**Comentários sobre a ficha 29: Triângulos semelhantes**

1 Em geral, os critérios de semelhança de triângulos não são justificados na geometria que consta dos livros de Matemática para a 8ª série.

2. Nesta ficha, utilizando-se transporte de figuras e propriedades da homotetia (estudada na 7ª série) leva-se o aluno a concluir que dois triângulos que têm um ângulo igual formado por lados proporcionais são semelhantes.

3. O estudo dessa ficha exige atividade pessoal do aluno.
Conforme o nível da turma pode-se propor aos alunos mostrar que o 2º caso de semelhança de triângulos dado nessa ficha é válido.

**5. Análise de geometria utilizada nas fichas**

A Geometria, que quase desapareceu dos programas e dos exames, está sendo muito discutida quanto aos problemas de seu ensino e se analisam os resultados de um erro cometido, porque a compreensão geométrica não pode faltar ao aluno.

A aprendizagem nos cursos universitários de Matemática se ressente da absoluta falta de base que os alunos apresentam em Geometria ao ingressar na Universidade.

A Professora Arlete Cerqueira Lima, ex-diretora do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia afirma que o grande fracasso do ensino da Matemática na Universidade Federal da Bahia se deve à falta de domínio que o aluno apresenta quanto à Geometria Euclidiana. A Professora Arlete, que analisou profundamente o problema, afirma que sem conhecer Geometria Euclidiana o aluno não pode aprender Geometria Analítica. Se ele não aprende Geometria Analítica ele não dominará Cálculo Diferencial e Cálculo Integral. Não dominando esses Cálculos ele não compreenderá a Geometria Diferencial, etc., etc., bem como as disciplinas profissionalizantes que dependem do Cálculo Diferencial e Integral.

Lamentavelmente, os professores universitários se queixam dos seus colegas de ensino médio porque esses não preparam os seus alunos para ingressar, devidamente, na Universidade.

Pergunto: Há alguém fazendo alguma coisa para resolver esse problema, além de se queixar?

É preciso mergulhar fundo nos problemas de ensino e indagar as causas de seu fracasso. Por exemplo, é preciso perguntar:

- Por que a Geometria não é ensinada na maioria das escolas embora conste algumas vezes dos seus programas?
- Por que os alunos no Brasil, em geral, não gostam de Geometria?

A análise dos problemas do ensino da Geometria daria, certamente, um compêndio. Vamos nos limitar a tecer, apenas, algumas considerações em torno do assunto.

Primeiro: o ensino da Geometria não se renovou e, com isso, ela perdeu o seu vigor

A Geometria ensinada na maioria das escolas brasileiras é a Geometria de Euclides na sua apresentação milenar, excessivamente formal, e no seu aspecto exclusivamente de medida.

A Geometria de Euclides foi desenvolvida por ele e por seus continuadores de uma maneira estática. Isto quer dizer que as figuras são apresentadas e descritas como resultados de observação. Só depois é que se consideram as transformações dessas figuras. Se o ensino da Geometria começa a partir das transformações (o que já poderá ser feito na escola primária, através de jogos) a Geometria adquirirá um aspecto dinâmico porque as figuras passarão a ser construídas por meio do uso dessas transformações.

Usar transformações no ensino da Geometria é uma recomendação centenária.

Em 1872, no seu trabalho "Introdução ao estudo da Geometria, baseado no conceito de transformações", Felix Klein afirmava que o conceito de transformação desempenha um vasto papel coordenador e simplificador no estudo da Geometria.

De 1969 para cá numerosos apelos têm sido feitos, em reuniões internacionais, por matemáticos de reconhecida competência tais como Carl Allendoerfer, Bruce Meserve, Michael F. Atiyah, Paul Rosenbloom, H. Freudenthal e outros, para que a Geometria seja abordada usando transformações e vetores.

Além do aspecto dinâmico que a geometria ganha, quando o seu ensino começa através das transformações, ele ganha, também, uma abordagem intuitiva e informal que permite explorar relações entre as figuras usando continuidade e simetria.

Considerando válidos os apelos constantes ao uso das transformações em Geometria, elas foram utilizadas em fichas da 7ª. e 8ª séries, onde, numa abordagem bastante intuitiva se apresenta ao aluno a geometria do plano. Esse modo de proceder não elimina a Geometria Euclidiana que passa inclusive a ser ensinada como matéria viva em vez de uma coleção de regras velhas. O estudo sistemático da geometria, tal como foi idealizado para as referidas séries, é feito a partir de uma folha de papel quadriculado, ou da superfície de uma mesa, ou do quadro negro, admitindo-se que esses objetos possam ser prolongados, indefinidamente, em todas as direções.

Como a idéia do ponto é uma idéia, normalmente, dominada pelo aluno, nesse nível, introduz-se, primeiramente, a idéia de translação de figuras consideradas como conjuntos de pontos.

Cada translação é representada por um vetor e para os vetores define-se a soma e, a partir da soma de vetores iguais, define-se a multiplicação por um número real.

A multiplicação pelo número real – 1 permite definir a simetria central de pontos e figuras.

Esses elementos permitem definir a reta como o conjunto dos pontos obtidos de um ponto dado por todas as translações paralelas a um vetor dado.

Segue-se a definição de retas paralelas.

Vê-se que um ponto P qualquer de uma reta divide esta em duas semi-retas simétricas e relação a P.

