BOLETIM GEPEM

19

GEPEM

ANO XI | 2º. SEMESTRE | 1986

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO
G E P E M
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APOIO FINANCEIRO DO
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA
— PADCT - CAPES —

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Dando continuidade à nova fase do Boletim do GEPEM difundimos artigos já apresentados em publicações de circulação mais restrita ou de difícil acesso à maioria dos nossos professores, mantendo o espírito que tem norteado a nossa publicação. Assim, inserimos neste número os artigos:

- Ensino da Matemática – Um Processo entre a Exposição e a Descoberta, de Martha de Souza Dantas;
- A Difícil Hora da Decisão – A Escolha do Livro Didático em Matemática, do Bigode;
- Educadores Estimulam Papel Mais Amplo dos Computadores, tradução de Maria Laura M. Leite Lopes;
- Métodos Usados pelos Alunos para Resolver Problemas de Matemática, de Kathlen Hart.

A profª Martha de Souza Dantas é um dos pioneiros da Educação Matemática no Brasil. Com grande satisfação damos oportunidade aos mais jovens de conhecê-la, ao divulgar um de seus trabalhos que, julgamos, será de valiosa ajuda aos professores que se dedicam ao ensino da Geometria.

Outrossim, sabemos que uma das dificuldades que a professor enfrenta é a escolha do livro didático. Daí a inclusão do interessante artigo do prof. Antônio José Lopes, o Bigode.

A tradução da reportagem sobre os computadores mostra que também nos Estados Unidos o uso do computador na Educação merece reflexão por parte dos educadores. No momento em que o EDUCOM (Programa Nacional Computador na Educação) começa a penetrar no sistema escolar oficial procuramos dar elementos para sua crítica e compreensão.

Os sócios do GEPEM residentes no Rio de Janeiro e os professores que integram a equipe do projeto Fundão e o projeto Matemática, Comunidade e Universidade, da PUC-RJ, já tiverem oportunidade de escutar a profª Kathlen Hart em palestras proferidas no mês de agosto durante sua estada entre nós. Na comunicação constante dos anais do IV ICME — Berkeley/USA - 1980, a profª Hart deu conhecimento do resultado do projeto de pesquisas "Conceitos da Matemática e de Ciências na Escola Secundária" (CSMS), desenvolvido na Inglaterra. Se for consolo, observamos que as dificuldades são semelhantes às nossas.

O prof. Jairo Bezerra, na palestra do GEPEM do mês de maio, empolgou numeroso auditório contando algumas das curiosidades no Ensino da Matemática tiradas de sua vasta coleção. Concluímos que a exposição não podia ficar restrita àqueles que o ouviram, tendo então o prof. concordado em escrever o respeito para nosso Boletim.

Sobre dúvidas que aparecem no cotidiano de nossa sala de aula a profª Claudia Guerreiro escreveu um pequeno porém profundo arrazoado sobre o problema da raiz cúbica.

Finalmente, na Seção de Consultas: O Leitor Pergunta, os professores Moema Sá Carvalho e Radiwal Alves Pereira respondem, em alentados artigos, a perguntas de leitores envolvendo filosofia e fundamentos da Matemática.

E informações sobre o programção para 1987 de nosso Curso de Pós-Graduação Lato-Sensu encerram esse número.

ENSINO DA MATEMÁTICA
– UM PROCESSO ENTRE A EXPOSIÇÃO E A DESCOBERTA –

Martha Maria de Souza Dantas
Universidade Federal da Bahia

Texto extraído da publicação original feita pelo Centro Editorial e Didático / Conselho Editorial da UFBa.

I. INTRODUÇÃO

1. A aprendizagem da Matemática segundo Kant, Sócrates e Arquimedes

Para **Kant** "aprender começa com ação e percepção, procede daí para palavras e conceitos e deve terminar em desejáveis hábitos mentais"

Sócrates afirma que "as idéias devem brotar na mente dos estudantes e o professor deve agir somente como um assistente".

Para **Arquimedes** "primeiro intuir, então provar – este é o caminho para fazer as coisas".

A metodologia utilizada no nosso trabalho se baseia, fundamentalmente, nas idéias desses pensadores.

2. Tendências atuais de educação matemática

As mudanças culturais, estruturais e econômicas têm exercido uma grande pressão sobre a educação escolar em geral e sobre a educação matemática em particular Os resultados de um levantamento feito em 1975, em países de todas as partes do mundo, revelaram que a educação matemática em nível pós-elementar se tornou, de um modo geral, uma educação de massas. Esta massificação exige, segundo especialistas no assunto, que se estabeleça uma concepção clara da cultura matemática para todos. Essa cultura deve ser formada na escola, independentemente dos estudos e das profissões futuras dos alunos, e integrada na sua cultura geral. A análise de documentos provindos de países do mundo inteiro, evidencia tendências que visam sobretudo ao desenvolvimento de atividades mentais e à aquisição de qualificações intelectuais.

Tais objetivos, que devem atingir as massas de alunos, devem ser alcançados através da educação matemática. Esta deve visar mais à formação e menos à informação.

Encarada desta maneira, a educação matemática requer uma reformulação dos conteúdos a serem ensinados, dos processos de ensino e, portanto, de sua avaliação. Mas o único meio de mudar honestamente o "status quo" é através da pesquisa:

- dos melhores meios de conseguir atividade autêntica dos alunos;
- de conteúdos que proporcionem o desenvolvimento de atividades mentais e a qualificação intelectual do aluno;
- da melhor apresentação da matéria.

II. O ENSINO DA MATEMÁTICA: UM PROCESSO ENTRE A EXPOSIÇÃO E A DESCOBERTA

Diante das tendências atuais da educação matemática, afirmamos, no capítulo anterior, que os processos de ensino da Matemática (no 1º grau) precisam ser reformulados. Devemos pensar, sobretudo, em processos de ensino que ajudem os alunos a se exprimir, que favoreçam o desabrochar das idéias, o desenvolvimento da imaginação e das capacidades de raciocinar e criar. Lamentavelmente, o processo de ensino mais difundido continua sendo a exposição.

O processo de ensino ideal é, certamente, o processo da descoberta. Vejamos algumas vantagens e desvantagens desses dois processos.

1. Exposição, um processo a ser substituído

O professor de Matemática do 1º grau (faixa de 10 a 14 anos), continua recitando a sua lição. Recita receitas para calcular coisas mal definidas, propriedades que devem ser decoradas e apresenta modelos que devem ser utilizados sem que haja uma justificação anterior para tal.

A exposição não exige atividade individual do aluno. Os alunos, em geral, devem aceitar o que o mestre afirma, mesmo que não tenham compreendido a lição.

O processo de exposição desrespeita as diferenças individuais quanto ao domínio da matéria e ao ritmo de cada um para compreender e assimilar o que lhe é apresentado.

