O problema é um pouco difícil e exige uma certa capacidade de análise para sua solução. Um fato relevante é que os pontos C e D' eqüidistam da reta DAA' e que o segmento DA é a metade de DA'. Daí pode-se concluir que a área do triângulo A'DD' é o dobro da área do triângulo ACD. De modo análogo, concluímos que a área de AA'B' é o dobro de ABD, que a área de BB'C' é o dobro da área de ABC e que a área de CC'D' é o dobro da área de BCD. Então a soma das áreas dos quatro triângulos "exteriores" ao quadrilátero ABCD será 4s, a área de A'B'C'D', será 4s + s, isto é, 5s. Uma verificação trivial da solução pode ser feita particularizando-se o quadrilátero convexo ABCD para um quadrado e a solução 5s aparece rapidamente; pois cada um dos triângulos "existentes" tem área igual ao do quadrado inicial.

Consideremos o problema: "Usando uma e uma só vez cada um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, consideremos os números naturais de um ou de dois dígitos, que somados dêem resultado 100. Como devem ser as parcelas?" Naturalmente algumas tentativas podem ser feitas pelo exame de algumas particulares somas, como: $0 + 1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 = 45$; $0 + 1 + 23 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99$ e $01 + 32 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 108$. Um pouco de observação permite ver que cada soma é um múltiplo de 9. Então procura-se verificar se pode existir alguma soma valendo 100. Se u é a soma dos algarismos das unidades das parcelas, então, a soma dos algarismos das dezenas das parcelas vale $(45 - u)$. Logo a soma $100 = (45 - u)\,10 + u$, ou $9u = 350$, ou $u = 350/9$. Como u deve ser número inteiro, a contradição é evidente e o problema é impossível.

Dois livros extraordinariamente úteis para os professores que se dedicam a processos de seleção são: Taxonomy of Educational Objectives, de Benjamin S. Bloom e outros (tradução por Flavia Maria Sant'Anna) e Objectives for Mathematics Learning, de S.M. Avital e S. J. Shettlervorth. No livro de Bloom os problemas são diversificados em seis diferentes níveis: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação, ordenados hierarquicamente, isto é, a possibilidade de resolução de um problema a nível de análise exige a capacidade de resolução de problemas do mesmo assunto em níveis inferiores. O mais elevado nível, avaliação, em problemas de Matemática tem sido rejeitado por alguns autores, inclusive Avital, pois que a sua aplicação exige um critério discutível e, por consenso, problemas de Matemática devem ter solução exata. O livro de Avital contém uma série de problemas bastante engenhosos, principalmente a nível de análise ou de síntese, que o autor chama de problemas de *pesquisa em aberto* (open search). Alguns desses problemas vão ser reproduzidos no final deste artigo.

Em Geometria, há mais de dois milênios, têm tido peculiar importância os problemas que podem ser resolvidos com régua e compasso, isto é, aqueles cuja solução pode ser obtida com número finito de operações com régua e compasso. Com o desenvolvimento da Álgebra ficou provado que esses problemas são exatamente aqueles que poderiam ser resolvidos por meio de equações do 1.º ou do 2.º grau, ou por meio de equações redutíveis a esses graus. Mais recentemente, Mascheoni provou que os problemas e soluções com régua e compasso podem também ser resolvidos somente com compasso. São notáveis os três problemas clássicos de geometria que não podem ser resolvidos com régua e compasso: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trisecção do ângulo. Apesar disto, até hoje os Departamentos de Matemática continuam recebendo de amadores engenhosos, "soluções" para tais problemas. Um problema clássico, que tem despertado bastante atenção, é o da divisão da circunferência em *n* partes iguais. Cerca de três séculos antes de Cristo esse problema já tinha solução conhecida, com régua e com compasso, quando $n = 2^k$, $n = 2^k 3$, $n = 2^k 5$ e $n = 2^k 15$, $k = 0,1,2,3,\ldots$ Sobre esse problema Gauss conseguiu provar em 1801, um Teorema clássico: "A divisão da circunferência em n partes iguais ($n \geqslant 2$) é possível com régua e compasso, se e somente se n for de uma das formas: i) $n = 2^k$, $k = 1,2,3,\ldots$ ou ii) $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \ldots p_s$, onde $p_1, p_2, \ldots p_s$ são primos distintos da forma $Fm = 2^{2^m} + 1$ e $k = 0,1,2,3,\ldots$" Assim, como $F_4 = 65537$ é primo, sabemos que é possível, com régua e compasso, dividir a circunferência em 65537 partes iguais! A propósito dos números da forma $Fm = 2^{2^m} + 1$, chamados "primos de Fermat", convém observar que, em 1732, Euler mostrou que F_5 era o produto 641 x 6700417 e portanto, os "primos de Fermat" não eram todos primos!