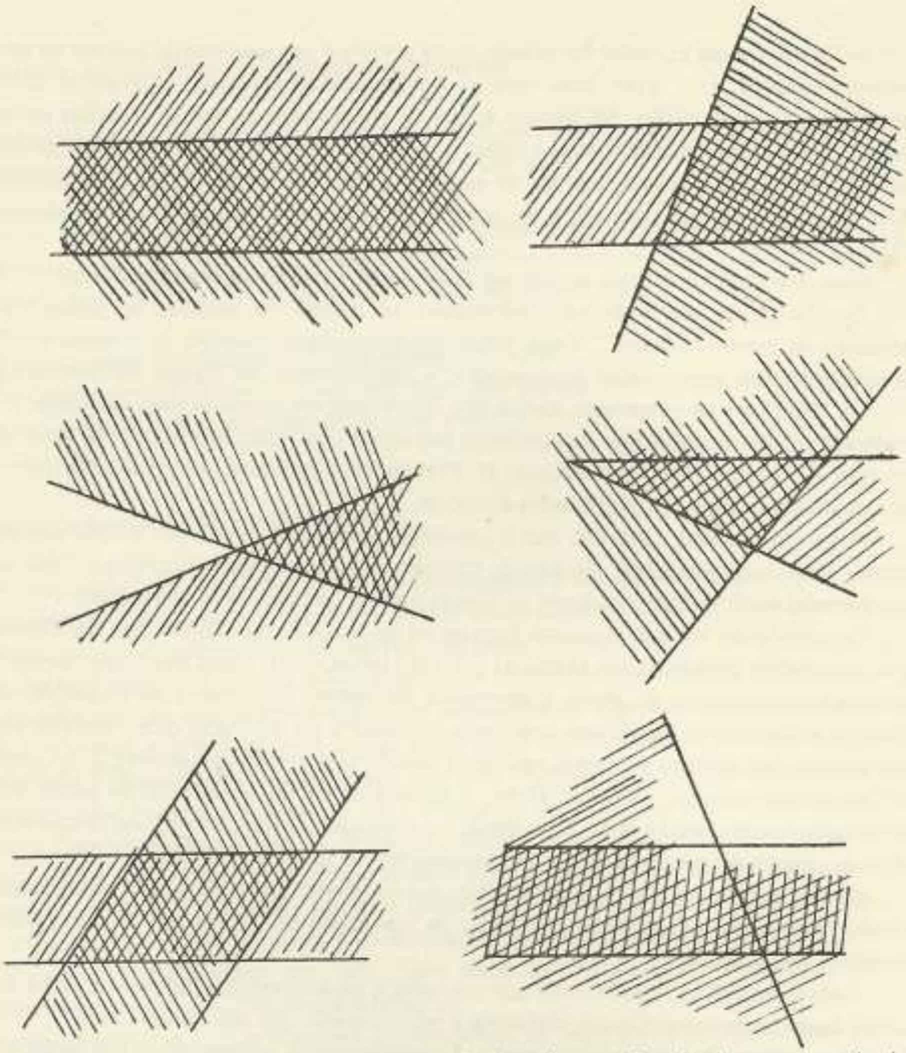
Vê-se, também, que qualquer reta de um plano divide este em dois semiplanos tendo a reta dada como origem comum.

As figuras elementares cuja definição não depende da noção de distância – faixa, semifaixa, ângulo, triângulo, paralelogramo e trapézio – são definidas como interseções de semiplanos.

Em todas essas figuras distinguem-se os pontos interiores e os pontos de contorno.

Para o estudo das propriedades dessas figuras introduz-se, também, o conceito de homotetia baseado na noção de multiplicação escalar.

Todo o estudo feito até aqui apoiou-se, exclusivamente, em noções básicas de vetores e de plano afim.



Definem-se quadriláteros que têm eixo de simetria — retângulo, losango, quadrado e trapézio isósceles.

Segue-se o estudo de propriedades dos triângulos, dos casos de congruência de triângulos e semelhança de triângulos.

Em seguida, define-se o círculo e estudam-se as suas propriedades dando ênfase à simetria.

Do estudo do círculo segue-se a extensão da noção de ângulo de rotação que é uma grandeza cuja medida varia em todo o campo real.

A seguir estudam-se relações métricas no triângulo (triângulo retângulo e triângulos quaisquer) e no círculo.

Finalmente, estudam-se, de modo suscinto, os polígonos regulares convexos e as áreas das figuras planas elementares.

A congruência é definida pelas transformações translação e simetria central.

A Geometria Euclidiana plana é introduzida a partir das noções de simetria axial e de rotação.

A simetria axial permite definir a ortogonalidade e a medida de ângulos, assim como a noção de distância.

Cumpre-nos acrescentar que a apresentação das Geometrias Afim e Euclidiana constantes das fichas de 7ª e 8ª séries foi idealizada pelo Professor Omar Catunda, nos anos 60, para os livros de "Matematica ensino atualizado" publicados pela Edart.

De início, a apresentação da geometria foi considerada abstrata. As constantes revisões dos textos, provocadas pela aplicação dos mesmos, em caráter experimental, permitiu que se alcançasse a abordagem intuitiva que as fichas apresentam.

## III. BIBLIOGRAFIA


1. Congrès International de L'enseignement mathématique, 1er. Lyon, 1969. **Actes.** Holland D. Reidel Publishing Company.

2. Congress International on mathematical Education second. Exeter, 1973. **Proceedings.** Great Britain. A. G. Howson.

3. Congress International on mathematical Education, third. Karlsruhe, 1977. **Proceedings.** Germany. Hermann Athen and Hainz Kunle.

4. International Comission of mathematical instruction. **New trends in mathematics teaching.** Paris, Unesco, 1970. V. II.

5. International Comission of mathematical instruction. **New trends in mathematics teaching.** Paris, Unesco, 1972. V. III.

6. International Comission of mathematical instruction. **New trends in mathematics teaching.** Paris, Unesco, 1979. V. IV.

7. Silva, J. Sebastião e. **Transformações geométricas.** Lisboa, s. ed. 1950.

8. **Mathematics education information report.** The Eric Science, Mathematics and Environmental Education in cooperation with Center for Science and Mathematics Education – The Ohio State University United State of America, 1981.

9. **5ª Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Resumos de Conferências e Comunicações. Campinas S.P., 1979.

10. Polya, G. **How to Solve it.** Princeton, New Jersey, 1948.

11. Young, J. W. A. **Fines, Valor y Metodos De La Enseñanza Matematica.** Buenos Aires, Editorial Losada, S.A., 1947.

12. Catunda, O.; Dantas, M. M. S.; Nogueira, E. C.; Araújo, N. C.; Guimarães, E. C.; Souza, N. C. P.; Moreno, M. A. A. **Ensino atualizado de matemática** 1, 2, 3, 4. São Paulo, Edart, 1970.

13. Catunda, O.; Dantas, M. M. S.; Nogueira, E. C.; Guimarães, E. C.; Souza, N. C. P. **Matemática** 5, 6, 7 e 8. Salvador, Livraria Planeta Editora Ltda., 1981.

## A DIFÍCIL HORA DA DECISÃO

### A Escolha do Livro Didático em Matemática

*Antônio José Lopes ("Bigode")*
*Prof. da Esc. Novo Horizonte - SP*
*Coord. do Comitê de Matemática da FLE-SP*

Não é à toa que a disciplina de matemática é um dos terrores dos alunos e responsável por uma boa parcela das reprovações. Segundo Antonio José Lopes, que coordenou o Comitê de Matemática da FLE, se olharmos atentamente "o que se encontra por detrás dos livros de "matemática moderna" em geral, é a velha matemática tradicional, encoberta por uma linguagem de teoria dos conjuntos, excessos de simbologia, definições prontas, velhos carroções aritméticos, algarismos romanos, unidades de medidas em desuso (hectômetro?) e outros tópicos igualmente discutíveis".