Todos nós sabemos como, em termos de conhecimento da matéria, as classes são heterogêneas.

Além disso, a experiência mostra que, sobretudo nesta idade, as diferenças de rapidez na compreensão e assimilação dos conceitos são consideráveis. Os alunos de raciocínio rápido respondem imediatamente e sugerem continuação. Eles impõem um certo ritmo ao desenvolvimento do curso e o professor, mesmo que não queira, é guiado por eles. Os lentos, perdidos no meio do caminho, experimentarão compreender mais tarde e se fecharão nas suas dificuldades. E muitos fracassos escolares encontram sua origem na lentidão, que não é sinônimo de incompreensão e de inaptidão; o perigo é que o sistema tende a confundir as duas coisas.

Muito raramente os professores optam pelos alunos mais lentos, mas isso pode acontecer. Nesse caso, os alunos rápidos se sentirão frustrados e pode mesmo resultar que percam o interesse. Como se vê, utilizando o processo de exposição, é difícil manter, mesmo que seja numa classe de 30 alunos, um ritmo que favoreça a uns sem desfavorecer a outros.

O processo de exposição não prepara o aluno para estudar sozinho a partir de um documento escrito. Por isso, o aluno despreza o livro que deixa de ser um instrumento de trabalho para se tornar uma peça de museu.

Esta ausência de atividade individual explica, sem dúvida, certos pânicos que os jovens experimentam diante de um assunto de exame ou de concurso.

Quando se usa o processo de exposição, as aulas às quais o aluno falta serão irremediavelmente perdidas.

Mesmo que para os alunos mais rápidos o processo da exposição se apresente como mais econômico (em termos de tempo utilizado) os resultados obtidos na aprendizagem são inferiores aos obtidos quando se usa o processo de descoberta. Além das desvantagens aqui apresentadas, muitas outras poderiam ser incluídas e o somatório dessas desvantagens nos leva a considerar o processo da exposição como um processo não aconselhável para o nível de ensino que está sendo abordado.

2. Descoberta, o processo ideal

Se o aluno é colocado na situação de descobrir, por ele mesmo, o conceito, a regra, o princípio, etc., a partir de uma apresentação apropriada de exemplos, de contra exemplos e de material didático, ele será capaz de utilizá-los, independentemente, em situações novas.

Uma solução que se descobre por esforço próprio tende a se integrar de uma maneira orgânica na atividade intelectual e a influenciar todo o edifício dos procedimentos mentais na sua organização hierárquica.

O processo de descoberta exige, naturalmente, mais tempo; tempo para interpretar o texto, para analisar e para concluir. Mas é importante que os alunos disponham de tempo suficiente para conduzir a descoberta até onde eles querem e podem fazê-lo. Isto seria, evidentemente, o ideal. É óbvio que nem sempre o aluno pode descobrir tudo por ele mesmo. Além disso, em classes problemáticas como as nossas, os alunos necessitariam de muito tempo para descobrir e isso acarretaria, certamente, o não cumprimento dos programas, criando novos problemas. Por isso, se fala em descoberta dirigida feita através de textos devidamente elaborados para essa finalidade.

Os textos são entregues aos alunos e estes passam a trabalhar individualmente ou em grupo. Cáda aluno ou cada grupo trabalha no ritmo que lhe convém. O mestre deve intervir o mínimo, a pedido dos alunos ou para forçá-los a refletir. O mestre pode, eventualmente, fazer perguntas evitando, o mais possível, influenciar, diretamente, no trabalho do aluno. Quando os alunos declaram que terminaram suas tarefas, o mestre passa a discutir os resultados dos trabalhos realizados, a fim de chegar a conclusões gerais.

O processo da descoberta utiliza estratégias heurísticas. Heurístico, como adjetivo, significa "servindo para descobrir" O objetivo do ensino heurístico é estudar os métodos e regras da descoberta e da invenção.

Nos últimos anos tem sido dada uma atenção particular à descrição das estratégias heurísticas. Uma estratégia heurística é uma hierarquia de esquemas flexíveis que permite um certo grau de variabilidade e adaptabilidade a condições dadas e que guiam as atividades de investigação.

Um ensino que utiliza estratégias heurísticas é possível e útil na medida em que essas estratégias sejam efetivamente integradas por exercícios sistemáticos nos automatismos subjacentes dos raciocínios matemáticos.

O raciocínio heurístico é, frequentemente, baseado em indução ou analogia.

George Polya, no seu livro "HOW TO SOLVE IT", já traduzido para o português, descreve um certo número de procedimentos heurísticos usados em Matemática como, por exemplo, o uso de analogias e modelos, a redução de um problema dado a um problema mais simples, etc.

O processo da descoberta é, fora de dúvida, o processo ideal de ensino embora exija mais tempo do aluno.

Para facilitar a utilização desse processo no ensino da Matemática torna-se necessário elaborar programas com conteúdos mínimos (conjunto de conteúdos que não podem deixar de ser dados numa determinada série ou num determinado nível).

Programas extensos conduzem a ensinar com pressa e ensinar bem e com pressa são modos de proceder incompatíveis.

Acúmulo de informação não leva a enfrentar situações novas.

Finalmente, se se pretende que o aluno descubra ou redescubra um conceito matemático é preciso que se lhe apresentem textos devidamente elaborados para essa finalidade. Tais textos devem ajudar o aluno a descobrir os conceitos a estudar, trabalhando sozinho ou em grupo.

3. As fichas de trabalho – entre a exposição e a descoberta

Passar do processo da exposição para o processo da descoberta sem que o professor esteja devidamente preparado para tal não é tarefa fácil. Manter a exposição como processo único de ensino significa desconhecer as tendências atuais da educação matemática.

É preciso descobrir um modo de harmonizar os dois processos acima descritos. Com essa finalidade um grupo de professores de Matemática da Universidade Federal da Bahia redigiu fichas de trabalho envolvendo toda a matéria a ser dada da 5ª à 8ª série do 1º grau.

Todavia, para que o estudo através de fichas alcance os objetivos desejados é preciso que, na elaboração das mesmas, certos princípios sejam observados. Por exemplo:

– a linguagem utilizada deve ser, tanto quanto possível, a linguagem do aluno;
– os fatos concretos devem preceder as idéias abstratas;
– os casos particulares devem conduzir à formulação de leis gerais;
– relações de analogia devem ser estabelecidas para alcançar conclusões;
– a atividade pessoal do aluno deve ser provocada ao máximo, respeitado o seu ritmo.

Cada ficha constitue uma unidade de trabalho onde, em geral, se pretende que um conceito seja definido, uma regra seja estabelecida ou uma propriedade seja induzida.

Além do conteúdo novo que uma ficha possa apresentar, as fichas compreendem, também, exercícios de fixação e exercícios de revisão.

