

# BOLETIM GEPEN

18

ANO XI

1º SEMESTRE

1986

*PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO*  
G E P E M  
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

## DIRETORIA DO GEPEM

PRESIDENTE: Moema Mariani de Sá Carvalho

VICE-PRESIDENTE: José Carlos de Mello e Souza

DIRETOR CULTURAL: Radiwal da Silva Alves Pereira

SECRETÁRIO GERAL: Vera Maria Ferreira Rodrigues

SECRETÁRIO: Regina Célia Monken

DIRETOR DE PUBLICAÇÕES: Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

ASSESSOR DE PUBLICAÇÕES: Maria José Monnerat

1º TESOUREIRO: Wilson Belmonte dos Santos

2º TESOUREIRO: Francisco Estarque Casás

EDITORES: Maria Laura Leite Lopes

Moema Sá Carvalho

Radiwal da Silva Alves Pereira

CONSELHO EDITORIAL: Anna Averbuck, Amelia Maria Noronha Pessoa Queiroz, Aristides Barreto, Estela Kaufman Fainguelernt, Franca Cohen Gottlieb, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Carlos de Mello e Souza, Zuleika de Abreu e Vera Maria F. Rodrigues.

RESPONSÁVEL "PÁGINA DO LEITOR": Regina Célia Monken

SECRETÁRIO DE ADMINISTRAÇÃO: Wilson Belmonte dos Santos

---

APOIO FINANCEIRO DO  
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA  
— PADCT - CAPES —

## ÍNDICE

APRESENTAÇÃO .....	5
<i>Maria Laura Leite Lopes</i>	
COMUNICAÇÃO .....	7
RELATÓRIO SOBRE O SEMINÁRIO INTERESTADUAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	9
<i>Moema Sá Carvalho</i>	
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, A EX- PERIÊNCIA DE RIO CLARO.....	17
<i>Luiz Roberto Dante</i>	
A HEURÍSTICA E O ENSINO DA RESOLUÇÃO DE PRO- BLEMAS.....	25
<i>Zaira Cunha Melo Varizo</i>	
ACONTECEU COMIGO .....	32
<i>Eloi Tavares de Souza</i>	
GRUPOS CÍCLICOS (continuação).....	40
<i>Eduardo Fernandes Quadra</i>	
A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA.....	44
<i>Augusto José Maurício Wanderley</i>	
TABELAS DE MEDIDAS E MOEDAS EM CIRCULAÇÃO NA JUDÉIA NO TEMPO DE J. C. ....	47
<i>Transcrição da Aritmética de Trajano</i>	
RESENHA DE ARTIGOS SOBRE POLÍGONOS E EXPERI- MENTAÇÕES DIDÁTICAS, PUBLICADOS NA REVISTA "L'EDUCAZIONE MATEMATICA, ANO V - Nº 2, CA- GLIARI, ITÁLIA .....	50
<i>Maria Laura Leite Lopes</i>	
BOLETIM DO GEPEM – ASSUNTOS TRATADOS.....	53

## A P R E S E N T A Ç Ã O

O Boletim do GEPEM, ao completar 10 anos, começa uma nova fase. O elemento determinante da mudança é o auxílio financeiro da CAPES pelo Subprograma Educação para a Ciência do PADCT.

A primeira mudança que pode ser observada, de imediato, é a sua apresentação. Pretendemos que ao aspecto exterior corresponda também um aprimoramento no seu conteúdo, uma maior penetração no meio educacional e regularidade na publicação para manter a semetralidade.

Como é do conhecimento geral, houve nos dias 14 e 15 de abril p.p. um Seminário Interestadual de Educação Matemática, comemorativo da primeira década do GEPEM. Teve a participação de 220 professores de 13 Estados da Federação.

Nada mais justo que iniciar o presente número do Boletim com o relatório desse Seminário, escrito pela Professora Moema Sá Carvalho, a quem rendemos a nossa homenagem pelo empenho e carinho com que preparou o Seminário.

Para difundir artigos já apresentados em publicações de circulação mais restrita estamos inserindo neste número os seguintes:

- A Desigualdade Isoperimétrica do Prof. Augusto J. M. Wanderley do IM/UFRJ.
- Tabelas das Medidas e Moedas em Circulação na Judéia no tempo de J.C., extraído da Aritmética de Trajano.

Estes artigos foram publicados em Boletim Informativo da Iniciação Científica do IM/UFRJ.

Animando os nossos professores para escrever as suas "pesquisas" em sala de aula e mostrar aos nossos colegas que a inovação e a criatividade podem estar sempre presentes no seu dia-a-dia profissional acolhemos o trabalho do Professor Eloi Tavares de Souza da Universidade Federal do Pará, cujo título é bastante sugestivo: "Aconteceu Comigo".

Ainda com o mesmo objetivo, temos a satisfação de publicar "A Heurística e o Ensino de Resolução de Problemas" da Professora de Didática de Matemática, da UFGO, Zaíra da Cunha Melo Varizo.

A luta pelo ideal da implantação de um Curso de Mestrado em Educação Matemática vem relatada na palestra que o Professor Luiz Roberto Dantas pronunciou no Seminário Interestadual de Educação Matemática. A sua publicação no Boletim deve-se ao fato de fornecer também dados importantes sobre a clientela e a descrição da organização curricular do Curso de Mestrado em Educação Matemática da UNESP, Campus de Rio Claro, SP, do qual o Professor Dante é o Coordenador.

Finalizamos (de maneira ainda incompleta) a exposição do Professor Eduardo Quadra, GEPEM, USU, sobre Grupos Cíclicos, começada no número 17 do Boletim.

Não podia deixar de aparecer uma resenha que neste número diz respeito a três interessantes artigos relatando experimentações sistemáticas, em três níveis diferentes de escolaridade, sobre os polígonos, realizados na Universidade Cagliari, Itália. Tais artigos podem sugerir idéias a serem desenvolvidas por nossos professores e desejamos que isto venha, realmente, a acontecer.

Com o objetivo de informar os nossos leitores do Boletim ou atualizar os artigos, damos uma lista de matérias publicadas nos números anteriores.

As contribuições tanto de críticas como de artigos e notícias para o Boletim serão bem-vindas.

## **COMUNICAÇÃO**

Por decisão da Assembléia Geral, realizada em 11 de março de 1986, foi prorrogado por 90 dias o mandato da Diretoria eleita para o biênio 84/86, tendo em vista a preparação e a realização do Seminário comemorativo dos 10 anos do GEPEM e cumprimento da primeira etapa do contrato com a CAPES relativo ao projeto NOVA FASE DO BOLETIM.

A nova Diretoria, com posse em 22 de maio de 1986 para o biênio 86/88, é a seguinte:

Presidente – JOSÉ CARLOS DE MELLO E SOUZA

Vice-Presidente – ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT

Secretário Geral – FRANCA COHEN GOTTLIEB

Secretário – FRANCISCO CASÁS

Diretor Cultural – ANNA AVERBUCH

Diretor de Publicações – MARIA LAURA M. LEITE LOPES

Assessor de Publicações – EDUARDO FERNANDES QUADRA

1º Tesoureiro – WILSON BELMONTE DOS SANTOS

2º Tesoureiro – REGINA MONKEN

**RELATÓRIO SOBRE O SEMINÁRIO INTERESTADUAL DE  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – RIO – ABRIL DE 1986  
PROMOVIDO PELO GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – G E P E M  
COOPERAÇÃO UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA  
PATROCÍNIO FINEP**

Realizou-se nos dias 14 e 15 de abril de 1986, no Auditório da USU, Rio/RJ, o Seminário Interestadual de Educação Matemática, comemorativo dos dez anos de atividades do GEPEM. Contou com a participação de 220 pessoas, das quais, além dos professores e de alguns estudantes de Licenciatura em Matemática do Rio de Janeiro, 6 eram de São Paulo, 2 do Paraná, 2 de Minas Gerais, 1 da Paraíba, 4 da Bahia, 2 do Pará, 1 do Rio Grande do Sul, 1 do Piauí, 2 do Distrito Federal, 1 de Goiás, 2 do Rio Grande do Norte e 2 de Pernambuco.

