chegar a 51, foi traduzido por **covado** que tem 66, isto é, mais 16 centímetros do que a medida original, ficando assim falseados todos os cálculos feitos com esta base. Finalmente o **denário**, moeda romana tão conhecida e vulgar no tempo antigo, que era igual à drachma grega, e cuja etimologia atesta o seu valor que eram 10 asses, foi traduzido pela palavra **dinheiro,** termo vago sem significado definido, porque exprime qualquer moeda ou qualquer quantia, sem lhe precisar valor algum.

E deste modo, ficou desfigurada pela tradução a beleza de muitas passagens, onde o valor exato das medidas e das moedas realça e demonstra a sabedoria e a lógica do ensino ali exposto. Estas tabelas têm por fim remediar até certo ponto esse inconveniente, deixando ver com precisão o valor quantitativo revelado no texto.

RESENHA

"I POLIGONI"

"L'educazione Matematica", Anno V, n. 2, agosto 1984

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
GEPEM / IMURJ

A revista "L'educazione Matematica" é uma publicação quadrimensal sob a responsabilidade do Centro de Pesquisa e Experimentação em Educação Matemática da Universidade Cagliari, Sardenha, Itália. O GEPEM vem recebendo essa revista como permuta com o seu Boleteim desde 1981.

L'educazione Matematica publicou no número 2, agosto 1984, três interessantes artigos sobre polígonos. Cada um desses artigos trata o assunto adaptando-o aos seguintes níveis de escolaridade: escola elementar, escola média e escola superior que na terminologia italiana correspondem, respectivamente, ao 1º segmento do 1º grau, ao 2º segmento do 1º grau e ao 2º grau do nosso sistema escolar.

Esses artigos fazem parte da seção "Spazio Programmato" da revista, assim definido:

> "Neste espaço vêm relatados sistematicamente resumos da metodologia, da experimentação e dos resultados obtidos na Unidade de Pesquisa e Experimentação de Cagliari sobre atividade matemática na escola maternal, elementar, média inferior e média superior. Tal espaço está disponível ainda a outra Unidade de Pesquisa e Experimentação italiana e estrangeira para atividade de mesmo gênero desde que tenha caráter sistemático".

Os três artigos têm o mesmo título "I Poligoni". No primeiro, para a escola elementar, suas autoras – Carla Caredda e Maria Polo (Univ. Cagliari) – começam citando os objetivos dos novos programas italianos de matemática que achamos úteis transcrever:

> "A educação matemática contribui para a formação do pensamento nos seus vários aspectos: de intuição, de imaginação, de projeção, de hipótese e de dedu-

ção, de controle e portanto de comprovação ou negação. A vasta experiência realizada já demonstrou que não é possível chegar à abstração matemática sem percorrer um longo itinerário que junta a observação da realidade, a resolução de problemas, a conquista dos primeiros níveis de formalização. A mais recente pesquisa didática, mediante uma análise apurada dos processos cognitivos nos quais se baseia a aprendizagem da matemática, revelou a grande complexidade, o gradualismo de crescimento e a linha de desenvolvimento não unívoca. Neste contexto constatou-se que os algorítmos de cálculo e o estudo das figuras geométricas têm um valor formativo bem maior que a utilização prática que a uma época justificara a sua inclusão nos programas."

Em vista dessa premissa, as professoras concluem que, no final da escola elementar, as crianças devem ser capazes de descobrir, no seu meio-ambiente (como mundo da natureza ou como construção do homem), as várias formas geométricas e, portanto, os polígonos para um posterior estudo mais aprofundado. De uma primeira classificação com base no número de lados ou de ângulos chegarão àquela baseada em propriedades dos lados ou dos ângulos. Para evidenciar o aspecto dinâmico da geometria usam transformações isométricas; as não-isométricas, como as projetivas e afins, afirmam serem instrumentos eficazes para a passagem do concreto ao abstrato e vice-versa. Citam, como exemplos, a observação de plantas de apartamentos e geográficas, de mapas de um quarteirão para evidenciar a importância e a utilização da semelhança.

O itinerário didático é apresentado em 2 ciclos:

I — Manipulação — lúdica;

II — Representação Gráfica, com uma interessante seqüência de atividades bem diversificadas, chegando à medida de perímetro e de área.