Os exercícios de revisão são exercícios sobre matéria já vista pelo aluno mas que ele não pode esquecer. O exercício de revisão visa algumas vezes a uma sondagem e outras vezes a uma fixação. Em ambos os casos trata-se de matéria que tem que ser mantida familiar ao aluno.

Quando tratamos do processo da exposição afirmamos que esse processo não respeita o ritmo de cada aluno, o que deve ser observado na elaboração das fichas. O ideal seria elaborar fichas diversificadas de acordo com a situação real de cada classe. Levando em conta a situação de ensino na Bahia, bastante precária principalmente por causa da desatualização do professor, optamos pela elaboração de fichas que atendam, sobretudo, às necessidades dos alunos médios — entre os fracos e os fortes.

Os alunos que são considerados médios, apresentam dificuldade para interpretar os textos que lhes são apresentados, o que influencia bastante no ritmo de trabalho de cada um deles.

Nestas condições, pode-se perguntar: o que fazer com os alunos mais rápidos quando estes declararem que terminaram suas tarefas?

As opções podem variar:

1º) Existem, nos livros de classe, exercícios que os professores consideram difíceis e que foram realmente elaborados visando aos melhores alunos. Resolver um desses exercícios seria um recurso, mas é preciso que o conteúdo estudado na ficha dê ao aluno condições para tal.

2º) O professor pode elaborar tarefas extras, de acordo com a ficha estudada, e estas serão entregues aos alunos tão logo eles tenham terminado o estudo da ficha.

3º.) O professor pode instituir o sistema de monitoria na classe e os alunos mais rápidos, terminada a sua tarefa, passariam a ajudar os mais lentos.

À guisa de exemplo, vejamos o que é feito na Suécia: professores de rede oficial de ensino médio realizam pesquisas quanto ao ensino através de fichas, usando três tipos diferentes visando a três níveis de ensino numa mesma classe. O mais importante no trabalho da Suécia é que os alunos são constantemente submetidos a sondagens e avaliações e, de uma unidade para outra, podem mudar de nível, passando de um nível inferior para um nível mais alto ou vice-versa.

Esta diversificação apresenta vantagens extraordinárias se se encara o ensino com responsabilidade e se enfrenta a sua problemática. Assim, por exemplo, um aluno que por questão de saúde ou mesmo por um problema emocional, trabalhou numa certa unidade com fichas do nível mais baixo poderá, na unidade seguinte, passar para um nível mais alto.

Vale esclarecer que a ficha de nível mais baixo contém o mínimo de conhecimentos que o aluno deve ter sobre o assunto tratado.

Melhores informações sobre o trabalho da Suécia poderão ser encontradas em New trends in mathematics teaching, Volume II, Unesco, 1970. Gostaríamos de esclarecer que nem todas as fichas que elaboramos para os livros de Matemática da 5ª à 8ª série nos satisfazem plenamente porque, ao realizar esse trabalho sentimos, sempre, a pressão do tempo: a realidade brasileira exige o cumprimento de programas extensos em tempo mínimo. Assim, querendo andar depressa, fomos levados, algumas vezes, a expor

Além disso, não querendo impor ao aluno o que é difícil para ele, dada a sua faixa etária, tivemos que admitir, algumas vezes, como verdadeiras, propriedades que só mais tarde poderão ser provadas. Observamos ainda, que o professor poderá sentir, ao trabalhar com uma ficha, que outros exemplos deverão ou poderão ser considerados, dependendo, principalmente, da classe onde ele trabalha. Nestas condições, ele deverá complementar o trabalho de ficha usando o quadro de giz para exibir outros exemplos ou novas situações.

Para tornar o nosso trabalho mais objetivo no que diz respeito às fichas, passamos a exibir algumas delas, constantes dos livros da 5ª à 8ª série citados abaixo, seguidas de análise e crítica. Análise quanto à importância do assunto selecionado e à metodologia empregada na abordagem do mesmo. Crítica, quando proceder, a outros modos de abordar o assunto nos livros adotados no país.

4. Modelos e análise de fichas que constam dos Livros de Matemática, de 5ª à 8ª série do 1º grau, redigidos por:

Omar Catunda
Martha Maria de Souza Dantas
Eliana Costa Nogueira
Neide Clotilde de Pinho e Souza
Eunice da Conceição Guimarães

Ficha 16: Translação; Operações com pontos e vetores – Matemática 7

Ficha 17: Côngruência por translação – Matemática 7

Ficha 20: Simetria no plano; congruência por simetria – Matemática 7

Ficha 28: Ângulos; propriedades – Matemática 7

Ficha 29: Triângulos semelhantes – Matemática 8.

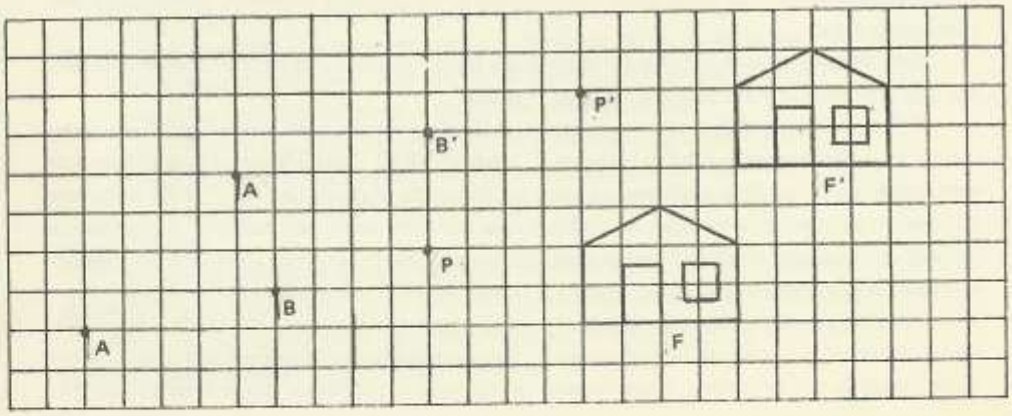
MATEMÁTICA 7

FICHA 16: TRANSLAÇÃO; OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES

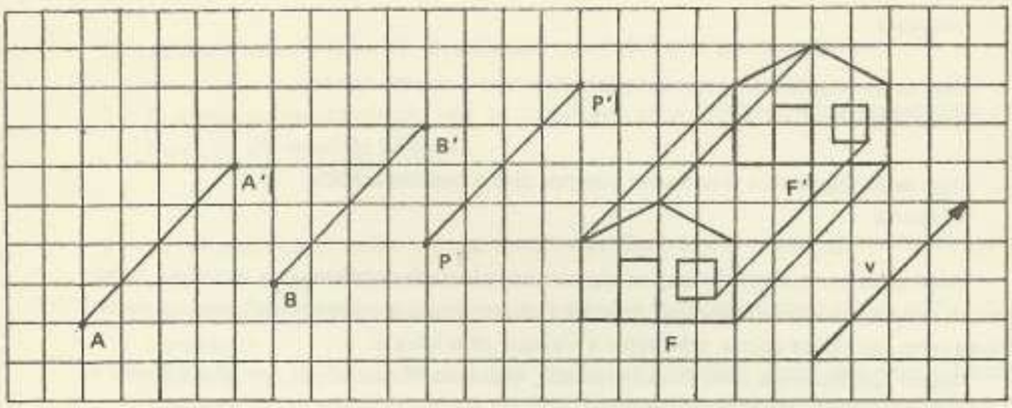
1. Considere, na figura a seguir, a relação que ao ponto A faz corresponder o ponto A', ao ponto B o ponto B', ao ponto P o ponto P' e à figura F a figura F'.