Para o professor, um bom livro é aquele que apresenta desafios aos alunos. "Deve-se evitar aqueles intermináveis exercícios repetitivos, problemas padronizados que em nada contribuem para o desenvolvimento da capacidade de relacionar, comparar, classificar, generalizar, sintetizar etc., etc. Os enunciados dos problemas não devem ser fantasiosos, ou fora de uma realidade passível de ser percebida pelos alunos. Os professores devem ter um especial cuidado com as visões esteriotipadas do mundo e da ciência e com os erros conceituais". Neste ponto Antonio José ressalta "que a não compreensão do que seja matemática moderna e a estrutura da matemática, tem levado muitos autores a apresentar uma visão incorreta, principalmente quanto a Teoria dos Conjuntos e Geometria. Há livros que utilizam a simbologia da teoria dos conjuntos de forma taquigráfica, em outros encontramos confusões nas relações de pertinência, autores que "inventam" relações de ordem entre conjuntos, MDC como sinônimo de Menor Denominador Comum etc., etc. Os exemplos são inúmeros".

Para as crianças até a 4ª série, em fase de operações concretas, "os livros devem conter sugestões de propostas de atividades que o professor possa desenvolver em classe, através da discussão com os alunos, manipulação de materiais facilmente encontráveis em seu universo social, cultural e econômico, ações que desenvolvam a curiosidade e despertem a criatividade. A apresentação de situações problemas não devem restringir-se ao "calcule", "responda", "siga o modelo" etc., que destroem a capacidade da criança em perceber o que é uma situação problema. A variabilidade dos problemas é importante para que os alunos percebam, pelo contrastre, as estruturas e propriedades fundamentais. Da mesma forma, os livros devem apresentar exercícios em seqüências que levem à compreensão das regras, conceitos, e à formulação de definições.

Antonio José Lopes salienta também que "o excesso de linguagem, simbologia e codificações precoces; a ênfase nos resultados e não nos processos; os algarismos, em detrimento da compreensão destes, têm sido uma barreira entre os alunos e o processo de aprendizagem em matemática"

# O EMPREGO DE CURIOSIDADES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

*Manoel Jairo Bezerra*

Sem dúvida alguma as recreações e curiosidades matemáticas são de grande utilidade no ensino, quando envolvem situações-problema que conduzem à aprendizagem de conceitos ou propriedades. Piaget recomenda, mesmo, que se faça o ensino da Matemática por meio de situações-problema e Herbert Spitzer, no seu livro "The teaching of Arithmetic", cita como principal objetivo do ensino dos problemas: "ilustrar conceitos, propriedades e processos".

Mas, há professores que condenam ou fazem grandes restrições ao emprego das curiosidades para motivar as crianças na resolução de exercícios e no cálculo aritmético. Nós somos contrários a essas restrições e empregamos as curiosidades, tanto nas explicações de conceitos como na motivação para a resolução de exercícios.

De um modo geral, dizemos que as recreações e curiosidades matemáticas são excelentes recursos para os professores de Matemática empregarem em suas classes, com a finalidade de obter maior rendimento da aprendizagem.

A fim de tornar mais interessante o seu ensino, o professor deve conhecer algumas recreações matemáticas e saber um pouco das relações entre outras ciências e a Matemática.

Uma citação curiosa, histórica ou não, relacionada com a Matemática ou com outras ciências, uma curiosidade geométrica ou uma singularidade de certos números, uma operação feita abreviada ou mentalmente, uma adivinhação ou uma apresentação de números cruzados — apresentadas em momento oportuno pelo professor — tornam o ensino agradável e atraem para a Matemafica a simpatia do aluno.

Puig Adam, em seu livro "La Matemática y su Enseñanza Actual", diz que "o professor da Matemática deve prevenir-se contra os estragos desumanizantes de uma especialização excessiva". E continua ainda Puig Adam: "Dado o caráter abstrato de nossa ciência, necessitamos de uma grande compreensão da imensa variedade de preferências de nossos alunos, a fim de que eles não vejam no seu professor de Matemática um ser visionário, insensível a tudo que não seja a inferência e a conseqüência necessária"

Nós aconselhamos, muito insistentemente, a todos os professores de Matemática, um melhor emprego das curiosidades no ensino e a cultivar, como diz Puig Adam, a sensibilidade artística, musical, literária, etc., a fim de dar-se conta da variedade das formas de atividade criadora do espírito humano e apreciar, em muitos de seus alunos, o germe dssa atividade.

Para dar uma idéia melhor da forma com que empregamos as curiosidades no ensino da Matemática, apresentaremos alguns exemplos.

### 1º EXEMPLO – Quadrados mágicos de 9 números

Empregamos esses quadrados mágicos da 1ª à 5ª série.

- Na 1ª série, apresentamos os quadrados completos, como se segue:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 3 |
| 6 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 7 |

ou

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

e pedimos para verificar se somando os números na horizontal, na vertical ou inclinado, os resultados são sempre 12 ou 15.

Além de conseguir o interesse dos alunos para efetuar em cada caso, 8 adições de 3 parcelas de números de um algarismo, reforçamos as noções de horizontal, vertical e inclinado e as noções de dúzia, dezena e meia, números pares e ímpares e adição com zero como parcela.

- Na 2ª e na 3ª série, apresentamos os quadros incompletos, como se segue:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 3 |
| | 4 | |
| 5 | | 8 |

ou

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | 4 |
| | 5 | |
| 6 | | 8 |

e pedimos para completar, dizendo que ficou formado um quadrado mágico.

Além das noções desenvolvidas na 1ª série, podemos apresentar a idéia aditiva da subtração (2 + 4 dá 6, para 15 ........) e chamar atenção para a propriedade comutativa.

- Na 4ª e na 5ª série, apresentamos os quadros, apenas com o número 4 ou 5, que fica no centro, e dizendo que a soma dos resultados, na horizontal, na vertical ou na diagonal, dá sempre 12 ou 15. É uma excelente ocasião para desenlver a criatividade dos alunos.

Em 1984, um aluno de 5ª série, após formar o quadrado mágico de 15, formou imediatamente o de 12, justificando que bastaria subtrair 1 de cada um dos nove números. Essa descoberta do aluno, levou-nos a organizar quadrados mágicos para motivar o estudante a efetuar adições com números inteiros, especialmente os de sinais contrários e os negativos:

| | | |
|---|---|---|
| −4 | 3 | −2 |
| 1 | −1 | −3 |
| 0 | −5 | 2 |

e

| | | |
|---|---|---|
| −7 | 0 | −5 |
| −2 | −4 | −6 |
| −3 | −8 | −1 |

## 2º EXEMPLO – Edições de 5 parcelas (com 3 ou 4 algarismos)

Usamos essa curiosidade na 4ª e 5ª séries. Na 4ª série, para incentivar os alunos a efetuar essas adições. Na 5ª série, para verificar se sabem somar corretamente, com maior convicção de que estão somando com atenção por estarem motivados.