O segundo artigo destina-se à escola média e foi escrito por Lucia Grugnetti (Univ. Cagliari).

Parte da observação do ambiente (mundo natural ou construído pelo homem) propondo perguntas tais como:

i) Por que os favos das abelhas são hexagonais?

ii) Por que o ninho dos pássaros tem, em geral, a forma esférica? que poderão ser respondidas após o desenvolvimento das atividades geométricas planas e espaciais. Modelos devem ser construídos com material de fácil obtenção para materializar as atividades.

As crianças são conduzidas, então, ao estudo mais aprofundado dos polígonos, como faces dos sólidos encontrados, mediante problemas bem dosados ao nível de suas possibilidades, chegando à resolução da situação-problema da pavimentação.

Numa outra série de exercícios, mediante construções bastante simples, determinam áreas de figuras planas, adquirem a noção de figuras equivalentes e concluem o teorema de Pitágoras, usando-o em situações do cotidiano.

Finalmente, o terceiro artigo de Giulia Caputo (CRSEN, Cagliari) destina-se à escola superior. Sempre com a mesma metodologia de motivar o aluno para a resolução de problemas, começa verificando se foram adquiridos certos conceitos fundamentais mediante desafios de situações-problema que devem ser vencidos pelos estudantes. Na fase sucessiva é introduzido o teorema de Pitágoras e apresentada a demonstração gráfica de Tchao Kinn King (II séc. d.C.), como segue:

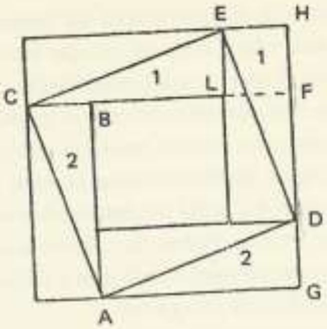


Fig. 1

Constrói-se um quadrado cujo lado é a soma dos catetos e nele inserem-se 8 triângulos retângulos como na figura 1, sendo os triângulos ADG, ABC, EHD e CLE congruentes; tem-se: que a área do quadrado ACED é igual à soma das áreas dos quadrados ABFG e LEHF (demonstração que deve ser conhecida por muitos professores). Outras demonstrações semelhantes à de Tchao Kinn King são apresentadas e também a de Leonardo da Vinci, para estimular os alunos com exemplos históricos e insistir na importância do Teorema de Pitágoras.

A demonstração de Leonardo da Vinci resulta das congruências dos triângulos IHL, AEF e ABC da Fig. 2, o que permite concluir que também são congruentes os quadriláteros: BCGD, GDEF, ABLI e ACHI da Fig. 2.

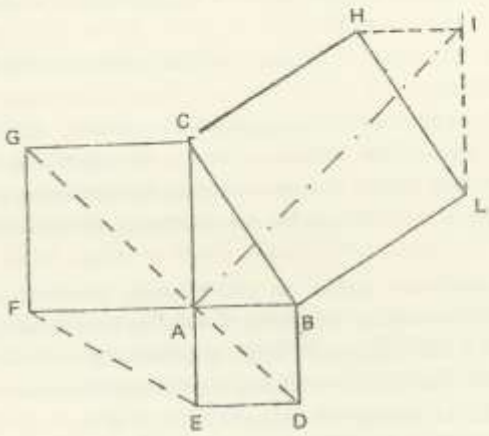


Fig. 2

Observação 1: "Mania de Pitágoras" é um interessante artigo publicado na RPM nº 2, 1º Semestre de 1983, onde se encontram estas demonstrações.

Nota: Os leitores que desejarem podem pedir ao GEPEM cópias xerox, em italiano, destes artigos.