Ligue, por meio de uma régua, cada ponto ao seu correspondente.

Ligue, também, alguns pontos de F aos seus correspondentes em F'.



Você deve ter obtido segumentos orientados, (figura a seguir).



Diga se os segmentos orientados obtidos têm o mesmo tamanho.
Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm a mesma direção.
Resposta

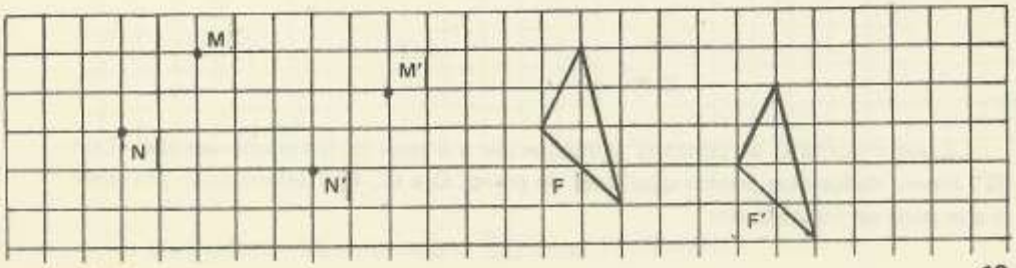
Diga se os segmentos orientados obtidos têm o mesmo sentido.
Resposta

Os segmentos orientados obtidos, que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo tamanho, definem um ente geométrico chamado **vetor**.

Este vetor é representado por uma seta e está indicado, na figura acima, pela letra **v**.

Nestas condições, a relação considerada, acima, é chamada **translação de vetor v** ou translação **v**. Os pontos A', B' e P' são chamados **transformados** dos pontos A, B e P, respectivamente. A figura F' é a **transformada** da figura F.

2. Considere a relação que ao ponto M faz corresponder o ponto M', ao ponto N faz corresponder N' e à figura F faz corresponder a figura F'.



Ligue cada ponto ao seu transformado. Ligue, também, alguns pontos de F aos seus correspondentes em F'. Diga se os segmentos orientados obtidos têm o mesmo tamanho.

Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm a mesma direção.

Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm o mesmo sentido.

Resposta

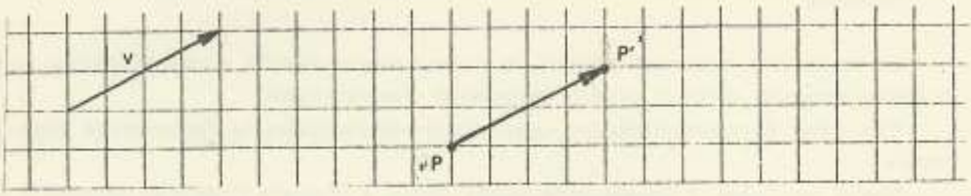
Você deve ter concluído que os segmentos orientados obtidos têm o mesmo tamanho, a mesma direção e o mesmo sentido. Por isso, esses segmentos definem um vetor. Represente, na figura acima, esse vetor e indique pela letra **u**.

Nestas condições, a relação considerada, que leva M em M', N em N' e a figura F em F', é chamada **translação de vetor u**.

Observação: Até aqui, você trabalhou numa folha de papel. Esta folha representa um ente geométrico chamado **plano**. O plano, pode, também, ser representado pela superfície da mesa ou do quadro-negro.

A idéia de plano pode ser dada, intuitivamente, a partir desses objetos, supondo os mesmos prolongados, indefinidamente, em todas as direções.

3. Considere, no plano, um ponto P e um vetor **v**. A translação de vetor **v** leva P em P'.



O ponto P' é, também, chamado **soma** do ponto P com o vetor **v**. Pode-se escrever

$$P' = P + v$$

Assim, fica definida, no plano, **a soma de um ponto com um vetor**, que é um ponto.

4. Considere, agora, dois pontos do plano, Q e Q'.

Ligue o ponto Q ao ponto Q' e indique por **v** o vetor da translação que leva Q em Q'. Assim, dados dois pontos quaisquer do plano, Q e Q', fica determinado um vetor **v** que pode ser indicado por

$$v = \overrightarrow{QQ'} \quad \text{ou} \quad v = Q' - Q.$$

Deste modo, fica definida, no plano, **a diferença de dois pontos que é um vetor.**
Resolva os exercícios na página 45 do livro.

Comentários sobre a ficha 16: Translação; operações com pontos e vetores

1. O conceito de translação não se inclui, em geral, na Geometria apresentada nos livros do 2º nível do 1º grau.

2. Já foi justificada, nesse livro, a introdução das transformações geométricas para o estudo da geometria.
Na ficha 16 é introduzido, de modo bastante intuitivo e concreto, o conceito de translação.
Partindo da correspondência entre pontos são obtidos segmentos com o mesmo tamanho, a mesma direção e o mesmo sentido. Tais segmentos definem um ente geométrico chamado **vetor.**
A correspondência considerada é chamada de **translação.**

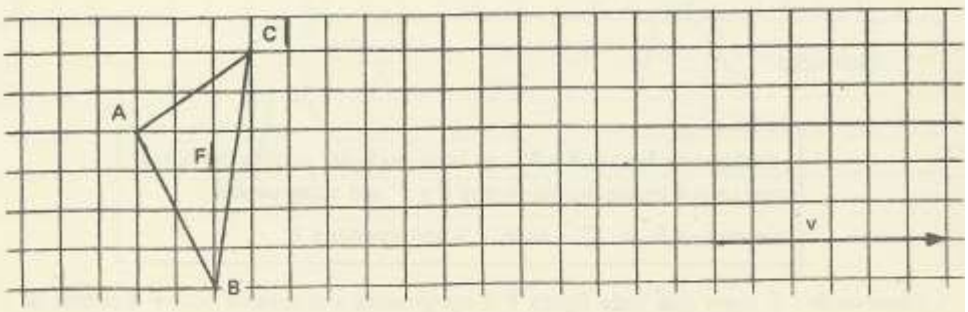
3. Espera-se que a partir dos exemplos considerados o aluno possa induzir o conceito de translação. Caso isto não se verifique, cabe ao professor apresentar outros exemplos antes de entrar no estudo do item 3, operações com pontos e vetores.