Compuseram a mesa de abertura dos trabalhos a Reverenda Madre Chanceler da Universidade Santa Úrsula, Maria de Fátima Maron Ramos, o Magnífico Reitor da Universidade Santa Úrsula, Professor Doyle Maia, o Exmo Senhor Diretor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Professor Lindolfo de Carvalho Dias, o Exmo Senhor Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Santa Úrsula, Professor Glauco José Wanderley Antunes, o Exmo Senhor Vice-Presidente do GEPEM, Professor José Carlos de Mello e Souza, a DD Senhora Diretora de Publicações do GEPEM e que o presidiu nos quatro mandatos anteriores ao atual, Professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes e a Presidente do GEPEM, Professora Moema Sá Carvalho.

Os trabalhos foram distribuídos por 4 painéis: 1º) "A Pós-Graduação em Educação Matemática"; Conferencistas: Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (I. M./UFERJ), Luís Roberto Dante (Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP); 2º) "Reencontro com a Geometria"; Conferencistas: Estela Kaufman Fainguelernt (USU), Reginaldo Naves de Souza Lima (UFMG), Rosa Menasché Schectcher (UFRJ); 3º) "A Experiência Matemática"; Conferencistas: Elon Lages Lima (IMPA), João Bosco Pitombeira de Carvalho (PUC/RJ); 4º) "O Impacto da Informática"; Conferencistas: Antônio Fernando Galiardo, (Universidade Estadual de Campinas, SP), Janete Bolite Frant (GEPEM), Nelson Maculan Filho (COPPE/UFRJ), Rosane Braune (CEN), Beбето Tornaghi (Prof. RJ).

Adotou-se a seguinte dinâmica:

Os painéis sobre "Pós-Graduação em Educação Matemática" e sobre "Experiência Matemática", que se realizaram nas manhãs de 2ª e 3ª feira, respectivamente, foram seguidos de debates em plenário, imediatamente após as exposições.

O painel sobre o "Reencontro com a Geometria" realizado na 2ª feira, dia 14, à tarde, foi seguido de exposição de trabalhos de alunos dos Colégios Santa Úrsula e Liessen na disciplina de Geometria coordenada pela Professora Estela Kaufman Fainguelernt. Houve em seguida uma organização dos participantes em grupos de trabalho onde foram discutidos diversos aspectos do ensino da Geometria. Os relatores desses grupos de trabalho levaram ao plenário as suas conclusões para serem então debatidas com a mesa, com a participação de todos os professores presentes.

O painel sobre o Impacto da Informática foi seguido de demonstrações da linguagem LOGO no micro-computador, bem como dos tipos de atividades para as quais os estudantes eram convidados a executar no curso promovido pelos professores Janete Bolite e Bebeto Tornaghi.

Houve em seguida o debate em plenário.

No primeiro painel, a "Pós-Graduação em Educação Matemática", foram conferencistas a Professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, titular da UFRJ e coordenadora do Curso de Pós-Graduação "Lato-Sensu" em Educação Matemática, do GEPEM, em convênio com a USU; o Professor Luís Roberto Dante, coordenador do Curso de Mestrado em Matemática, Área de Concentração no Ensino da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Campus de Rio Claro, SP. Presidiu a mesa de trabalhos a Professora Franca Cohen Gottlieb, da Universidade Santa Úrsula e do Colégio Souza Aguiar do Estado do Rio de Janeiro.

A Professora Maria Laura deu uma visão sumária do aparecimento e da evolução histórica do Ensino da Matemática no Ocidente. Salientou a importância de alguns vultos da História da Educação que determinaram mudanças decisivas nas concepções pedagógicas e dos pioneiros da Psicologia que nela influenciaram. Chegou ao nascimento da Educação Matemática, apontando algumas de suas linhas de pesquisa e evidenciando a convergência das disciplinas que a constituem.

Identificou o objetivo do Curso de Pós-Graduação "Lato-Sensu" em Educação Matemática promovido pelo GEPEM, expressando a convicção da equipe do GEPEM, de que **uma reforma de ensino é essencialmente uma política de formação de mestres competentes.**

Em seguida, o Professor Luís Roberto Dante salientou as dificuldades que tiveram que ser vencidas durante os três últimos anos na implantação do "Curso de Mestrado em Matemática com Área de Concentração em Ensino". Esse curso conta atualmente com o apoio da CAPES. Tem tido caráter experimental em relação ao currículo e, pelas estatísticas apresentadas, informou que tem sido procurado por professores de diversos Estados, embora sejam aceitos apenas dez cursandos em regime de tempo integral, e alguns outros em tempo parcial.

Fez considerações gerais sobre o funcionamento do curso que coordena e sobre objetivos da Educação Matemática, tendo despertado muito interesse especialmente por parte dos professores recém-formados.

Concluiu afirmando que a Educação Matemática é uma disciplina emergente que prepara para se sair da situação atual de carência do ensino da Matemática.

Ambas as exposições deram lugar a várias perguntas no plenário, mantendo-se um alto nível de troca de idéias na ocasião dos debates que se seguiram. Evidenciou-se o consenso sobre as conclusões apresentadas pelos dois expositores.

O segundo painel foi o "Reencontro com a Geometria".

Foram conferencistas os Professores, Rosa Menasché Schetcher, da Escola de Belas Artes da UFRJ; Reginaldo Naves de Souza Lima, da UFMG, Belo Horizonte; Estela

Kaufman Fainguelernt, da Universidade Santa Úrsula, do Laboratório de Currículos da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, dos Colégios Santa Úrsula e Liessen. A mesa de trabalhos foi presidida pela Professora Anna Averbuch, da USU e do Instituto de Educação, que se referiu aos Grupos de Professores que já têm lutado pelo aperfeiçoamento do ensino da Matemática.

A Professora Rosa Menasché chamou a atenção para o fato de que veiculando e desenvolvendo as idéias apresentadas pelo professor de Matemática, o professor de Desenho precisa ter em vista que a representação geométrica deve ser desenvolvida de forma criativa e liberada da visão estreita em que apenas a informação impere nas construções geométricas escolares. Observou que, desempenhando hoje a imagem um papel fundamental em nossa sociedade tecnológica, não há razão por que não utilizá-la como instrumento pedagógico, prestando-se atenção para que só tenha lugar na escola um desenho que esteja amparado em sólidas bases matemáticas. Fez considerações sobre os métodos de resolução de problema geométrico e exemplificou, com propriedade, alguns problemas que propôs.

Concluiu sua exposição afirmando que:

“Impõe-se, antes de tudo, um trabalho docente solidário entre os diversos segmentos de uma unidade escolar, e entre os diversos segmentos de uma sociedade consciente.”

O Professor Reginaldo Naves de Souza Lima discorreu sobre o “hiato da aprendizagem”, momento entre o “saber” e o “não saber”, segundo o enfoque pedagógico. Comentou as exigências que condicionam a aprendizagem. Estabeleceu paralelos elucidativos do seu pensamento entre a aprendizagem na Matemática e em setores diversos nas situações práticas da vida comum, salientando as características da aprendizagem de idioma estrangeiro.

Abordou o ensino da Geometria nos seus aspectos relacionados com as figuras e relacionados com o caráter lógico.

Concluiu, chamando a atenção para o fato de que “usualmente as tarefas apresentadas aos alunos não são suficientemente sensatas a ponto de preencher o hiato da aprendizagem”.

A Professora Estela Kaufman Fainguelernt fez um relato sobre a sua experiência realizada no ensino da Geometria, como professora e coordenadora de Matemática no 1º e no 2º grau de escolas particulares. Esclareceu como procurou, nessa experiência, evidenciar a aplicabilidade e o papel integrador da Geometria, partindo de conceitos obtidos em vivências individuais dos alunos, orientados em seu convívio com material concreto, como por exemplo, desenvolvimento ou planificação de sólidos geométricos.

Comentou que o grupo de trabalho que coordena procura sempre relacionar as atividades em Geometria com as de outras disciplinas, sobretudo Artes e Desenho Geométrico; procura ainda, no incentivo à aplicabilidade de conceitos matemáticos, encorajar os alunos a descobrirem atividades que deles necessitem, utilizando-os. Dessa procura dos alunos, observe-se que resultou uma série de trabalhos práticos dos estudantes, dos quais o Seminário contou com uma interessante mostra, numa exposição paralela.

A Professora Estela, referindo-se à sua experiência no 2º grau, informou que foi aí abordada a Álgebra Linear de forma elementar, de modo a que o aluno adquirisse com facilidade o conceito de espaço vetorial; e partindo do ponto de vista vetorial, introduziu a Geometria Analítica plana e espacial.