Nessa série podemos aproveitar para destacar uma propriedade particjular da adição de várias parcelas.

Mande um aluno ao quadro escrever um número de quatro algarismos. A seguir você escreve um outro número à direita do primeiro, que é obtido subtraindo 2 do primeiro número e colocando um 2 à esquerda desse primeiro número (Exemplo: Se seu aluno escreveu 5978, você escreveria 25976.

Depois mande outro aluno escrever mais dois números de quatro algarismos, embaixo do número que o primeiro aluno escreveu (Vamos supor que ele escreveu 4789 e 3890).

Você, que não deve ver seu aluno escrever o segundo e o terceiro número, escreve, imediatamente, mais dois números, logo abaixo dos três números já escritos. Você deve escrever, rapidamente, o quarto e o quinto número de modo que a soma dos valores absolutos dos algarismos de mesma ordem, do segundo e do quarto número e do terceiro e do quinto número, seja sempre 9 (Você escreveria 5210 e 6109).

Peça a um terceiro aluno para efetuar a soma dessas cinco parcelas escritas. Se ele somar corretamente obterá para resultado 25976, que foi o número que você escreveu à direita da primeira parcela.

Para melhor compreensão, veja, a seguir, a disposição dos números escritos:

$$\begin{array}{rl} 5978 & \quad 25976 \\ 4789 & \\ 3890 & \\ 5210 & \\ 6109 & \\ \hline 25976 & \end{array}$$

Para justificar o procedimento, geralmente solicitado na 5ª série, basta mandar os alunos prestar atenção ao seguinte:

5978 + 4789 + 3890 + 5210 + 6109 =
= 5978 + 9999 + 9999 =
= 5978 + (9999 + 1) + (9999 + 1) − 2 =
= 5978 + 10000 + 10000 − 2 = 20000 + 5976 = 25976

• Chamar bem a atenção dos alunos para que "o resultado da adição não se altera, somando e subtraindo o mesmo número às suas parcelas".

**3º EXEMPLO – Propriedade distributiva**

Em vez de apresentar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, pela forma não didática, resumida a seguir:

– Enunciado

– Exemplo: 5 x (3 + 2) = 5 x 3 + 5 x 2 = 15 + 10 = 25

onde o aluno não vê o valor da propriedade e chega a pensar que o professor "demora a calcular", melhor proceder assim:

– Apresentar um problema para calcular o preço de uma dúzia de objetos a Cz$ 25,00 cada um.
– Dizer que, calculando mentalmente, dá Cz$ 300,00.
– Mostrar como fez, dizendo que para multiplicar um número por 12, basta acrescentar um zero à direita do número (250) e a seguir somar o dobro do número (50).
– A seguir, para atender ao pedido de justificar, apresentar o cálculo:
  25 x 12 = 25 x (10 + 2) = 25 x 10 + 25 x 2
– E após justificar o cálculo mental, enunciar então, a propriedade distributiva.

Cabe ao professor procurar curiosidades e situações-problema que sirvam para ajudar o educando a querer fazer aquilo que ele pode e deve.

# EDUCADORES ESTIMULÁM PAPEL MAIS AMPLO PARA COMPUTADORES

*Traduzido por:*
*Maria Laura Monzinho Leite Lopes*

**Publicado no Jornal "San José Mercury News"**
**5ª feira, manhã, 7 agosto 1986**

Apesar de todo discurso, há alguns anos, sobre a revolução tecnológica na sala de aula, os computadores continuam sendo um pouco mais que equipamentos na maioria das escolas, foi dito por um pesquisador da Universidade Carnegie-Mellon a um seleto grupo de educadores e especialistas em computação, no encontro de Monterey na 4ª feira.

"Tendem a ser suplementos", disse Till Larkin. "Vivem num laboratório, se não num armário, que os alunos visitam de tempos em tempos. É tudo."

Falando numa conferência de 4 dias promovida pela Apple Computer Inc., Larkin solicitou que os educadores procurem encontrar novas e mais efetivas maneiras de usar computadores como parte do ensino diário em assuntos como Matemática e Ciências, se quiserem alcançar plenamente as vantagens da tecnologia disponível.

Encontrar maneiras melhores para o uso de computadores e outras novas formas de tenologia, como discos de laser, é o objetivo da conferência. Com o auxílio da Universidade da Califórnia, Berkeley, Apple congregou os decanos das escolas de educação de 27 importantes universidades — de Harvard a Carolina do Norte — para avaliar o papel das universidades na preparação de professores para fazer o uso mais efetivo da tecnologia.

Existem hoje, em toda a nação, mais de um milhão de computadores instalados em salas de aula nas escolas elementares e secundárias, mais da metade deles são Apple, porém a maioria deles é usada para programação ou exercício, segundo um estudo publicado em junho pela Universidade John Hopkins. Programas que ajudem os estudantes a penetrar mais profundamente em outros assuntos continuam escassos.

Contudo, John Sculley, Presidente da Apple, foi otimista, no seu discurso de abertura na 3ª Feira, quanto ao futuro da tecnologia na educação. "Penso que caminhamos para ver saltos tremendos na tecnologia", disse Sculley, "que ultrapassarão seus mais vastos sonhos como educadores, em termos do que vocês desejam ser capazes de realizar, seja em termos da maneira pela qual os alunos aprendem, seja da maneira como os professores ensinam."

Mas adverte que um novo caminho para o ensino será necessário. "O desafio de todos vocês, eu penso, é educar os professores", disse Sculley, " pois tendo, realmente, o papel de moldar o curriculum e os livros-textos esados nas escolas, de introduzir materiais que o professor possa utilizar, de adotar novos conceitos de aprendizagem, poderá mudar a maneira de preparar nossos estudantes para o mundo que vão enfrentar ao deixar a escola".

Os decanos aplaudiram, entusiasticamente porém reconheceram que o desafio é difícil.

Bernard Gifford, decano de Educação em Berkeley, argumentou que os educadores devem mudar completamente a maneira como as escolas são organizadas, como os professores são preparados, como o trabalho na classe é formulado e como os programas são revistos, para se ter então um uso melhor dos computadores.