MATEMÁTICA 7

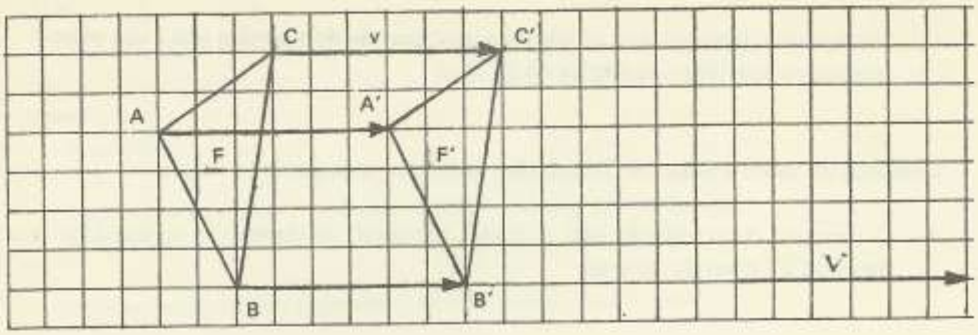
FICHA 17: CONGRUÊNCIA POR TRANSLAÇÃO

1. Considere, novamente, o plano representado por uma folha de papel. Esse plano é um conjunto de pontos. Qualquer subconjunto desses pontos chama-se **figura.**

Considere a figura F e o vetor **v** dados a seguir e ache os transformados dos pontos A, B e C pela translação de vetor **v**. Ligue os pontos obtidos.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



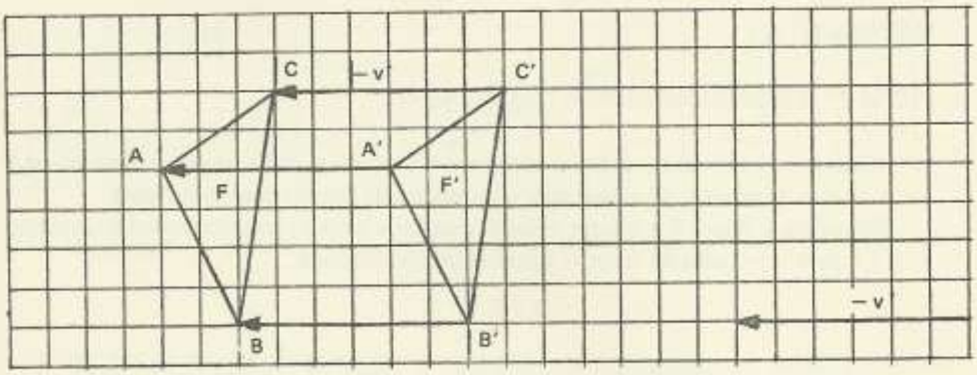
A figura F' obtida de F pela translação de vetor **v** é a transformada de F por essa translação. Assim, dada uma figura F e um vetor **v**, todo ponto P de F é levado num ponto

$$P' = P + v$$

e a figura F é levada na figura

$$F' = F + v$$

Você pode fericiar que se F é levada em F' pela translação de vetor **v**, F' é levada em F por uma translação cujo vetor tem o mesmo tamanho, a mesma direção e o sentido contrário ao do vetor **v**. Esse vetor é indicado por **— v**.



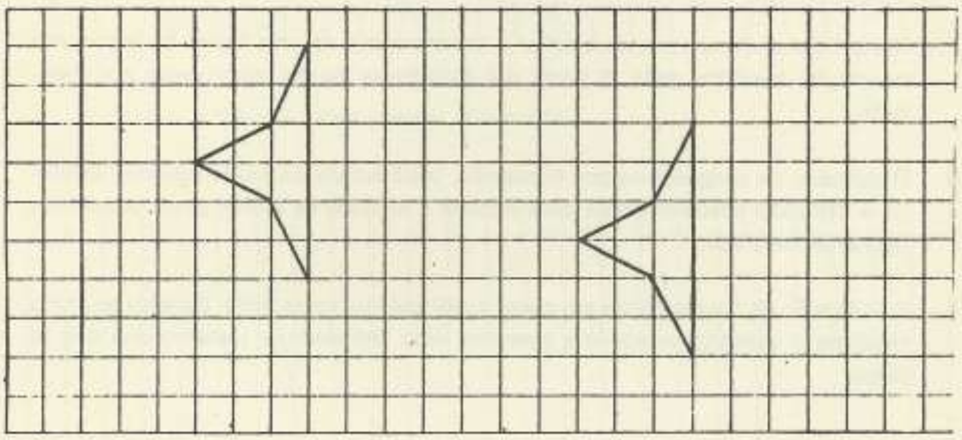
Definição

> Dadas duas figuras F e F', , se uma pode ser obtida de outra por uma translação, diz-se que F e F' são **congruentes**.
>
> Escreve-se F $\cong$ F' e se lê: F é congruente a F'.

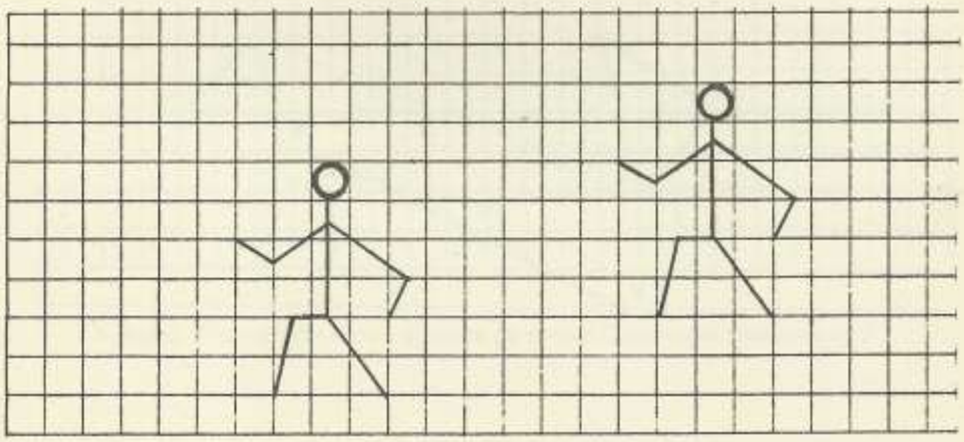
Observação: É claro que toda figura F é congruente a si mesma pois F é obtida de F por uma translação que leva cada ponto de F em si mesmo. Esta translação é chamada de **translação de vetor nulo** ou **identidade**.

Exercícios:

1. Diga se as figuras seguintes são congruentes por translação. Em caso afirmativo, indique o vetor translação.



2. Diga se as figuras seguintes são congruentes por translação. Em caso afirmativo, indique o vetor translação.



Resolva os exercícios da página 46 do livro.