Prosseguindo no seu depoimento, mostrou as vantagens dos alunos estudarem as funções construindo, simultaneamente, seus gráficos, no plano cartesiano.

Em suma, advertiu que "o ensino da Geometria não pode ser reduzido à mera aplicação de fórmulas e de resultados obtidos por alguns teoremas, sem a preocupação da descoberta de caminhos para sua demonstração, como também para a dedução de suas fórmulas".

O painel despertou grande interesse nos participantes, em geral; vejam-se os comentários que provocou nos grupos de estudos formados para refletir sobre o ensino da Geometria.

Formaram-se 8 grupos que iriam refletir, discutir sobre o ensino da Geometria de 1ª a 4ª, de 5ª a 8ª, no segundo grau e na formação do professor, tendo deles participado professores dos diferentes Estados representados no Seminário. Os grupos tinham em média 10 pessoas, excetuando-se o último que contou com 23 professores.

O 3º painel, "A Experiência Matemática", teve, como previsto, a participação dos Professores, Elon Lages Lima e João Bosco Pitombeira de Carvalho. Presidiu a mesa o Professor José Carlos de Mello e Souza.

O Professor Elon Lages Lima, ao discorrer sobre a "Resolução da Equação do 3º grau" mostrou como na luta para a conquista da solução de um problema matemático interferem até as disputas pessoais daqueles que nela estão envolvidos.

Na interessante história da resolução da equação do 3º grau, o Professor Elon enfocou, com propriedade, não somente a contribuição dos algebristas italianos da época do Renascimento, como também, a necessidade do amadurecimento obtido, por vezes, através de séculos, para atingir a resolução plena de um problema.

Concluiu com a mensagem de que possui melhores condições de ensinar aquele que tem amor pela causa do ensino, pela sua matéria e pela história da evolução do conhecimento, junto ao respeito pelo aluno.

A exposição do Professor Pitombeira objetivou a sala de aula, tornando-se uma verdadeira lição de didática apesar de haver declarado desconhecer os conceitos da psicopedagogia.

Como "Matemática é a arte de resolver problemas" falou sobre a importância da resolução de problemas que deve começar no pré-escolar indo até a pesquisa. Em qualquer nível, é essencial que nos problemas haja algo de novo a descobrir, haja um desafio.

Sobre a crise do ensino, não se limitou ao caso brasileiro, fazendo referência ao Relatório "Uma Nação em Perigo" da Comissão designada, em 1976, pelo Governo dos E.U. para analisar o ensino naquele país. Uma das conclusões do Relatório é que "as escolas estavam mais preocupadas em como ensinar do que o que ensinar". Salientando a distorção contida nessa afirmação, por meio de paralelo entre a Matemática e a Música, o Professor Pitombeira concluiu pela importância da competência Matemática.

No 4º painel, "O Impacto da Informática", foram participantes os Professores: Nelson Maculan, da COPPE e do I.M./UFRJ; Rosane Braune, representando o Grupo de Matemática do Centro Educacional de Niterói, coordenado pela Professora Nícia Pereira Muniz; Janete Bolite Frant, do Curso do GEPEM, coordenadora de Matemática do Colégio Isa Prates e do Curso BEJA-LOGO (de computação, linguagem LOGO); Alberto Tornaghi, do Curso BEJA-LOGO (de computação, linguagem LOGO) e Antonio Fernando Gagliardo do Núcleo de Informática Aplicada à Educação da UNICAMP. Presidiu a mesa de trabalhos o Professor Radiwal da Silva Alves Pereira (UFRJ).

O Professor Nelson Maculan Filho esclareceu sobre a utilização do computador no desenvolvimento de novos métodos matemáticos. Exemplificou com o "teorema das

quatro cores”, sobre o número máximo de cores diferentes com que se pode colorir um mapa, de modo que dois países vizinhos não tenham a mesma cor; sua demonstração foi realizada, com computador de grande porte, após ter sido estabelecida a equivalência das configurações possíveis a um número finito de grafos (da ordem de 100). Falou ainda na solução do problema com a ajuda de cálculo numérico, utilizando computador, nos sistemas de equações lineares etc.

Observou que a solução de problemas com a ajuda de computador acabou por trazer novos problemas à Matemática, onde se criaram novas teorias como por exemplo, a “Teoria da Complexidade de Cálculos”, onde se enfoca a avaliação, a priori, da quantidade de operações numéricas e lógicas e a da própria memória da máquina. Também a Geometria clássica tridimensional, que vem sendo aplicada na reconstrução e síntese de imagens por computador, teve que sofrer, para isso, adaptações.

Terminou comentando que a Informática e a Matemática possuem uma ligação altamente interativa.

A professora Rosane Braune do CEN, historiou as atividades desenvolvidas pelo CEN com o objetivo de familiarizar os seus professores com o computador.

Discorreu sobre a experiência do Grupo de Matemática que, juntamente com psicólogos e especialistas da área de computação, optou por trabalhar assuntos que vinham apresentando dificuldades na sua aprendizagem, tais como, a divisão, no 1º segmento do 1º grau. Foram elaborados programas visando reconstituir as etapas da aprendizagem da divisão, levando em consideração o respeito às etapas de maturação das estruturas mentais das crianças, tendo presente a necessidade de propiciar aos alunos autonomia de pensamento, desenvolvimento de capacidade de raciocínio, atendimento a diferenças individuais etc. A aplicação dos programas é utilizada para alunos da 4ª série (duas turmas), funcionando as outras como turmas-controle.

Os Professores Bebeto Tornaghi e Janete Bolite Frant, do curso BEJA-LOGO, intitularam sua palestra de “Brincando se Estuda”.

Abordando a indagação de que “em que medida a Informática pode trazer uma nova proposta pedagógica”, deram seu depoimento sobre experiência que estão desenvolvendo no Curso que se propuseram a oferecer não só para crianças, como também para professores.

Nesse curso, utilizam o computador com o objetivo de “desenvolver o raciocínio lógico, como agente modificador da pedagogia”. Partem do princípio de que “o processo ensino-aprendizagem se dá a partir de atividades lúdicas onde a criança desenvolve as estruturas, na medida em que busca soluções para os projetos a que se propõe”. Trabalham com crianças na faixa de 3ª a 8ª série do 1º grau de escolas particulares da zona sul, Rio, RJ. Usam a linguagem LOGO desenvolvida por Seymour Papert, traduzida para o português.

Conclusões dos dois expositores:

“Jogando, divertindo-se ao máximo, as crianças desenvolvem conteúdos de diversas áreas do conhecimento. Por exemplo:

Geometria Analítica, Geometria Diferencial, Geometria Euclidiana, Álgebra, Comunicação e Expressão, Física etc.”.

“As crianças afirmaram que trabalhando juntos produziram mais.”

“Será interessante verificar, num futuro já mais próximo, como e o que se modifica na escola como um todo em consequência das exigências trazidas pelos alunos a partir dessa relação, vivida num ambiente onde são mais autônomos do que naqueles onde estão acostumados a estudar.”

O Professor Antonio Fernando Gagliardo fez considerações sobre os aspectos educacionais da utilização da linguagem do computador na educação escolar, chamando atenção para sua utilização não mecanicista, num alerta aos educadores para que “não se perca de vista o pensar da criança e como a criança adquire o conhecimento”. Concluiu com a mensagem:

“A introdução do computador no ambiente educacional deve definir então a verdadeira função educativa do computador: a de revelar e valorizar as condições nas quais a aprendizagem é enriquecida.”

Os debates que se seguiram demonstraram, por um lado, o interesse e a curiosidade na possibilidade de utilização do computador na educação, e por outro a apreensão quanto à possibilidade de invasão de computadores no ensino de 1º e 2º graus, apenas como chamarizes mercantilistas, sem o preparo e a elucidação indispensáveis do professor.

Chegou-se finalmente ao consenso de que os professores precisam tomar conhecimento desse novo instrumento para, utilizando-o ou não, no ensino, poderem ser guiados pelo seu bom senso, com conhecimento de causa. Ignorá-lo seria o maior mal e conhecê-lo poderá trazer vantagens se souberem como o aproveitar, pondo-se em dia com a sua potencialidade.