"A nao ser que façamos tudo isto", disse Gifford, "o computador ficaria muito bem colocado na prateleira ao lado do audio-visual, das fitas e discos e do rádio como uma tecnologia promissora que quase nunca funcionou na sala de aula."

"Teremos que passar os próximos 5 a 10 anos fazendo pesquisas sistemáticas sobre como os estudantes adquirem conhecimento num domínio específico para, então, traduzi-lo em software", acrescentou.

Embora o número de computadores nas escolas tenha quadruplicado da primavera de 1983 à primavera de 1985, no que Gifford chamou o primeiro estágio da revolução do computador, salientou que somente entre os professores entusiastas pelos computadores, eles foram benvindos. Freqüentemente, esses professores se concentram em cursos de programação e alfabetização em computador.

"Programação é util para ajudar os estudantes na organização do pensamento", disse Gifford, "mas programação por si só é a maneira menos útil para o uso dos computadores em educação. Diria que a real revolução virá quando formos bem sucedidos usando computador para ensinar outros assuntos".

Como exemplo, sugeriu o uso do computador na geração de vídeo-discos para iniciar os estudantes de inglês em Shakespeare ou simulação em computador para explicar a tabela periódica para estudantes de química. "O computador seria, essencialmente, um laboratório da mente", disse.

Contudo, nem todos os decanos estavam convencidos.

"Não penso que seja uma revolução", disse Sam Yarger, decano de Educação da Universidade de Wisconsin em Milwankee, durante o intervalo nas discussões nos grupos de trabalho.

"Estamos enfrentando a situação que não é a salvação que as pessoas julgavam ser há 5 anos", disse Yarger. "Começamos a compreender o que pode fazer por nós, que é bastante, mas não é tudo".

# MÉTODOS USADOS PELOS ALUNOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

*Kathlen Hart*
*Chelsea College – London University*

*Traduzido por: Radiwal Alves Pereira*

**Publicado nos Anais da IV ICME – Berkeley, Califórnia, U.S.A., 1980**

O projeto de pesquisas "Concetios de Matemática e de Ciências na Escola Secundária" foi financiado pelo Conselho de Pesquisas em Ciências Sociais durante cinco anos e desenvolvido no CHELSEA COLLEGE. Seu propósito principal era dar informação a professores e a elaboradores de currículos sobre o nível de compreensão em Ciências e Matemática. Estes níveis de compreensão foram vistos como formando uma hierarquia baseada não exclusivamente na lógica do assunto, mas também naquilo em que os alunos pareciam compreender e na ordem de grandeza em que eles entendiam. A investigação preocupou-se especificamente com alunos da faixa dos 11 aos 16 anos. A equipe de Matemática do projeto desenvolveu uma investigação em três fases, envolvendo 11 tópicos que aparecem usualmente nos programas da Escola Secundária Britânica. Os 11 tópicos foram: Operações Numéricas (Números Inteiros), Valor de Posição e Decimais, Frações, Medida (Comprimento, Área e Volume), Números Positivos e Negativos, Razões e Proporções, Álgebra, Gráficos, Vetores, Matrizes e Reflecções e Rotações.

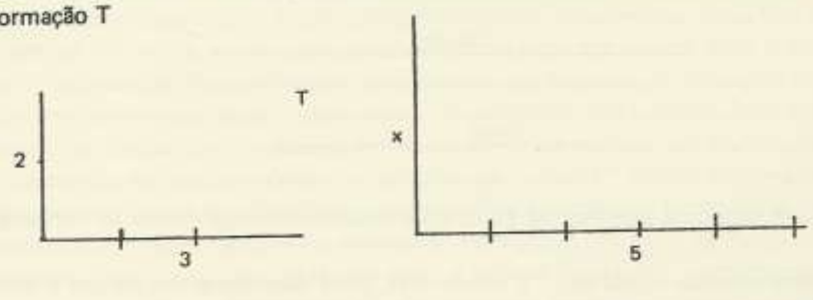
A primeira fase da pesquisa foi a procura de tópicos do programa para neles fixar as idéias-chave (como ensinadas nas escolas) e então elaborar problemas com palavras, que englobassem alguns desses aspectos. A investigação não era orientada para testar a eficiência de um programa de ensino, nem desenvolvida imediatamente depois que o tópico tivesse sido ensinado, com termos técnicos e cálculos reduzidos ao mínimo. Os problemas em cada tópico eram então usados como apoio para entrevistas de cerca de 30 alunos (ao todo 300 alunos), para determinar os métodos, corretos ou incorretos, que cada criança usara ao resolver os problemas. Com base na informação obtida nas entrevistas, os problemas foram revistos, re-escritos sob a forma de teste e aplicados em sala de aula, testados em turmas-piloto e finalmente aplicados em grande amostra representativa da população da escola secundária inglesa (10.000 alunos de 11 a 16 anos). Para cada tópico, em cada faixa de idade testada, a amostra foi retirada de um mínimo de seis escolas (urbanas e rurais) e com distribuição normal em relação ao QI dos alunos. Assim, os dados coligidos deviam refletir o adiantamento de um grupo típico de uma série da escola secundária, onde todas as habilidades estavam representadas e com alunos oriundos de uma classe sócio-econômica mista. Detalhes a respeito da análise dos resultados e da formação das hierarquias estão contidos numa monografia de pesquisa (Hart, 1980) e num livro para professores (equipe do CMS, 1980).

Um produto significativo da pesquisa foi a identificação de certos erros muito difundidos (códigos nos testes escritos). Esses erros foram interpretados à luz das explicações dadas pelos alunos nas entrevistas.

O SRRC agora financia um outro projeto em Chelsea, chamado "Estratégias e Erros na Matemática Secundária", no qual esses erros e as estratégias que a eles conduziram estão sendo estudados em profundidade. Recentemente, entrevistamos 50 alunos que tinham cometido erros específicos em Razões e 50 alunos que tinham cometido enganos no teste de Álgebra.