Comentários sobre a ficha 17: Congruência por translação

1. Nos livros de Matemática de 7ª série a congruência é, geralmente, considerada quando se estudam os triângulos. São definidos casos de congruência de triângulos sem ter sido definida a congruência de figuras. O aluno fica sem saber, realmente, o que são figuras congruentes.

2. Nesta ficha o aluno aprende a achar a transformada de uma figura dada por uma translação, também, dada. A partir daí definem-se figuras congruentes por translação.

3. O conceito de congruência por translação, introduzido de modo bastante intuitivo, é utilizado posteriormente para mostrar a validade de muitas propriedades das figuras geométricas.

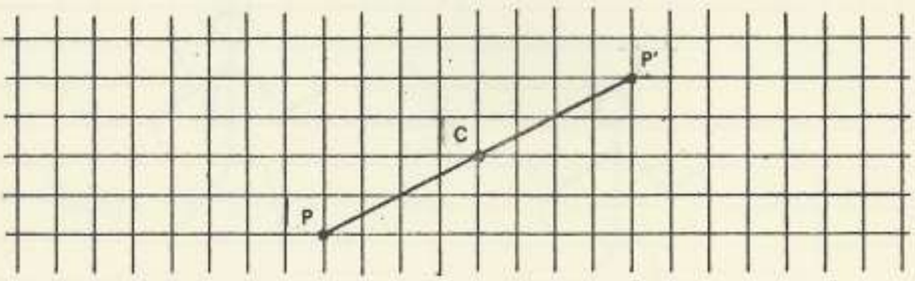
4. A utilização de figuras, feitas em papel quadriculado, nessa ficha, permite ao aluno visualizar o conceito estudado e executar, com facilidade, o trabalho que dele se exige.

MATEMÁTICA 7

FICHA 20: SIMETRIA NO PLANO; CONGRUÊNCIA POR SIMETRIA

1. Considere, no plano, um ponto fixo C.
   A cada ponto P do plano pode-se fazer corresponder um ponto P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$$

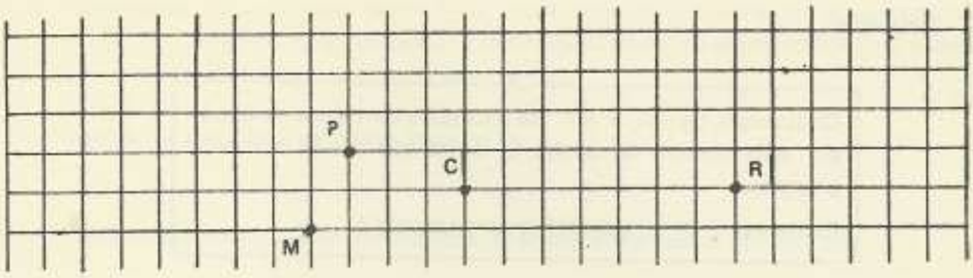


A correspondência que leva P em P' é chamada **simetria de centro C ou simetria central.**

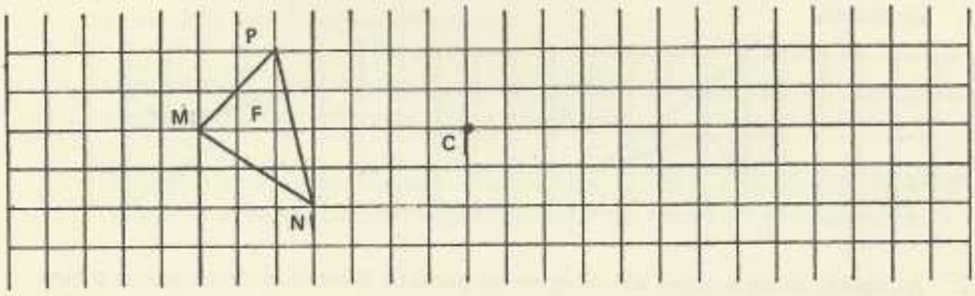
O ponto P' é chamado **simétrico** de P em relação a C.

Observe que o ponto P é o simétrico do ponto P' pela mesma simetria de centro C.

Ache os simétricos dos pontos M, P e R, dados a seguir, pela simetria de centro C.

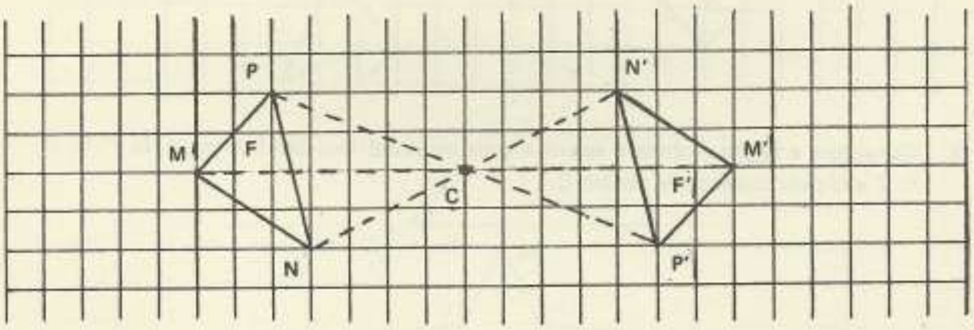


2. Considere a figura F, dada a seguir, e o ponto C.



Ache os simétricos dos pontos M, N e P pela simetria de centro C. Ligue os pontos obtidos.

Você deve ter encontrado a figura seguinte:



A figura F obtida de F pela simetria de centro C chama-se **simétrica** de F.

De um modo geral, por uma simetria de centro C, uma figura F é levada numa figura F' cujos pontos são os simétricos dos pontos correspondentes de F.

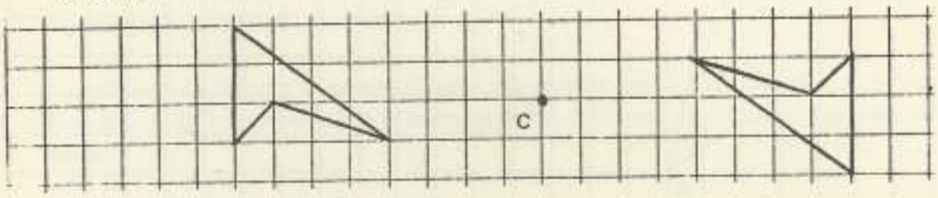
Você pode verificar que, se a figura F é levada em F', pela simetria de centro C, a figura F' é, também, levada em F pela mesma simetria de centro C.