## DEBATES EM PLENÁRIO

Nos debates houve esclarecimentos quanto a:

- Regime de funcionamento dos cursos de Pós-Graduação em Educação Matemática, citados e comentados no 1º painel. Muitos professores se mostraram interessados e procuraram se inteirar da filosofia e das condições de trabalho de cada um desses cursos.
- Conveniência de se manter a Geometria como disciplina básica tanto no 1º como no 2º grau, especialmente nos cursos de formação de professores.
- Métodos e processos de preparar o aluno para a boa aprendizagem da Geometria, desde as primeiras séries.
- Perigo da preocupação exagerada com o método, em detrimento do conceito matemático.
- Objetivos da aprendizagem da Geometria.
- Utilização do computador na Educação e a preocupação do abuso mercantilista de sua presença na Escola.
- Vantagens para o professor do conhecimento histórico da evolução de problemas da Matemática.
- A necessidade de se aperfeiçoar a formação do professor no 2º grau e na Universidade.
- A necessidade de Formação Permanente do professor.

## CONCLUSÕES FINAIS

Foram, em resumo, as seguintes, as conclusões obtidas por consenso:

● Uma reforma de ensino é essencialmente uma política de formação de mestres competentes.

● A Educação Matemática é uma disciplina emergente, necessária para que se possa vencer a situação atual de carência do ensino de Matemática.

● As disciplinas que compõem a Educação Matemática não são devidamente cuidadas, atualmente, na formação acadêmica de professor e necessitam ser devidamente exploradas nesse período de sua formação.

● A Formação Permanente do professor torna-se indispensável à obtenção de bons quadros profissionais.

● A Pós-Graduação e o Mestrado em Educação Matemática já são uma realidade que deve ser mantida e estimulada.

● A pesquisa em Educação Matemática, como cerne da pós-graduação, necessita ser incentivada, na busca permanente de aperfeiçoamento no processo ensino-aprendizagem.

● Sobre a Geometria e o Desenho Geométrico.

Para que se conquiste uma mudança para melhor em relação ao que hoje se encontra, tanto no ensino do Desenho Geométrico como no de Geometria, divorciados um do outro e ambos divorciados do raciocínio lógico, da observação visual e da percepção espacial, observou-se que

— é indispensável o domínio do conteúdo teórico da Geometria, tanto por parte do professor de Matemática quanto por parte do professor de Desenho Geométrico.

Observou-se ainda que:

— a representação geométrica deve ser desenvolvida de forma criativa e liberada da visão estreita em que apenas as informações imperem nas construções geométricas;

— o Desenho Geométrico deve estar amparado em sólidas bases matemáticas, além de motivado pelo papel que a imagem hoje desempenha em nossa sociedade industrial e pela observação da própria natureza;

— a aprendizagem da Geometria deve se relacionar com a das outras disciplinas, como Ciências, Arte, Desenho. Aconselha-se o recurso de literatura paralela, citada como exemplo “Geometria para Desenho Industrial”, de Celso Wilmer;

— julgou-se também aconselhável que as observações, planificações, etc., de objetos geométricos, as observações de formas geométricas encontráveis no cotidiano, das transformações geométricas elementares facilmente perceptíveis, precedam as formalizações, generalizações e demonstrações da Geometria.

● Sobre a Informática:

Procurou-se avaliar o papel do professor ante a possibilidade de presença do computador no colégio, examinando as diferentes alternativas de sua utilização e a ameaça mercantilista que pode representar.

Examinaram-se as alternativas de sua utilização no ensino, como:

— um auxiliar de ensino;

— um elemento com potencialidade para estimular o desenvolvimento do raciocínio, como um agente modificador de pedagogia;

— objeto de instrução em programação ou análise de sistemas.

Considerando, por outro lado, que a Informática e a Matemática possuem uma ligação altamente interativa; que o computador está presente em várias atividades da

sociedade atual e que pode desempenhar o papel de agente favorável ao desenvolvimento do raciocínio, como na linguagem LOGO, concluiu-se que o professor tem a obrigação de não o ignorar, atualizando-se em relação ao computador e sua potencialidade.

- Ficou claramente estabelecido a absoluta importância do professor dominar o conteúdo matemático e de manter uma atitude de respeito e estímulo à experiência individual de seus alunos na aprendizagem da Matemática.

## AVALIAÇÃO GLOBAL

Os objetivos a que o GEPEM se propôs ao programar esse Seminário foram plenamente atingidos quanto: ao número de pessoas envolvidas, 200 participantes; à abrangência geográfica – 13 Estados da Federação, aí representados Pará, Maranhão, Piauí, Bahia, Distrito Federal, Rio de Janeiro, São Paulo, Pernambuco, Minas Gerais, Paraíba, Paraná, Rio Grande do Sul e Rio Grande do Norte; e ao alcance de níveis profissionais, numa gama que foi de estudantes de Licenciatura a professores de 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> graus e professores universitários; quanto ao envolvimento dos presentes nos debates, à alta qualidade das contribuições dos conferencistas, à receptividade às suas mensagens, à atualidade dos temas escolhidos e quanto às conclusões obtidas nos grupos de trabalho e nos debates em plenário.

Acrescente-se, o que não se traduz em letra de forma nem objetivamente se mede, o amadurecimento decorrente não só das comunicações e dos debates como do convívio entre colegas de profissão interessados todos no ideal comum de se aperfeiçoarem e de levarem adiante os resultados desse aperfeiçoamento.

## PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A EXPERIÊNCIA DE RIO CLARO

*Luiz Roberto Dante*  
*IGCE - UNESP / Campus de Rio Claro*

O Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" (UNESP) – Campus de Rio Claro - SP, manteve durante seus 26 anos de existência sua vocação para a formação de recursos humanos. Algumas dezenas de seus ex-alunos são doutores em Matemática por Instituições altamente reconhecidas pela comunidade científica, grande porcentagem dos seus ex-alunos atuam como docentes de várias Universidades Brasileiras e o contingente de ex-alunos de Rio Claro que atuam como professores de Matemática na rede de ensino de 1ª e 2ª graus é bastante significativo.

Além dessa atividade primordial de formar licenciados e bacharéis, Rio Claro sempre se preocupou em oferecer atividades de atualização e aperfeiçoamento ao pessoal já graduado. Desde 1972 vem oferecendo cursos de especialização e aperfeiçoamento para professores de 1ª e 2ª graus, quer em conteúdo, quer em metodologia. Essa atividade provocou, em 1980, a assinatura de um Convênio entre a UNESP e Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, para treinamento dos professores de Matemática, em forma de cursos modulares de 30 horas, ministrados aos sábados ou nos períodos de férias escolares. Esse Convênio foi renovado para o período 1986 - 1990. Até agora já ministramos 54 desses cursos atingindo 2.160 professores I e III da rede. A partir de 1985, o treinamento de todos os monitores de Matemática das 118 Delegacias de Ensino do Estado de São Paulo passou a ser realizado em Rio Claro. Nos últimos anos, vários Encontros e Simpósios regionais e nacionais sobre Ensino de Matemática foram sediados em Rio Claro, atraindo interessados de todo o país. Alguns docentes do Departamento de Matemática de Rio Claro têm participado ativamente em Congressos Nacionais e Internacionais, em projetos de melhoria de Ensino de Matemática e em Grupos Técnicos e/ou Assesores que visam a melhoria do ensino de ciências no país.

Esse passado nos levou a pleitear junto à Reitoria da UNESP a criação de uma Pós-Graduação em Educação Matemática, o primeiro do país nessa área. O processo foi encaminhado em 1981 e após ajustes e acertos, foi aprovado pela UNESP em 1983, para

ser iniciado em 1984. Entretanto, foi aprovado com o nome "Pós-Graduação em Matemática: Área de Concentração em Ensino de Matemática", contrário ao nosso desejo inicial.

O Curso já admitiu 03 turmas (1984, 1985 e 1986) e um resumo do que ocorreu até agora está sintetizado nos quadros 1, 2, 3, 4 anexos.