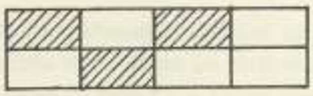
É claro que muitos (mais de 50%, dos nossos secundaristas acham muito difícil compreender tudo o que lhes é ensinado de Matemática na escola. Nas escolas secundárias britânicas é provavelmente aceito que alunos de 11 a 12 anos cheguem da educação primária com um conhecimento prático das quatro operações com inteiros e alguma experiência sobre frações, decimais e geometria. A transição do sucesso com números inteiros e os modelos sobre os quais esse conhecimento foi construído, para conhecimento das operações com frações e decimais, é vista, em muitos livros-texto, como natural e imediata. Isto parece estar longe da verdade. No teste sobre Operações Numéricas do CSMS (Brown e Kuchemann, 1976), foi pedido a alunos de 11 e 12 anos para escrever uma história que mostrasse o significado de operações como 9 dividido por 3. Para a divisão, as histórias predominantemente referiam-se a repartir doces entre amigos. Esse modelo para a divisão é perfeitamente adequado quando os dados são inteiros, mas não fazem sentido quando os dados são frações ou decimais. O problema 3/5 dividido por 2/9, por exemplo, não pode refletir uma distribuição de objetos. Uma questão do teste sobre Decimais ilustrava bem o ponto: dada a oportunidade de escolha da opção "não há resposta", para o resultado de 16 dividido por 20, os percentuais de alunos que optaram pela não-existência de resposta foram: 51% para os de 12 anos, 47% para os de 13 anos, 43% para os de 14 anos e 23% para os de 15 anos.

Uma estratégia usual, porém incorreta, nas questões de Razões, era empregar adição da diferença entre dois comprimentos para efetuar uma dilatação. Assim, dada a transformação T



e pedida a medida x do segmento vertical de modo que as figuras fossem "semelhantes", mais de 40% da amostra (n = 2.257) deu a resposta "quatro". Karplus (1975), Piaget e Inhelder (1967) já tinham comentado essa estratégia. Perguntados se haveria outro modo de obter x, diferente de adicionar (5 − 3) ao segmento 2, os alunos que haviam cometido esse erro responderam que não. Com raciocínio semelhante, à pergunta: "Há um número que multiplicado por nove dê seis?", os alunos responderam não haver tal número. Os alunos vêem as frações como números ou as vêem como rótulos para pedaços de bolo, maçãs etc.? Estamos usando, de fato, a mesma linguagem dos alunos a quem ensinamos?

Os alunos que entrevistamos não estão certamente usando os métodos ou as regras que havíamos ensinado, quando lhes pedimos para resolver problemas fora do contexto imediato do exercitar a regra ou o método. As mais fáceis questões sobre todos os testes dos tópicos do CSMS podiam ser resolvidas por contagem ou adição e sabendo as primeiras convenções para rotular frações ou decimais (veja, por exemplo, as perguntas da Figura 1).



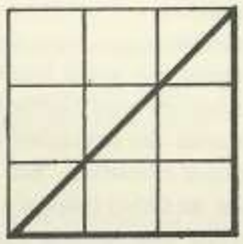
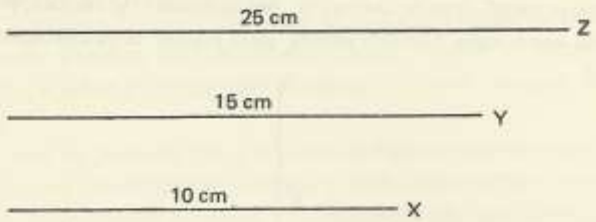




*Figura 1*

Não é surpreendente, mas não deixa de ser constrangedor, ver que muitos alunos continuam a usar métodos aditivos muito tempo depois de superada a sua utilidade e apesar de sua complicação. Por exemplo, um método muito comum de resolver o problema que se segue (adaptado de Piaget, 1986) era evitar a multiplicação por uma fração e elaborar a resposta usando adição:

Três enguias X, Y e Z são alimentadas com minhocas, o comprimento da minhoca dependendo do comprimento da enguia.




Se X tem uma minhoca de 2 cm, qual deve ser o comprimento da minhoca dada a Z?

Uma resposta típica era: "Y recebe três. Você deve somar um porque o reduziu à metade. Z, que, sabemos, tem dois, é dez centímetros maior. Então Z recebe três mais dois, cinco".

Ou, algumas vezes: "Se Z fosse o dobro, receberia quatro centímetros, então devia ter 20 cm. Mas Z tem 25 cm e então precisa de outra metade de X, que é um centímetro. Dois mais dois, mais um, cinco."

Havia muitos métodos aditivos diferentes usados nas oito questões desse tipo; entretanto, apenas dois alunos, entre os 28 originariamente entrevistados, usaram o mesmo método.

Analogamente, para achar o volume de um paralelepípedo, muitas vezes os alunos contavam o número de cubinhos da camada superior e então somavam esse número a si mesmo quatro vezes. O método é adequado para exemplos do tipo da Figura 2, mas não pode ser facilmente aplicado para achar o volume do paralelepípedo da Figura 3. Os percentuais de respostas corretas de alunos com 12, 13 e 14 anos foram, respectivamente, 14,2%, 18,7% e 27,9%.

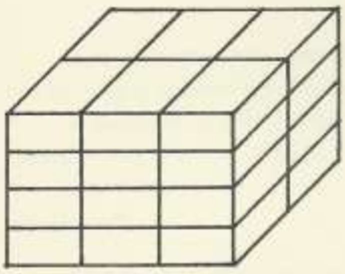


*Figura 2*

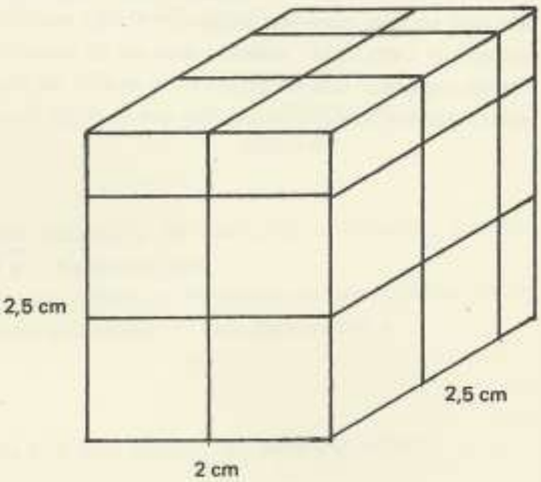



*Figura 3*

O método aditivo correto em Razões é raramente aplicado quando, para usá-lo, o processo de reduzir à metade é inconveniente, como no exemplo anterior de 5:3. Aqui, como vimos, o aluno novamente opta pela adição, porém não trabalha corretamente. Quando o aluno "obtém a resposta certa", muitas vezes admitimos que o método usado foi aquele que ensinamos como conveniente para aquele tipo de problema. Entretanto quando o aluno dá uma resposta errada tentamos remediar a situação repetindo "nosso" método; mas muitas vezes estamos corrigindo um erro que nunca fora cometido, porque não estava sendo usada erroneamente a regra sugerida. A regra, o algoritmo, ou o método são freqüentemente apresentados aos alunos com ilustrações muito fáceis e verificados com apelo a alguma coisa já conhecida. Por exemplo, para apresentar divisão de frações, podíamos usar 4 dividido por 1/2 e verificar a resposta dizendo "é o número de metades que devem ser somadas para obter 4". É uma pequena maravilha que o aluno ignore as subseqüentes complicações e continue a somar um número de metades. Em Razões, tendemos a apresentar um método que pode ser usado para todas as razões, usando um caso particular como a razão 2:1; mas, 2:1, ou duplicação, não tem necessidade deste método generalizado, enquanto o método alternativo de somar um número a ele próprio é relativamente fácil.