BOLETIM DO GEPEM – ASSUNTOS TRATADOS

BOLETIM Nº 1:

- Relação dos participantes da 1ª Assembléia Geral.
- Matemática no Pré-Escolar – Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes.
- Matemática e Educação – Profª Moema M. Sá Carvalho.
- O Seminário sobre Educação Matemática realizado no Rio, em abril de 1976;
- Novas Tendências para o Ensino da Matemática e o Congresso de Karlsruhe – Prof. Ubiratan D'Ambrosio.
- Conclusões sobre os temas "Educação Matemática em Nível Pré-Escolar" e "Educação Matemática em Nível Médio".
- Idem sobre "Educação Matemática em Nível Escolar e Universitário" e "Educação Matemática em Nível Universitário".
- Idem sobre "Educação de Adultos, Formação Permanente em Matemática" e "Treinamento Profissional dos Professores de Matemática".
- Resumo de um trabalho em ensino de Matemática – Profs. Anna Franchi, Franca Cohen Gottlieb, Manhucia Perelberg Liberman, Lucila Bechara Sanchez e L. H. Jacy Monteiro.
- Relato do Trabalho que realizaram de 1972 a 1975 no Centro Educacional de Niterói com três turmas de 1º grau a partir de 5ª série – Profs. Eduardo Quadra e José Guilherme P. Barbosa.
- O Movimento do S.A.P.O – Prof. Luiz Roberto Dante.
- Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre (GEEMPA).
- Uma conversa informal com o Prof. Peter Hilton.
- Atividades do GEPEM.

BOLETIM Nº 2:

- Aprendizagem por meio de módulos instrucionais (relato de uma experiência) – Profs. Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb.
- Novas Tendências no Ensino da Matemática.
  Criatividade no Ensino da Matemática – Prof. Claude Gaulin.
- Seminário sobre o Ensino da Matemática, de abril/76 (cont.): "Uma Análise Crítica do Desenvolvimento dos Currículos em Educação Matemática".

– "Objetivos do Ensino da Matemática; Por que ensinamos Matemática?"
– "Métodos e Resultados de Avaliação em Educação Matemática".
– "Pesquisa relacionada com o Processo de Aprendizagem de Matemática".
– "Interação entre a Matemática e outras Disciplinas Escolares".
– "Análise crítica do uso das novas tecnologias educacionais no ensino da Matemática".
– "Papel dos algoritmos e computadores no ensino da Matemática".
– "O Ensino da Matemática no RJ" – Profª Amélia Maria N. P. de Queiroz.
– "Situação do Ensino da Matemática na BA" – Profª Martha Maria de Souza Dantas.
– "Anotações para um Panorama do Ensino da Matemática no DF".
– "Relato de Nossas Experiências".

BOLETIM Nº 3:

– Atividades integradas Português-Matemática – Profs. Nicola Siani Filho e Vera Lúcia Fontoura Lima.
– Avaliação de uma experiência pedagógica em Matemática – Prof. Arago de Carvalho Backx.
– Justificativa de um currículo de Matemática para o Ensino Pré-Escolar (4/7 anos) – Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes.
– Resolução de problemas por alunos de 10 a 12 anos de idade – Resumo da palestra do Prof. George Springer – Profªs Amélia Maria N. P. de Queiroz e Estela Kaufman Fainguelernt.
– A Televisão Educativa no Maranhão – Resumo de uma reportgaem do periódico "Direct", França.

BOLETIM Nº 4:

– Palestras do Prof. Luiz Alberto Brasil sobre suas pesquisas em Didática da Matemática na UFCeará – Resumo feito pela Profª Maria Lúcia Martins.
– Uma Aplicação de Álgebra Linear à Pecuária – Profs. Claudio Thomas Bornstein e Paulo Fábio Bregalda do Carmo.
– Máximo Divisor Comum de dois ou mais números – Prof. Raymundo Nonato Tavares.
– Relatório da Secretaria do GEPEM relativo ao ano de 1977.

BOLETIM Nº 5:

– Uma Introdução à ProgramaçãoLinear – Profs. Claudio Thomas Bornstein e Paulo Fábio Bregalda do Carmo.
– Três Idéias Básicas no Ensino da Matemática – Profª Maria Laura Leite Lopes.
– Queixas de ontem – tradução de carta de Galois a um redator – Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes.
– Notícias
– Resenha Bibliográfica.

BOLETIM Nº 6:

– Séries Didáticas de Matemática – Audiovisual – Profª Estela K. Fainguelernt.