Não se trata, em absoluto, de uma Pós-Graduação em Matemática e tampouco em Educação. Embora fundamentais para o Curso, essas duas áreas específicas apenas amparam a espinha dorsal do mesmo, que são as questões pertinentes à aprendizagem e ao ensino da Matemática. Isto fica explícito na Estrutura Curricular do novo programa proposto. Nosso curso é, claramente, de Educação Matemática e não é, obviamente, um curso de Educação com opção Matemática. É especificamente destinado à pesquisa e formação de recursos humanos de alto nível para o ensino de uma disciplina, a Matemática. O Curso está agora estruturado de modo a suprir uma lacuna das mais sérias em uma área altamente prioritária. Sua estrutura levou em conta o que está acontecendo na rede de ensino de 1ª e 2ª graus do país, ou seja, este Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática está vinculado ao setor produtivo que, nesse caso, são os sistemas escolares que absorvem, ao menos teoricamente, 30 milhões de jovens em idade escolar. É aí que esperamos ter impacto e não produzir mais Mestres em Matemática ou em Educação. Daí, a nova denominação: Pós-Graduação em Educação Matemática.

Para tanto, nosso programa tem características que o distinguem de uma pós-graduação específica em Matemática ou em Educação, a saber:

- a) Interdisciplinaridade — Matemática, Estatística, Educação, Psicologia e ciências sociais.
- b) Interação entre o conteúdo matemático e os aspectos pedagógicos envolvidos, o que exige dos docentes das disciplinas matemáticas uma grande sensibilidade pela Educação.
- c) Observação e investigação experimental, junto a classes-piloto e a classes regulares.
- d) Seminários de discussão, com prioridade sobre aulas expositivas.
- e) Avaliação baseada mais em atividades individuais ou em grupos, e menos em exames convencionais.

Programas de Educação com tais características já existem em importantes centros estrangeiros (USA, França, Inglaterra e Alemanha), mas voltados para os sistemas educacionais desses países. O programa de Rio Claro, leva em conta as especificidades e problemáticas brasileiras.

Na nova proposta que entrará em funcionamento — em 1987, mudamos o nome para Pós-Graduação em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA porque já é um nome mundialmente consagrado para englobar todos os estudos e pesquisas relacionadas com a aprendizagem e o ensino da Matemática em todos os níveis de escolaridade, desde seus aspectos filosóficos e científicos até os de natureza prática.

As novas linhas de pesquisa são:

1. Fundamentos Matemáticos e Filosóficos da Educação Matemática
2. Tendências Atuais em Educação Matemática
3. Ensino e Aprendizagem da Matemática.

A nova Estrutura Curricular (quadro 5) foi estabelecida tendo em vista as seguintes considerações.

A prática educativa vivenciada nesses dois anos, as reuniões periódicas de docentes e alunos dessa Área, as conversações mantidas com os dois Comitês Técnicos da CAPES que nos visitaram, os contatos individuais do Coordenador dessa Área com pessoas, grupos, centros e Instituições envolvidas de alguma forma com Educação Matemática, nos levaram às seguintes decisões:

1. Uniformizar o número de créditos para todas as disciplinas. Todas as disciplinas passam a ter oito créditos (4 horas/aula efetivamente dadas e 4 horas para as atividades de estudo, pesquisa e seminários decorrentes da aula). Dessa forma, o aluno continuará precisando cursar pelo menos oito disciplinas para completar os 60 créditos exigidos.
2. Incluir no Programa as disciplinas Álgebra Linear e Lógica Matemática, consideradas unanimemente necessárias à formação em Educação Matemática.
3. Constituir um Grupo de disciplinas de Matemática, que é o Grupo C, fazendo parte da Área de Concentração e formado por disciplinas consideradas básicas e essenciais para uma boa formação matemática dos estudantes, no nível de Mestrado. Assim, a Área de Concentração passa a ter três blocos de disciplinas. O Grupo A, formado por disciplinas mais específicas de Educação Matemática, o Grupo B por disciplinas de Educação e o Grupo C por disciplinas de Matemática. O Grupo D constitui a Área de Domínio Conexo, formado por disciplinas importantes, porém, complementares na formação de um Mestre em Educação Matemática. Pensa-se em ampliar o número de disciplinas desse Grupo quando houver condições de fazê-lo.

Com essa mudança na Estrutura Curricular, procuramos destruir a única e significativa crítica que tanto os Comitês Técnicos da CAPES, como pessoas, grupos e Instituições, faziam ao nosso Programa, e com a qual concordávamos, que era o da pouca exigência em Matemática que o mesmo apresentava, pelo fato das disciplinas específicas de Matemática estarem diluídas na Área de Domínio Conexo.

O número de vagas em cada ano está condicionado ao número de vagas que cada orientador tem, uma vez que cada um deles pode orientar no máximo 06 (seis) estudantes simultaneamente.

Atualmente o Conselho de Área é formado pelos seguintes:

Prof. Dr. Luiz Roberto Dante (Coordenador)

Profª Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Prof. Dr. Mario Tourasse Teixeira

Prof. Dr. João Ivo Bertolo

Marcelo de Carvalho Borba (representante discente)

As inscrições (que podem ser efetuadas por carta) para o Exame de Admissão ao Curso são realizadas geralmente na 1ª quinzena de Novembro. As inscrições para ingresso como aluno especial são realizadas num dia determinado dos meses de Fevereiro e Julho de cada ano. Maiores informações poderão ser obtidas na

Seção de Pós-Graduação / IGCE-UNESP  
Caixa Postal, 178  
13500 – Rio Claro - SP  
Fone: (0195) 34-0122 - ramal 19

**QUADRO 1**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**a) CATEGORIA DE CANDIDATOS (1984, 1985, 1986)**

Categoria	Inscrito	Selecionado/ Matriculado
Docentes Universitários	30	11
Magistério de 1º e 2º Graus	79	11
Recém Formados	12	04
Sem Emprego	05	02
<b>TOTAL</b>	<b>126</b>	<b>28</b>

**b) PROCEDÊNCIA DE CANDIDATOS (1984, 1985 e 1986)**

Estado	Inscrito	Selecionado/ Matriculado
Bahia	05	01
Distrito Federal	01	01
Espírito Santo	01	—
Maranhão	01	—
Minas Gerais	08	03
Pará	01	—
Paraná	04	03
Pernambuco	01	—
Piauí	01	01
Rio de Janeiro	03	02
Rio Grande do Norte	04	—
Rio Grande do Sul	06	01
São Paulo	86	15
Santa Catarina	04	01
<b>TOTAL</b>	<b>126</b>	<b>28</b>

**c) ALUNOS REGULARMENTE MATRICULADOS (situação em Abril/86)**

Ano de Ingresso	Vagas	Inscritos	Efetuaram Matrícula	Evasão	Matriculados dos Atualmente
1984	10	58	10	—	10
1985	10	42	10	—	10
1986	08	26	08	—	08
<b>TOTAL</b>	<b>28</b>	<b>126</b>	<b>28</b>		<b>28</b>

**QUADRO 2**  
**PROCEDÊNCIA DE CANDIDATOS**  
 Curso de Pós-Graduação em Matemática  
 Área de Concentração em ENSINO DA MATEMÁTICA

Estado	1984			1985			1986			TOTAL		
	I	M	E	I	M	E	I	M	E	I	M	E
Bahia	02		02	02		02	01	01		05	01	04
Distrito Federal				01	01					01	01	
Espírito Santo				01						01		
Maranhão							01			01		
Mato Grosso						01						01
Mato Grosso do Sul						01						01
Minas Gerais	04	01		02			02	02		08	03	
Pará				01						01		
Paraná	03	03					01			04	03	
Pernambuco							01			01		
Piauí	01									01	01	
Rio de Janeiro	03	02								03	02	
Rio Grande do Norte				01		01		03		04		01
Rio Grande do Sul	03		02	01	01		02			06	01	02
Santa Catarina				02			02	01		04	01	
São Paulo	42	03	46	31	08	34	13	04	13*	86	15	93
<b>TOTAL</b>	<b>58</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>42</b>	<b>10</b>	<b>39</b>	<b>26</b>	<b>08</b>	<b>13</b>	<b>126</b>	<b>28</b>	<b>102</b>

OBS.: (\*) apenas 1º Semestre de 1986

- I - inscrição na seleção
- M - matriculados (regulares)
- E - especiais

**QUADRO 3**  
**DISCIPLINAS OFERECIDAS**

Curso de Pós-Graduação em Matemática  
Área de Concentração em ENSINO DA MATEMÁTICA