Muitos adolescentes estão ainda firmemente amarrados ao conjunto dos números inteiros e à operação de adição (ou contagem) e parecem não perceber a natureza das frações e dos decimais. Seu método de solução de problemas é, muitas vezes, diferente daqueles que lhes foram ensinados. Como eles são adolescentes, nós, como professores, somos contrários a começar de novo um tópico antigo com nova apresentação. Quando um tópico é apresentado para jovens, é usualmente feito com o uso de uma quantidade de materiais concretos. Usar material concreto para adolescentes de 14 anos parece "infantil" para o aluno e para o professor, e no entanto é altamente provável que seja necessário. Além disto, entre os 14 e 15 anos, a atitude do adolescente para aprender matemática, está longe de ser favorável. A afirmação continuada dos adultos, que o assunto é "útil", está começando a perder força, uma vez que o aluno ainda não encontrou muito uso do que está aprendendo ho mundo do seu dia-a-dia. O aluno já descobriu agora que pode adaptar o que lhe ensinou o professor e como, algumas vezes, ele tem sucesso com seu próprio método, então vê ser preferível isto, do que fracassar usando o "estranho" método que ele só compreende parcialmente. Devemos radicalmente repensar nos objetivos e no ensino de Matemática e, sobretudo, dizer aos alunos o que eles estão fazendo, em vez de dizer-lhes o que eles devem fazer.

## REFERÊNCIAS


M. Brown e D. E. Kuchemann. "It is an **add**, Miss?" **Mathematics in Shcool, 5, 5**, e o número seguinte (Parte 2), 1976.

CSMS Mathematics Team (Editor, K. Hart). **Children's Understanding of Mathematics (11-16):** John Murray, London, 1980.

K. M. Hart, **Secondary School Children's Understanding of Mathematics (Research Monograph):** Mathematics Education, Chelsea College, London University, 1980.

R. Karplus, E. Karplus, M. Formisano and A. C. Paulsen. Proportional Reasoning and Control of Variables in Seven Countries. Advancing Education Through Science Oriented Programs, Report ID-65, June 1975.

J. Piaget & B. Inhelder. **The Child's Conceptions of Space.** Routtedge & Kegan Paul, London, 1967.

# PENSANDO NA PERGUNTA: PORQUE $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ ?

*Claudia Guerreiro*
*IMUFRJ*

Para entender esta igualdade, tão conhecida de todos os professores, convém refletir antes sobre o significado de $\sqrt[3]{a}$ , a número real.

A partir da definição de número real como um elemento do único (a menos de isomorfismos) corpo ordenado completo que existe*, podese demonstrar a

**Proposição**

Se **b** é um número real, existe uma e só uma solução real para a equação

$$x^3 = b.$$

Baseados nessa proposição, os matemáticos definem $\sqrt[3]{b}$ como sendo a única solução da equação $x^3 = b$.

Observemos agora que se a é um número real temos:

$$(-\sqrt[3]{a})^3 = (-1)^3 \ (\sqrt[3]{a})^3 = (-1) \, . \, a = -a,$$

e, portanto, $-\sqrt[3]{a}$ é solução da equação $x^3 = -a$.

Como a única solução dessa equação é denotada por $\sqrt[3]{-a}$ , segue-se que

$$-\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-a} \ .$$

---

* Quem tiver maior curiosidade sobre a definição de número real pode consultar, por exemplo, o livro "Elementos de Álgebra", de L. M. Jacy Monteiro. Nesse livro a proposição acima é apresentada como um exercício e há sugestões para a sua demostração.

## SEÇÃO DE CONSULTAS
## O LEITOR PERGUNTA

### I — "Existe uma definição para Matemática?"

*Responde Moema Sá Carvalho*

A resposta é: existe. Não uma, porém várias definições.

O vocábulo "matemática", que significava originalmente "aprendizado", adquiriu o relacionamento especial com números sob a influência da escola pitagórica, 6º século A.C. .

Até o conceito que temos hoje de matemática, as suas definições têm sido várias. O contexto cultural de cada época ou região e as correntes filosóficas que aí se desenvolvem deram origem a diferentes enfoques da Matemática e às conseqüentes definições que tem recebido.

O que precisamos observar é que, para os matemáticos, a Matemática significa muito mais do que pode ser aprisionado dentro de uma definição. A Matemática ultrapassa o que as definições têm podido expressar, dentro das correntes filosóficas a que se filiam. Cada nova definição que surge, abrange, em geral, alguns aspectos da Matemática, cuja complexidade está pretendendo sintetizar. Esse desafio permanece até hoje.

Transcrevemos a seguir alguns exemplos de definições da Matemática, como verbetes encontráveis em dicionários.

- NOVO DICIONÁRIO AURÉLIO – 1ª edição, 1975:
  - Ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente.
- THE CONCISE OXFORD DICTIONARY – 4ª edição, 1956:
  - Ciência abstrata de espaço e número.
- NOUVEAU PETIT LAROUSSE – 1952:
  - Ciência que tem por objeto as propriedades das grandezas na medida em que elas sejam calculáveis ou mensuráveis.

- WEBSTER'S THIRD NEW INTERNATIONAL DICTIONARY, Vol. II, 1976:
  - Ciência que estuda as relações e o simbolismo dos números e das grandezas e que inclui operações quantitativas e a solução de problemas quantitativos.
- PHILIP J. DAVIS e REUBEN HIRSH: "A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA" – edição brasileira: 1985. Tradução de J. B. Pitombeira, Livraria Francisco Alves Editora S.A., pg. 31:
  - Ciência da quantidade e do espaço.

    Os autores observam no texto que essa é "uma definição pouco sofisticada, adequada a um dicionário e que tem certamente uma base histórica". Observam ainda que pretendem modificá-la e ampliá-la no decorrer do texto, pois têm como objetivo fazer com que essa ampliação "reflita o crescimento do assunto nos últimos séculos e indique como as várias escolas de matemática consideram a matéria".