Definição

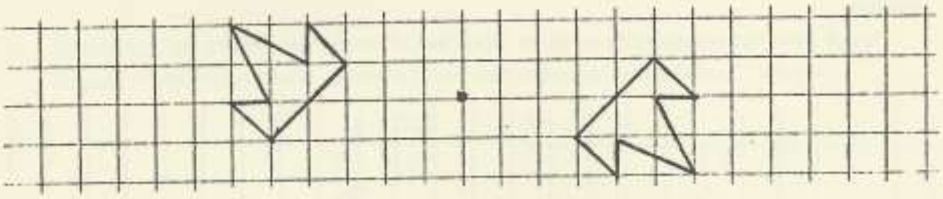
> Dadas duas figuras, F e F', se uma pode ser obtida da outra por uma simetria de centro C, diz-se que F e F' são **congruentes.**
>
> Escreve-se F $\cong$ F' e se lê: F é congruente a F'.

Exercícios:

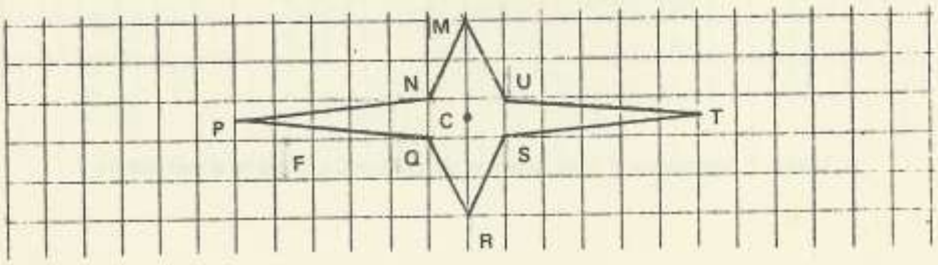
1. As figuras a seguir são congruentes pela simetria de centro C. Ligue alguns pontos simétricos.



2. As figuras dadas a seguir são congruentes por uma simetria central. Indique o centro da simetria.



3. Considere a figura F dada a seguir e ache os simétricos dos pontos M, N, P. Q, R, S, T e U pela simetria de centro C.



Diga qual é a figura simétrica da figura F.
Resposta

Você deve ter verificado que a simétrica da figura F é ela mesma.
Nestas condições, diz-se que F é uma figura simétrica de si mesma.

Observação: Quando uma figura F se transforma em si mesma por uma simetria de centro C, diz-se que F é uma figura simétrica em relação a C. O ponto C é chamado **centro de simetria** de F.

Resolva os exercícios da página 55 do livro.

Comentários sobre a ficha 20: Simetria no plano; congruência por simetria

1. Nessa ficha estuda-se a simetria central. A simetria central é introduzida, primeiramente, para pontos, como se fez no caso da translação.
A seguir define-se figura simétrica de uma figura dada por uma simetria central.
Uma vez definidas figuras simétricas por simetria central é, então, definida a congruência de figuras por simetria central.

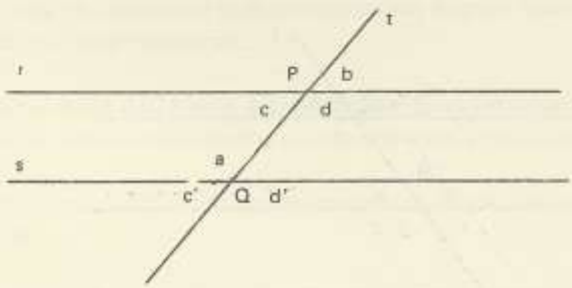
2. O conceito de congruência por simetria central é, também, utilizado para mostrar a validade de propriedades de figuras geométricas.

3. As figuras construídas, em papel quadriculado, facilitam a visualização da simetria central no plano e o trabalho exigido do aluno nos itens 1 e 2 e nos exercícios.

MATEMÁTICA 7

FICHA 28: ÂNGULOS: PROPRIEDADES

1. Considere duas retas paralelas distintas **r** e **s** e uma reta **t** que corte as retas **r** e **s**. A reta **t** é chamada **transversal.**



Como você vê na figura acima, a reta **t** forma com as retas **r** e **s** oito ângulos.

Os ângulos **a**, **b**, **c'** e **d'** que estão fora da faixa são chamados **externos.** Os outros ângulos, **c**, **d**, **a'** e **b'** são chamados **internos.**

Os ângulos **a** e **d'** bem como **b** e **c'** são chamados **alternos externos.**

Os ângulos **c** e **b'** bem como **d** e **a'** são chamados **alternos internos.**

Os ângulos **a** e **c'** bem como **b** e **d'** são chamados **externos do mesmo lado.**

Os ângulos **c** e **a'** bem como **d** e **b'** são chamados **internos do mesmo lado.**

Os ângulos **a** e **a'** bem como os ângulos **b** e **b'**, **c** e **c'**, **d** e **d'** são chamados **correspondentes.**

2. Você já viu que se uma figura é obtida de outra por uma translação de vetor **v**, essas figuras são congruentes.

Observe, na figura acima, que o ângulo a pode ser obtido do ângulo a' pela translação do vetor $\overrightarrow{QP}$. Assim, os ângulos correspondentes a e a' são congruentes.

Verifique se o ângulo **b** pode ser obtido do ângulo **b'** por uma translação e, em caso afirmativo, diga qual é a translação.

Resposta

Verifique se o ângulo **c** pode ser obtido do ângulo **c'** por translação.

Resposta

Verifique se o ângulo **d** pode ser obtido do ângulo **d'** por translação.

Resposta

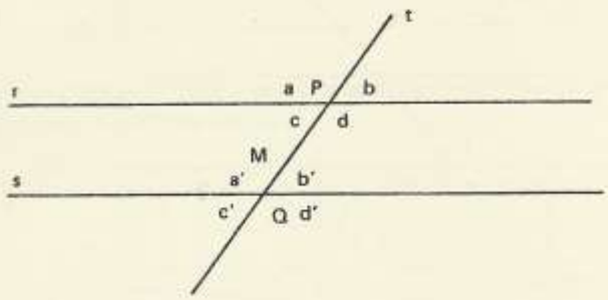
Você viu que os ângulos correspondentes **a** e **a'** são congruentes.

Você deve ter concluído que os ângulos correspondentes **b** e **b'** são, também, congruentes pois o ângulo **b** é obtido do ângulo **b'** pela translação de vetor $\overrightarrow{QP}$. Você deve ter concluído também que os ângulos correspondentes **c** e **c'**, bem como **d** e **d'**, são congruentes.

Nestas condições, pode-se afirmar que

> Se duas paralelas distintas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.

3. Considere, novamente, as retas paralelas distintas **r** e **s**, a transversal **t** e o ponto médio, M, do segmento PQ.



Dê os ângulos alternos internos.

Resposta

Considere os ângulos alternos internos **d** e **a'**.

Observe que o ângulo **a'** pode ser obtido do ângulo **d** pela simetria de centro M.

Diga se o ângulo **b'** pode ser obtido do ângulo **c** por esta mesma simetria de centro M.