Disciplina	84/1º		84/2º		85/1º		85/2º		86/1º	
	r	e	r	e	r	e	r	e	r	e
<b>ÁREA DE CONCENTRAÇÃO</b>										
Idéias Essenciais da Matemática M. T. Teixeira	09	11			09	12			07	08
Tendências em Educação Matemática U. D'Ambrosio	09	13			12	12			08	06
Conteúdos e Metodologias do Ensino da Matemática (1º e 2º Graus) L. R. Dante							12	06		
Aprendizagem Matemática L. R. Dante			09	11					11	05
Teorias da Aprendizagem L. M. Santos							12	02		
Filosofia da Educação M. A. V. Bicudo	05	12	03	13	07	06			08	04
Didática Aplicada ao Ensino de Matemática M. C. O. Micotti			09	-			12	-		
Psicologia da Cognição J. Martins							-	-		
<b>ÁREA DE DOMÍNIO CONEXO</b>										
Estatística Aplicada à Educação M. L. L. Wodewotzki R. A. Cunha (col.)	04	08			09	-			08	-
Álgebra I. Bicudo					10	-			09	04
Fundamentos de Geometria M. T. Teixeira			06	14			09	08		
Análise J. G. Ruas Filho J. I. Bertolo (col.) R. C. Bassanezi (col.)							02	02		
Cálculo Numérico e Computação O. L. Linhares										
História da Matemática R. G. Lintz							17	14		
Estudos de Problemas Brasileiros J. R. Langenbuch (coordenador)	04	-			07	-			05	-

OBS.: r -- alunos regulares  
e -- alunos especiais

#### QUADRO 4

Nome ATUAL:  
Curso de Pós-Graduação em Matemática  
Área de Concentração em Ensino de Matemática

#### ESTRUTURA CURRICULAR ATUAL (1984 - 1986)

Disciplina	Créditos
<b>ÁREA DE CONCENTRAÇÃO</b>	
<b>Grupo A</b>	
1. Idéias Essenciais da Matemática	10
2. Tendências em Educação Matemática	10
3. Conteúdos e Metodologias do Ensino da Matemática (1º e 2º Graus)	10
4. Aprendizagem Matemática	10
<b>Grupo B</b>	
1. Teorias da Aprendizagem	06
2. Filosofia da Educação	06
3. Didática Aplicada ao Ensino da Matemática	06
4. Psicologia da Cognição	06
<b>ÁREA DE DOMÍNIO CONEXO</b>	
1. Estatística Aplicada à Educação	07
2. Cálculo Numérico e Computação	07
3. Fundamentos de Geometria	07
4. Análise	07
5. Álgebra	07
6. História da Matemática	07

O aluno precisa escolher, pelo menos, 03 disciplinas do Grupo A, 02 do Grupo B e 03 do Domínio Conexo.

## QUADRO 5

Nome PROPOSTO:  
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática  
Área de Concentração:  
Ensino da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos

### ESTRUTURA CURRICULAR PROPOSTA (início em 1987)

Disciplina	Créditos
<b>ÁREA DE CONCENTRAÇÃO</b>	
<b>Grupo A</b>	
1. Idéias Essenciais da Matemática	08
2. Tendências em Educação Matemática	08
3. Conteúdos e Metodologias do Ensino da Matemática (1º e 2º Graus)	08
4. Aprendizagem Matemática	08
<b>Grupo B</b>	
1. Teorias da Aprendizagem	08
2. Filosofia da Educação	08
3. Didática Aplicada ao Ensino da Matemática	08
4. Psicologia da Cognição	08
<b>Grupo C</b>	
1. Álgebra	08
2. Álgebra Linear	08
3. Análise	08
4. Fundamentos de Geometria	08
<b>ÁREA DE DOMÍNIO CONEXO</b>	
<b>Grupo D</b>	
1. Estatística Aplicada à Educação	08
2. Cálculo Numérico e Computação	08
3. Lógica Matemática	08
4. História da Matemática	08

O aluno precisa escolher pelo menos 02 disciplinas de cada um dos Grupos A, B, C e D.

## A HEURÍSTICA E O ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

*Zaíra da Cunha Melo Varizo*  
*Faculdade de Educação da UFGO*

### CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma das principais preocupações do professor de matemática é o ensino de resolução de problemas. Como professora de Estágio Supervisionado de Matemática, vimos dedicando, desde os primeiros anos de nossas atividades docentes uma parte específica do curso para a discussão desse aspecto do ensino de matemática.

Foi sempre nossa preocupação o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, por considerá-la primordial no desenvolvimento da inteligência e incompleta a educação quando falha neste aspecto.

A capacidade de resolver problemas é inerente ao homem mas as características peculiares da matemática podem desenvolver essa capacidade. Por isso é que atribuímos ao professor de matemática uma grande parcela na responsabilidade do desenvolvimento da inteligência de nossos alunos. O professor de matemática deve, pois, dedicar cuidados especiais ao ensino de resolução de problemas, contribuindo eficiente e eficazmente na formação intelectual de seus alunos.

A fim de orientar nossos alunos de estágio a como ensinar a resolução de problemas, procedemos a algumas investigações e fomos encontrar a fundamentação para o ensino na heurística, e foi nos trabalhos de G. Polya que a definiu como: "a que trata de compreender o método que conduz à solução de problemas" (Polya, 1957 p. 113), que baseamos nossos estudos.

Considerando de suma importância a divulgação dessas idéias, não apenas no campo restrito de nossos alunos, mas também entre todos aqueles que atuam na área da educação em matemática, propomo-nos neste trabalho, originado de nossas discussões em sala de aula sobre heurística e sua aplicação, oferecer uma idéia abrangente do que seja a heurística e em que ela pode contribuir para o ensino da resolução de problemas.

## HEURÍSTICA: CONCEITUAÇÃO E IMPORTÂNCIA

Presente ao dia-a-dia do professor de matemática está, a desafiá-lo, a tarefa de ensinar a resolver problemas, inegavelmente um dos principais objetivos do ensino da matemática.

O estudante de matemática, desde os seus primeiros anos na escola, se vê diante do "problema" de resolver problemas. Resolver problemas, contudo, não é privilégio apenas daqueles que lidam com a matemática, mas de todo e qualquer indivíduo. A vida quotidiana está sempre colocando o homem diante de situações-problema, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, etc. São problemas os mais variados desde os mais simples aos mais complexos que exigirão a criação de uma nova estratégia, ou, como diz Puchkin (1976), de concretizar um ato de criação.

Na vida hodierna, onde a transformação da sociedade se dá de maneira surpreendente e imprevisível, exige-se cada vez mais do homem, de sua capacidade criativa. Assim, a atividade de resolução de problemas, no ensino de matemática, especialmente na escola elementar e secundária, mais do que nunca, deve estar voltada para o desenvolvimento do pensamento criador. Entretanto, para que estas atividades venham de fato contribuir para o desenvolvimento de um raciocínio criativo, as estratégias de ensino não podem levar os alunos a atividades meramente reprodutoras, como procedimentos de ensino em que os problemas são agrupados em tipos, onde um é resolvido como modelo, exigindo-se do aluno apenas a seleção de um dos esquemas previamente preparados, o que quase sempre ocasiona o desinteresse e impede o desenvolvimento da inteligência.

Mas como tornar a atividade de resolver problema uma atividade criativa? Como o professor de matemática poderá tornar essa tarefa estimulante e despertar o aluno para o trabalho intelectual?

Estas são questões complexas, mas que podem ser solucionadas.

Concordamos plenamente com Kryshowska (1966), quando afirma ser absolutamente necessário para o estabelecimento adequado do processo didático o conhecimento dos mecanismos mentais e do pensar matemático. Para isso, faz-se necessário o estudo da heurística, ciência emergente, que procura compreender as atividades da mente humana num processo da descoberta ou invenção.

A heurística, esquecida por muitos anos, tem, segundo Polya (1957), seus primeiros passos delineados por Pappus, eminente matemático grego, que viveu aproximadamente no século II A.C. Foram destacadas, ainda, por Polya as contribuições de Descartes, Leibniz e Bernardo Bolzano. Não podemos deixar de mencionar também os trabalhos de Poincaré, matemático francês, que viveu no final do século passado e início deste. Segundo Puchkin (1975), Poincaré apresentou, em suas "Memórias sobre as Funções de Fuchs", uma das mais expressivas descrições da atividade heurística.

Hoje aliada aos conhecimentos psicológicos e cibernéticos, surge uma nova abordagem do estudo da heurística, que compreende a elaboração de métodos e modos da direção dos processos heurísticos Puchkin (1976).