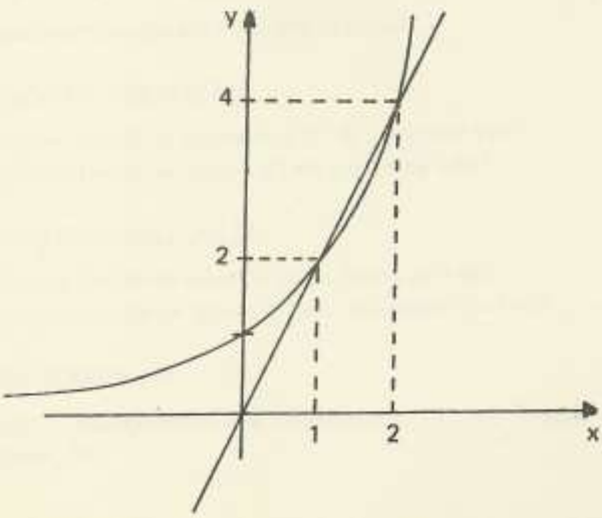
Na verdade, as diferentes escolas filosóficas oferecem definições várias para a Matemática que merecem ser vistas, porém não numa simples resposta como a presente. O assunto merece um artigo, ou talvez mais de um, e o BOLETIM futuramente poderá retomá-lo.

## II – "A Equação $2^x = 2x$ tem solução algébrica? Qual é?"

*Responde Radiwal Alves Pereira*

Se entendermos que solução algébrica de equação é aquela em que suas raízes são obtidas por meio de uma fórmula, onde somente aparecem indicadas operações algébricas (em número finito de vezes), então a resposta é negativa, o que é fácil verificar pela existência do termo $2^x$ que aparece de modo essencial na equação.

No entanto, a equação tem exatamente duas soluções $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, o que se pode verificar através da análise dos pontos de interseção dos gráficos de $y = 2x$ e $y = 2^x$.



## III — "Se a Matemática é uma ciência exata, como explicar o cálculo de limites?"

*Responde Moema Sá Carvalho*

A idéia de "exatidão" da Matemática repousa no rigor lógico de sua conceituação teórica, objeto de busca permanente na formalização axiomática.

Essa busca de rigor levou os matemáticos à conceituação, hoje aceita como rigorosa, de infinito, infinitésimo e limite.

O conceito de número real, por exemplo, recebeu tratamento aceito como dotado de rigor quando Cauchy o definiu por meio de limte de sucessões convergentes; essa definição é equivalente à dada por Dedekind, utilizando classes, ou cortes, como se pode demonstrar.

Uma vez tendo sido firmados com o devido rigor os conceitos de convergência, de limite, de continuidade, além do alcance teórico obtido, conquistou-se um critério de confiabilidade nos cálculos numéricos.

Talvez isso responda ao leitor, na sua referência à "exatidão". Referimo-nos ao sentido da procura de resultados numéricos cada vez mais precisos, com índice de precisão predeterminável: isto é, na determinação, quando possível, de resultados numéricos com erros tão pequenos quanto se queira ou se necessite.

Poder avaliar quando é possível e, caso afirmativo, calcular as aproximações desejadas se sustenta no rigor da teoria, ou seja, na exatidão dos conceitos, de onde vem a confiabilidade no cálculo.

Por exemplo, porque sabemos que a sucessão definida por $f(n) = (1 + 1/n)^n$ é convergente e que define como limite o nº irracional **e**, de singular importância, podemos dele obter aproximações tão refinadas quanto queiramos.

A título de curiosidade, usando uma calculadora de bolso, podemos calcular:

$$f(10^3) = (1 + 1/10^3)^{10^3} \cong 2{,}7169239$$

$$f(10^6) = (1 + 1/10^6)^{10^6} \cong 2{,}7182805$$

Naturalmente, com uso de um computador, poderíamos obter cada vez melhores aproximações para **e**.

## CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO "LATO-SENSU" EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (especialização)

*MARÇO / NOVEMBRO*
*1987*

### I – OBJETIVO

Proporcionar a formação permanente do docente de Matemática através de:
- aprimoramento e atualização em conteúdo matemático.
- iniciação à metodologia de pesquisa em Educação Matemática.

### II – CLIENTELA

Professores de nível médio e superior com Licenciatura plena em Matemática ou diploma equivalente.

### III – CARGA HORÁRIA GLOBAL

360 horas distribuídas em 4 semestres letivos.

### IV – PERÍODO DE INSCRIÇÃO

1º Semestre: De 02 de fevereiro a 07 de março de 1987.
2º Semestre: De 06 de julho a 01 de agosto de 1987.

### V – PERÍODO DE REALIZAÇÃO

1º Semestre: De 10 de março a 25 de junho de 1987.
2º Semestre: De 04 de agosto a 19 de novembro de 1987.

### VI – FUNCIONAMENTO

Às terças e quintas-feiras das 18h45min às 21h, no Colégio Santa Úrsula, à Rua Gago Coutinho, 14.

## VII – PROFESSORES E DISCIPLINAS

1º Semestre/87

3ª feira: – Álgebra (para os alunos do 1º ou do 3º período do curso.)
Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho

5ª feira: – Psicologia I (para os alunos do 1º período do curso)
Profª. Denise Jabour
– Cálculo (para os alunos do 3º período do curso)
Profª. Gilda Pallis

2º Semestre/87

3ª feira: – Álgebra Linear (para os alunos do 2º ou do 4º período do curso).
Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho

5ª feira: – Psicologia II (para os alunos do 2º período do curso)
Profª Denise Jabour
– Metodologia da Educação Matemática (para os alunos do 4º período do curso)
Profª Estela Kaufman Feinguelernt

## VIII – COORDENAÇÃO

Profª Maria Laura Mousinho Leite Lopes

## IX – CERTIFICADOS

Serão conferidos certificados aos alunos que obtiverem 75% de freqüência e aproveitamento satisfatório em provas e/ou trabalhos, a critério do professor.

## OBSERVAÇÕES

– Para as disciplinas Psicologia I e II, Álgebra e Nivelamento são aceitas matrículas avulsas.

No 2º Semestre/87 será oferecido:

5ª feira: – Nivelamento para o Curso de Pós-Graduação (para os candidatos a Pós-Graduação/88)
Profª Janete Bolite Frant

## X – TAXAS

1º Semestre e 2º Semestre:
Inscrição: Cz$ 200,00
e 4 mensalidades de Cz$ 150,00 por disciplina.

## XI – INSCRIÇÃO E INFORMAÇÕES

GEPEM
Rua Fernando Ferrari, 75 – Botafogo
Prédio VI - Sala 306
Tel.: 551-5542 - ramal 185