– O Ensino da Matemática no Curso Secundário – Prof. Leon Lifchitz.
– Relatório do Curso de Prática de Ensino – Prof^{as} Anna Lúcia Nunes Machado Vallier e Fátima de Almeida.
– Os Números Primos e as Mensagens Secretas.
– Notícias – Módulo Instrucional "Produtos de Matrizes" – Profs. Antônio Olavo Silva Neto, Maria de Nazareth Jacques Gamboa e Vera Lúcia Swertz.
– Resenha de livros – "O Fràcasso da Matemática Moderna", Morris Kline – Prof^{a} Tânia Maia Querido.
– Relatório da Secretaria do GEPEM relativo a 1978.

BOLETIM Nº 7:

– Homenagem a Einstein no centenário de seu nascimento.
– A Matemática no Egito – Prof. José Eduardo Martins.
– Observações sobre o Desenvolvimento do Cubo I.R.E.M. – Montpellier.
– A Propósito das Calculadoras em Educação Matemática.
– Uma estratégia Integradora de Atividades Inter-disciplinares – Prof. Sergio Lorenzato.
– Notícias.
– Resenha Bibliográfica.

BOLETIM Nº 8:

– Participação da Universidade no Ensino de 1º e 2º graus: um projeto GEPEM-INEP – Prof^{a} Maria Laura Leite Lopes.
– Módulo Instrucional: Limte e Continuidade – Prof^{a} Estela K. Fainguelernt.
– Um pouco de História sobre o aparecimento dos números e dos diferentes sitemas de numeração. (Reflexões sobre o enfoque didático) – Prof^{a} Moema Sá Carvalho.
– A Geometria da Teoria da Relatividade de Einstein – Christovam Colombo dos Santos.
– Evolução da Didática da Matemática – Resumo da Palestra de Georges Glaeser.
– Resenhas: Matemática Aplicada (Trotta, Imenes, Jakubovic)
Experiências Pedagógicas Baseadas na Teoria de Piaget (Brasil).
– Notícias: Palavras do paraninfo e do patrono da turma de Licenciados em Matemática da USU, dez/79 (Profs. José Carlos de Mello e Souza e Franca Cohen Gottlieb).
– Relatório da Secretaria do GEPEM relativo a 1979.

BOLETIM Nº 9:

– Módulo Instrucional: Derivadas – Prof^{a} Estela K. Fainguelernt.
– Sobre uma "Geometria de Quatro Pontos" – Prof^{a} Moema Sá Carvalho.
– A Formação do Professor e a Melhoria da Educação Matemática – Prof. Howard Febr – Tradução da Profa Amélia Maria N. P. de Queiroz.
– Resenha: Álgebra Linear – Prof^{as} Estela K. Fainguelernt e Noelir de Carvalho Bordinhão.
– Notícias: Mesa Redonda realizada no GEPEM sobre a formação de Professores, Anísio Teixeira e os Problemas Educacionais que ainda estamos discutindo hoje.

BOLETIM Nº 10:

- A Percepção Visual na Criança – Profs. Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb.
- O Ensino de Geometria no Espaço para alunos de 2º grau – Profªs Helenalda Nazareth Calado, Manhucia Liberman e Regina Maria Pavanello.
- Módulos Instrucionais: Derivadas – Profª Estela K. Fainguelernt.
- Em nossas classes: Qual é a idade do Comandante? – Equipe Elementar do IREM/Grenoble/França – Tradução da Profª Moema Sá Carvalho.
- Comentários sobre Educação Matemática – Jean Piaget – Tradução da Profª Leila Alcure.
- Resenha: Prefácio de Emma Castelnuevo para o livro "Matemática nella Realitá", em colocação com Mário Barra – Tradução da Profª Franca C. Gottlieb.
- Notícias: 32º Encontro do CIEAEM.
  4º Congresso Internacional de Educação Matemática.
  (relatos pelas Profªs Anna Averbuch e Franca C. Gottlieb).
  Encontro Estadual de Professores de Matemática no RS.
  Relatório da Secretária do GEPEM/1980.

BOLETIM Nº 11:

Binômio Professor-Aluno na Iniciação à Educação Matemática – Uma Pesquisa Experimental – GEPEM/MEC/INEP.