O estudo da heurística exigirá, naturalmente, não apenas a leitura de trabalhos de grandes matemáticos, como os anteriormente citados, mas também os de outros matemáticos de atualidade, tais como os de Kolmogorov, Freudenthal, Fréchet e Boubarki. Deter-nos-emos, contudo, nos trabalhos de Polya, considerando a especial atenção que este matemático deu ao aspecto didático, convicto de que "uma melhor compreensão

das operações mentais, tipicamente utilizadas na solução de um problema, pode em efeito influir favoravelmente nos métodos de ensino de matemática” – Polya (1957).

## UM ESTILO DE ENSINO

Antes de mais nada é preciso esclarecer que estamos propondo um estilo de ensinar, totalmente diverso do enfoque comumente adotado nas salas de aula de matemática. A diferença está na ação pedagógica do professor, isto é, o professor não mostrar ao aluno como resolver um problema, mas apresentar à classe um problema a ser resolvido.

Assim, o professor se coloca diante da classe, não como aquele que sabe e vai mostrar a seus alunos como resolver, mas como aquele que, junto com a classe, vai procurar a solução do problema, fazendo com que os alunos usem sua capacidade de inventar, encorajando-os a estabelecer suas próprias conjecturas, as testar e ponderar suas próprias ações e a refutar aquelas que forem erradas ou inadequadas.

Aplicar a heurística no ensino da resolução de problemas é levar o aluno a desenvolver um trabalho intelectual semelhante ao utilizado pelo matemático para encontrar solução aos problemas que lhe são apresentados.

Nesse estilo de ensino, o professor assume um papel duplo: do companheiro, durante o desenvolvimento da resolução de problemas, quando através de levantamento de questões e sugestões de estratégia de solução, faz com que a classe resolva o problema; e do comentador, que analisa ao final de cada etapa, junto com a classe os métodos e processos que estão sendo utilizados na resolução do problema, e, especialmente no final, quando procura determinar outros métodos de resolução, na tentativa de generalização dos resultados ou métodos empregados, na formulação de problemas derivados do apresentado. Desse modo, podemos dizer que o professor deve assumir o papel do “Grilo Falante” da estória do Pinóquio, deve estar sempre ao lado do aluno estimulando seu raciocínio.

Como o professor se torna companheiro do aluno? Procurando se colocar no lugar do aluno, tentando ver a partida do ponto de vista do aluno, isto é, como diz Polya, tentando compreender o que se passa na mente do aluno, fazendo perguntas ou indicando caminhos que possam estar ocorrendo ao próprio aluno.

O professor se torna o comentador, quando ele leva o aluno a fazer conjecturas sobre suas ações a refutar métodos ou estratégias empregados, a estabelecer relações, verificando a propriedade e exatidão dos passos dados e a possibilidade de generalizar os resultados, encontrando ou gerando outros problemas; desenvolvendo, enfim, no aluno, seu raciocínio crítico.

É assim, quando explora em toda a extensão o poder do espírito humano de analisar e deduzir, de fixar com precisão as hipóteses ou dados conhecidos, a tese ou conclusões, passando de uma fase para outra por caminho racional seguro, que vemos o grande mérito da proposta de ensino de Polya, e seu potencial para o desenvolvimento da inteligência e o gosto pelo trabalho intelectual.

## A HEURÍSTICA NA SALA DE AULA

Vamos encontrar no livro de Polya já mencionado, a orientação segura para a utilização da heurística na sala de aula. Nesse livro ele faz um estudo da heurística moderna e apresenta sugestões de como aplicá-la ao ensino.

Partindo do estudo de como os matemáticos procediam na resolução de seus problemas, procurou sistematizar esse trabalho intelectual, elaborando uma série de questões e agrupando-as no que ele chamou de fases. Antes de passarmos a apresentar suas sugestões, é de suma importância ter sempre em mente a recomendação do próprio autor de que as perguntas e sugestões enumeradas por ele **não são para ser seguidas de forma rígida**; o professor deve sempre empregar antes de tudo a própria inteligência na seleção e mesmo na elaboração de perguntas e sugestões a seus alunos.

As perguntas devem ser gerais e do senso comum, isto é, que ocorrem naturalmente àquele que resolve um problema. Podem ser utilizadas de muitas maneiras diferentes ou serem inspiradas livremente pelo professor, através de exame atento do problema e do contexto. Nunca deve ser esquecido que elas devem servir, antes de mais nada, como base para o desenvolvimento do raciocínio.

Vamos tentar apresentar ao leitor de modo sucinto a orientação de Polya. Em primeiro lugar ele agrupou as atividades em quatro fases como ele próprio diz: "Primeiro temos que compreender o problema, isto é, ver claramente o que se pede; segundo, temos que captar as relações que existem entre os diversos elementos, ver o que liga a incógnita com os dados a fim de encontrar a idéia da solução e poder traçar um plano; terceiro, colocar em execução o plano; quarto, voltar atrás uma vez encontrada a solução, revisá-la e discutí-la."

Assim, ao apresentar um problema à classe, o professor deve orientar o aluno em primeiro lugar na **Compreensão do Problema**, fazer com que o aluno leia cuidadosamente o problema, esclarecer termos desconhecidos, levar o aluno a identificar a incógnita, os dados, se necessário, fazer com que faça um esquema, ou um gráfico, distinguir as informações relevantes das irrelevantes e qualquer outro procedimento que contribua para a compreensão do problema.

Ainda faz parte dos cuidados de uma boa compreensão do problema a utilização de uma notação adequada, pois as palavras contidas no problema devem se transformar em expressões matemáticas e não raro é a linguagem matemática a causa do insucesso na resolução do problema. O insucesso na compreensão pode ser ocasionado também pelo uso de uma linguagem não familiar ou pelo uso de uma simbologia imprópria.

Uma outra estratégia a ser utilizada é a de dividir o problema em partes, levando o aluno a perceber cada detalhe e assim ter maiores condições de separar os dados relevantes dos irrelevantes.

Deve ficar bem claro que o essencial dessa fase é que o solucionador do problema tenha de forma nítida na mente o propósito do problema, o seu objetivo, ou seja o que o problema solicita.

Polya sugere para essa fase as seguintes perguntas:

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É redundante? É contraditória?

Após se estar seguro da compreensão do problema, passa-se para a segunda fase, que é a **Concepção de um Plano de Solução**. Pode-se dizer que esta é a primeira parte do verdadeiro processo heurístico. O objetivo desse momento é que o aluno utilizando a imaginação, intuição e toda sua sagacidade na procura da solução tenha o que Polya chama "idéia brilhante", ou seja, encontre o caminho de solucionar o problema. Esse é também o momento mais difícil, quando se espera que se manifeste o pequeno investigador.

Cabe ao professor, nesse momento, tomar todo o cuidado para não impor suas idéias ao aluno, buscando na sua própria experiência, ao resolver problemas, base para orientar seu aluno a encontrar a "idéia brilhante". As perguntas e sugestões devem ser feitas de tal forma que provoquem o surgimento de idéias.

Nesta fase, deve-se proceder a um exame minucioso do problema, relacionando-o com os conhecimentos anteriores, utilizando-se para isso dos métodos de analogia, generalização, decomposição, recomposição; é, inclusive possível no decorrer do trabalho intelectual se recorrer a elementos auxiliares.

As analogias são importantes, mas é necessário que sejam precisas e não meras semelhanças. No trabalho de analogia procuram-se aspectos comuns e diferentes, comparam-se estruturas particulares, estabelecem-se dualidades, isomorfismos e homomorfismos. Deve-se ter o cuidado de não se confundirem exemplos sistematicamente classificados com uma fortuita coleção de casos.

Certamente, o estabelecimento de analogias irá permitir desembaraço na utilização do conhecimento, ou seja, facilidade de transferências de aprendizagem, aplicação e até mesmo de memorização.

A generalização também trabalhada nesta fase é um importante instrumento da mente. Assim passa-se do exame de um objeto ao exame de um conjunto de objetos ou então de um conjunto limitado de objetos a um conjunto mais extenso. É através do processo de generalização que os conceitos vão confluír em outros de ordem mais elevada. Quanto mais geral for uma noção, mais exigirá da capacidade de abstração do aluno. Deve-se cuidar para não se ir além das possibilidades de abstração de nossos alunos.