Resposta

Você viu que os ângulos alternos internos **d** e **a'** são congruentes pois o ângulo **a'** é obtido do ângulo **d** pela simetria de centro M. Você deve ter concluído que os ângulos **c** e **b'** são, também, congruentes por simetria central. Nestas condições, pode-se afirmar que

> Se duas retas parapelas distintas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

4. Considere a figura acima e complete:
   Os ângulos alternos externos **a** e **d'** são congruentes porque . . . .
   Os ângulos alternos externos **b** e **c'** são congruentes porque . . . .
   Pode-se afirmar que

> Se duas retas paralelas distintas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos externos são congruentes.

5. Pode-se mostrar, também, que:

> Se duas retas distintas formam com uma transversal ângulos alternos internos ou ângulos alternos externos congruentes, então essas retas são paralelas.

Resolva os exercícios da página 76.

Comentários sobre a ficha 28: Ângulos: propriedades

1. Nesta ficha são estudadas as propriedades dos ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal.

2. Em alguns livros de 7ª série, a propriedade "Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes", é considerada postulado.
   As outras propriedades são demonstradas utilizando esse postulado e outras propriedades.

3. Nesta ficha o aluno verifica, observando a figura dada, que dois ângulos correspondentes quaisquer são congruentes porque um pode ser obtido do outro por uma translação.
   Ele verifica, também, utilizando apenas o conceito de simetria central, que os ângulos alternos internos bem como os ângulos alternos externos são congruentes.

4. Trabalhando com esssa ficha o professor poderá sentir como a utilização dos conceitos de translação e simetria central simplifica e dinamiza a apresentação de propriedades da geometria.

5. O processo de apresentação utilizado é a redescoberta.

FICHA 29: TRIÂNGULOS SEMELHANTES

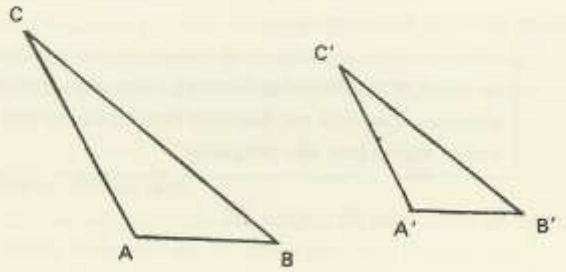
1. Como você viu, dois triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes são iguais.

Existem casos em que se pode mostrar que dois triângulos são semelhantes sem que seja necessário verificar a igualdade dos ângulos através da sua medida.

Primeiro caso de semelhança de triângulos

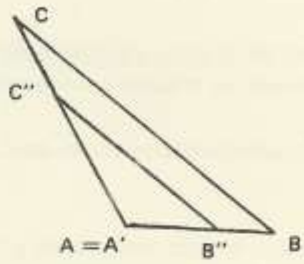
> Se dois triângulos têm um ângulo igual formado por lados proporcionais, então eles são semelhantes.

Considere os triângulos ABC e A'B'C', dados a seguir, com $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$



Como $\hat{A} = \hat{A}'$, transportando-se o ângulo A' sobre o ângulo A, o ponto C' vai num ponto C'' do lado AC tal que $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ e o ponto B' vai num ponto B'' do lado AB tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$.

Nestas condições , $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B''C''$.



Como $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$, $\overline{A'B'} = \overline{AB''}$ e $\overline{A'C'} = \overline{AC''}$, pode-se escrever

$$\frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}}$$

Nestas condições, os triângulos AB''C'' e ABC são homotéticos. Logo

$$\overline{B''C''} \ / / \ \overline{BC}$$

Diga se $\hat{B}'' = \hat{B}$.
Resposta

Por que?
Resposta

Diga se $\hat{C}'' = \hat{C}$
Resposta

Por que?
Resposta

Você deve ter concluído que $\hat{B}'' = \hat{B}$ e $\hat{C}'' = \hat{C}$.
Como $\triangle A'B'C' \cong \triangle A'B''C''$, resulta

$$\hat{B}'' = \hat{B}' \text{ e } \hat{C}'' = \hat{C}'$$

Assim, tem-se

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ , } \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \hat{C} = \hat{C}'$$

o que mostra que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

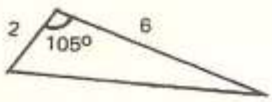
2. Pode-se, também, mostrar que vale o seguinte caso de semelhança de triâng

Segundo caso de semelhança de triângulos

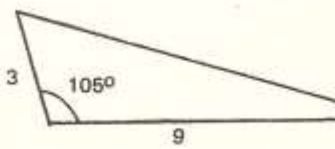
Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Exercícios:

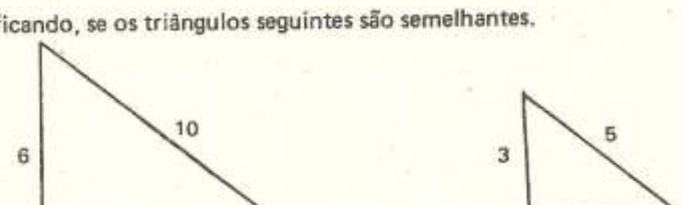
1. Diga, justificando, se os triângulos seguintes são semelhantes.



Resposta



2. Diga, justificando, se os triângulos seguintes são semelhantes.



Diga se $\hat{B}'' = \hat{B}$.
Resposta

Por que?
Resposta

Diga se $\hat{C}'' = \hat{C}$
Resposta

Por que?
Resposta

Você deve ter concluído que $\hat{B}'' = \hat{B}$ e $\hat{C}'' = \hat{C}$.
Como $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B''C''$, resulta

$$\hat{B}'' = \hat{B}' \quad e \quad \hat{C}'' = \hat{C}'$$

Assim, tem-se

$$\hat{A} = \hat{A}' \ , \ \hat{B} = \hat{B}' \ e \ \hat{C} = \hat{C}'$$

o que mostra que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

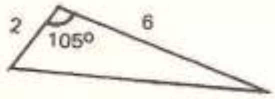
2. Pode-se, também, mostrar que vale o seguinte caso de semelhança de triângulos:

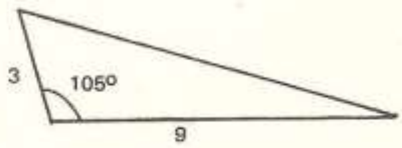
Segundo caso de semelhança de triângulos

> Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Exercícios:

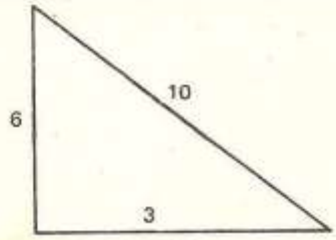
1. Diga, justificando, se os triângulos seguintes são semelhantes.

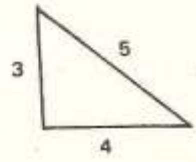




Resposta

2. Diga, justificando, se os triângulos seguintes são semelhantes.





Resposta

Resolva os exercícios da página 83.