BOLETIM Nº 12:

- Um Modelo Matemático para o Estudo das Dificuldades Apresentadas pelos Alunos do 2º grau na Resolução de Sistemas Lineares – Profª Estela K. Fainguelernt.
- Lógica Matemática Aplicada na Computação – Prof Emmanuel P. Lopes Passos.
- Educação Matemática na Escola Elementar – Profª Moema Sá Carvalho.
- Curso de Geometria Elementar – Profs. Imenes, Jakubovic e Trotta.
- Resenha: Progressões e Logaritmos; Noções de Matemática Vol. 2 – A. Antar Neto, Lapa, Sampaio e Sidney Cavalcante.

BOLETIM Nº 13:

- Reforma do Ensino da Geometria– Howard Fehr – Trad. Profª Moema Sá Carvalho
- Conjunto $\mathbb{N}$ dos Números Naturais e o Princípio da Indução – Profs. Eliana Benitah, Janete B. Frant, Rosangela Cohen.
- Estruturas Algébricas – Amélia Maria N. P. de Queiroz, Cléa Rubinstein, Regina Monken, Vera Maria F. Rodrigues.
- Notícias: XXXIII Encontro Internacional da CIEAEM.
  Cursos do PPMM – Programa de Perfectionnement des Maitres de Mathematique – Univ. Laval/Quebec – Palestra pelo Prof. Claude Gaulin.
  Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática GEPEM-USU.
- Resenha: Ávila, G. – Cálculo I, II e III.

BOLETIM Nº 14:

- O Jogo e o Desenvolvimento da Criança – Profª Amélia Maria N. P. de Queiroz.
- Matemática Moderna – Paulo Roth.
- Não chame de doença – Artigo da Revista Time
- Considerações sobre os símbolos – Profªs Anna Averbuch e Franca C. Gottlieb.
- Sobre o Ensino da Geometria – Rudolph Skouche, IREM de Lille.
- Resenha: Para onde vai a Educação – Piaget.
  Como Ensinar Ciências – Profs. Frota Pessoa, R. Gevertz, Ayrton Gonçalves da Silva.
- Notícias.

BOLETIM Nº 15:

- Sobre o Ensino da Geometria – Profª Maria Laura Leite Lopes.
- Jogos Lógicos – Profªs Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb.
- O Ensino da Matemática entre nós; "Alunos Despreparados" – Profª Moema Sá Carvalho.
- O Computador no Ensino Fundamental – Profª Amélia Maria N. P. Queiroz.
- A Aquisição da Linguagem e Compreensão da Matemática pelas Crianças – Hermínia Sinclair / Univ. Genebra.
- Uma Experiência em Coordenação Vertical – Profª Janete B. Frant.
- Discurso da Profª Estela K. Fainguelernt como paraninfa da turma de Matemática USU/1983.
- Resenha: Educação e Mudança – Paulo Freire.
  Geometria p/ Desenho Industrial – Celso Wilmer e Maria Regina Ferraz.
- Notícias: Pós-Graduação Lato-Sensu.
- Relatório da Secretaria do GEPEM/1983.

BOLETIM Nº 16:

- Caracterização Sócio-Econômico-Cultural do Aluno que ingressou no Curso de Formação de Professores do Instituto de Educação do RJ em 1984 – Profª Arminda F. Salomão R. Lima e equipe.
- Porque não devemos ensinar Matemática – Prof. Reginaldo N. S. Lima.
- Autoritarismo no Ensino da Matemática – Profª Maria do Carmo Villa.
- Por que Tornar a Matemática Compreensível? – Prof. R.P. Boas – Trechos Selecionados pelo Prof. Luiz Otávio Longlois.
- Aprender a Estudar – Programa nº 5/TVE – Profs. Vera Maria Rodrigues e Maurício Guimarães.
- Notícias sobre o Curso de Pós-Graduação.
- Página do Leitor – Profª Regina Monken
- Relatório da Secretária do GEPEM relativo a 1984.

BOLETIM Nº 17:

- Gripos Cíclicos – Prof. Eduardo Quadra.
- Epistemologia dos Números Relativos – Prof. Georges Glaeser.
- Página do Leitor: Enumerabilidade dos Racionais – Profª Regina Monken
- Olimpíadas Estaduais de Matemática – Rio de Janeiro – 1985