Decompor e recompor são operações importantes da mente, e básicas para a total compreensão do problema; essas operações possibilitam à atenção fixar-se no essencial. Quando se faz a recomposição pode-se recompor de forma a estabelecer um problema novo que possa ser utilizado como problema auxiliar. Naturalmente uma decomposição e recomposição têm inúmeras combinações. Polya apresenta como combinações mais usuais e mais práticas as que se seguem:

- 1) conservar a incógnita e mudar os outros elementos (os dados e as condições);
- 2) conservar os dados e mudar os outros elementos (a incógnita e a condição);
- 3) mudar ao mesmo tempo a incógnita e os dados.

A introdução de elementos auxiliares se dá de maneira natural ao longo do desenvolvimento do trabalho, quando se juntam novos elementos aos que foram considerados no início do trabalho.

Para essa fase Polya sugere as seguintes perguntas:

• Conhece um problema semelhante? Já viu o mesmo problema em forma ligeiramente diferente?

• Conhece um problema relacionado com este? Conhece algum teorema que possa ser útil? Olhe atentamente a incógnita e trate de recordar um problema que lhe seja familiar e que tenha a mesma incógnita ou uma incógnita similar.

• Veja aqui um problema relacionado com o seu e já resolvido. Poderia você utilizá-lo? Poderia utilizar o seu resultado? Poderia empregar seu método? É preciso introduzir algum elemento auxiliar afim de utilizá-lo?

• Poderia enunciar o problema de outra forma? Poderia ser outra vez modificado? Consulte as definições.

● Se não pode resolver o problema proposto, trate de resolver primeiro um similar. Poderia imaginar um problema análogo um pouco mais acessível? Um problema mais particular? Pode resolver uma parte do problema? Considere só uma parte da condição; descarte a outra parte; em que medida a incógnita fica agora determinada? De que forma pode variar? Você pode deduzir algum elemento útil dos dados? Pode pensar em alguns outros dados apropriados para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita e os dados, ou ambos se necessário, de tal forma que a nova incógnita e os novos dados estejam mais próximos entre si?

● Empregou todos os dados? Empregou toda a condição? Considerou todas as noções essenciais concernentes ao problema?

A terceira fase, **Execução do Plano**, é o momento em que o aluno deve colocar em prática suas idéias, efetuando as operações e demonstrações necessárias, e estar atento para a exatidão de cada passo. Caso o problema seja muito complexo, deve dividi-lo em partes, estabelecendo uma hierarquia de resolução.

Para essa fase Polya sugere as seguintes perguntas e estratégias:

● Ao executar seu plano de solução, comprove cada um dos passos.

● Você pode ver claramente que o passo é correto? Você pode demonstrá-lo?

Passe-se, agora, para a quarta e última fase do processo heurístico, **Visão Retrospectiva**, quando o aluno deverá fazer uma revisão crítica de seu trabalho. Este é outro momento importante do trabalho heurístico, pois, mais uma vez o aluno deverá exercitar sua capacidade para a colocação e solução de questões, utilizando sua capacidade criativa e principalmente o seu espírito crítico.

É quando analisa cuidadosamente passo por passo todo o seu trabalho na resolução do problema, verificando sua exatidão e a possibilidade de outras formas de solução, que o espírito crítico e a capacidade criativa são fortemente solicitadas. Neste momento oferece-se uma oportunidade "sui generis" para o professor desmascarar a idéia errônea que a maioria das pessoas tem da rigidez do raciocínio matemático, e reforçar os aspectos da objetividade, precisão e clareza dos conceitos matemáticos.

Ao contrário da postura de um ensino onde os problemas são apresentados de forma estanque como um sistema unilateral fixo, a visualização de diversas vias de solução dá um caráter dinâmico à matemática e freqüentemente conduz o aluno a descoberta de novas propriedades e de diferentes aplicações de uma determinada propriedade.

Ainda, a proposta de Polya de que o aluno procure aplicação dos resultados ou dos métodos empregados, bem como o estabelecimento de um problema inverso, são de suma importância para o desenvolvimento intelectual, pois só quando o indivíduo é capaz de realizar operações mentais inversas atingiu o total domínio do conhecimento.

Para essa fase Polya sugere as seguintes perguntas:

● Você pode verificar o resultado? Pode verificar o raciocínio?

● Pode obter o resultado de forma diferente? Pode vê-lo num relance? Você pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?

## CONCLUSÃO

Como vimos, este estilo de ensino desenvolve sobremaneira a capacidade do aluno de inverter uma operação mental, de atingir um determinado objetivo por caminhos diversos, de coordenar duas operações mentais numa só. Além disso, contribui para o

desenvolvimento da intuição e compreensão de estruturas que são, inegavelmente, aspectos de valor pedagógico inestimável. Pode-se perceber claramente sua natureza genética. No entanto, deve-se estar atento para seus limites.

O raciocínio heurístico tem por principal meta descobrir a solução de um problema. Entretanto não pode ser considerado como definitivo e muito menos como rigoroso, pois, como diz Polya, ele exerce o papel de um andaime na construção de um edifício, seria extremamente desastroso considerá-lo como uma demonstração rigorosa.

Sua utilização na sala de aula exige um planejamento cuidadoso, e o professor não pode estar preocupado com o tempo; é preciso que tenha paciência para esperar que o aluno desenvolva o processo heurístico plenamente, caso contrário, não alcançará os objetivos desejados e poderá ser até mesmo prejudicial.

É uma questão difícil estabelecer formas de aplicação dessa proposta de ensino. Caberá ao professor encontrar uma forma própria de a utilizar, considerando as circunstâncias, começando pelos cuidados na formulação do problema, de modo que parta dos conhecimentos e capacidade do aluno, o que permitirá que ele tenha condições de abranger a situação; ter pontos de referências para analisar, mas de tal forma que a solução não seja facilmente desvendada pelo aluno, nem tão difícil a ponto de trazer desalento. O grau de dificuldade deve ser tal que represente um desafio intelectual para o aluno e o conteúdo, seja ele prático ou teórico, deve ter algum significado para o aluno.

#### BIBLIOGRAFIA

- KRYSGOWSKA, A. Z. — *Methodologie de l'enseignement des mathématiques sujet d'étude au niveau supérieur*, in *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques*, UNESCO, Paris, 1966.
- POLYA, G — *How to Solve It?*, 2<sup>o</sup> ed, New York, Double Anchor Boock, 1957.
- PUCHKIN, V. N. — *Heurística — A Ciência do Pensamento Criador*, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1976.

## ACONTECEU COMIGO

*Eloi Tavares de Souza*  
*Universidade Federal do Pará*

No prefácio da primeira edição, de 1944, do livro “A Arte de Resolver Problemas”, do matemático e pedagogo húngaro GEORGE PÓLYA encontramos: “O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta”. Eu tive a oportunidade desta felicidade.

Em dezembro de 1969, ainda segundanista do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UFPa., quando preparava o gabarito da prova de matemática (nível de 1º grau – 8ª série), do concurso para a Escola de Cadetes do Exército, deparei-me com o seguinte problema: qual a altura de um trapézio retângulo, cujas diagonais são perpendiculares, sabendo-se que as bases medem 4 e 9cm?

Depois de inúmeras tentativas em vão, com os alunos presentes e já impacientes, fui obrigado a optar por uma solução via Cálculo Vetorial, fora do nível da turma, para completar o gabarito. Até aí, tudo bem, os alunos conferiram suas respostas e a aula acabou. Mas, para mim, continuou a dúvida – encontrar uma solução a nível de 1º grau. Comprei a briga, pois para mim era uma questão de honra. Fiquei com essa dúvida durante dias. Tentei semelhança, homotetia, congruências mas nada consegui. Depois de muito trabalhar cheguei a uma relação com conseqüências bem interessantes. Se, porém, na época, eu conhecesse o teorema de LEGENDRE (para quadriláteros), não teria tido a tal felicidade que o professor PÓLYA tanto enfatiza, pois o referido problema tem solução imediata via esse teorema. Confesso, todavia, que a alegria maior não foi pela relação demonstrada e sim pelas conseqüências da relação. A partir daí, os nossos alunos apelidaram tal relação de teorema de ELOI TAVARES, hoje bastante ensinado aqui em Belém, a nível de 8ª série do primeiro grau, por algumas colegas de magistério. Declaro que fiquei deveras orgulhoso.

Passaremos agora ao enunciado e à demonstração original do teorema de ELOI TAVARES (sobre quadriláteros).