Em 1858, o arqueólogo escocês Henry Rhind, em estada no Egito para tratamento de saúde, comprou de um mercado um papiro mutilado de dimensões 0,3m x 5,0m. O documento, hoje no Museu Britânico e conhecido como o Papiro de Rhind, fora escrito por um certo escriba Ahmés, cerca de 1.650 A.C., copiando um outro documento que teria sido escrito entre 1800 e 2000 A.C. No papiro estava a Matemática conhecida dos egípcios, principalmente sob a forma de problemas, em número de 84. Alguns anos mais tarde, os fragmentos que faltavam do papiro foram levados para os EEUU, onde hoje estão no museu de Brooklin, em New York. Um outro papiro célebre, o de Moscou, contém 25 problemas, foi comprado em 1893 e teria sido escrito em 1890 A.C. por escriba desconhecido. Pelos documentos sabe-se que os egípcios tinham símbolos próprios para os números naturais n, para as frações da forma $\frac{1}{n}$ e para a fração $\frac{2}{3}$; as frações de forma $\frac{n}{n+1}$ eram representadas como o complemento de $\frac{1}{n+1}$. O Papiro de Rhind, além de conter 84 problemas, mostra que os egípcios conheciam certas identidades como, por exemplo,

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} \quad \text{e} \quad \frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Daí teriam construído duas tabelas, uma de valores $\frac{2}{n}$, com n ímpar variando de 5 a 101 e outra de valores de $\frac{n}{10}$, para $n = 1,2,3,\ldots,9$. Dos 84 problemas do papiro, os seis primeiros tratavam da divisão de pequeno número de pães (até 9) por 10 pessoas, com uso da tabela de valores de $\frac{n}{10}$. O problema de n.º 72 mostra que conheciam regra de três, pois podia-se determinar o número de pães de "força" 45 equivalentes a 100 pães de "força" 10. O problema de n.º 63 mostra que conheciam a divisão em partes proporcionais. Alguns problemas mostram a habilidade em simplificar expressões numéricas como, por exemplo,

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{112}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

Alguns problemas sugerem que conheceriam a solução de equações do tipo $x + ax = b$ e $x + ax + bx = c$. O problema n.º 51 mostra que sabiam calcular a área do triângulo isósceles e o de n.º 52, a área de trapézio isósceles. A área do quadrilátero era calculada como o produto das médias dos lados opostos. Em um problema, a área de um campo circular de diâmetro 9, aparece como valendo 8^2, o que daria para π, o valor $3\frac{1}{8}$. O problema n.º 56, sugere o conhecimento de alguns conceitos trigométricos, pois usa-se o valor "seqt" que seria a cotangente de um ângulo na medida da inclinação das faces laterais das pirâmides. Os egípcios não faziam distinção entre cálculos exatos e aproximados, nem tinham preocupação com provas formais das propriedades eventualmente usadas. O Papiro de Moscou mostra ainda que sabiam determinar o volume do tronco de pirâmide quadrangular regular e a área da superfície esférica.

Alguns problemas têm solução que foge àquilo que a nossa intuição poderia prever. Entre eles, vou citar: i) Se $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 41$ é um número primo?; ii) Imagine a Terra esférica, com o Equador medindo 40.000km. Se o Equador fosse aumentado de 1m e o novo Equador disposto "paralelamente" ao antigo, a que distância estariam essas duas circunferências?; iii) Broca-se uma esfera, obtendo-se um espaço vasado cilíndrico cujo eixo contém o centro da esfera (o volume restante é um anel esférico). Se o anel tem altura 1m, calcule a diferença entre os volumes de um anel proveniente de uma esfera do tamanho da Terra e outro obtido de uma esfera de diâmetro 10m.

Resolvendo os problemas do parágrafo anterior encontramos: i) Embora $f(n)$ seja primo quando $n = 0,1,2,3,\ldots,39$, o valor $f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40\,(40+1) + 41 = (40+1).\,41 = 41^2$ não é primo; ii) Se R_E e $R_{E'}$, são, respectivamente, os raios do primeiro e do segundo "Equador", então vem: $R_E = \frac{40.000.000\text{m}}{2\pi}$, $R_{E'} = \frac{40.000.001\text{m}}{2\pi}$ e $R_{E'} - R_E = \frac{1}{2\pi} \cong 0{,}16\text{m}$; iii) Se a é o raio da esfera, b o raio interno do anel, um cálculo trivial de volume V de revolução mostra que $V = \frac{4\pi}{3}(a^2 - b^2)^{3/2}$. Se h é a altura do anel, pode-se tirar que $V = \frac{\pi h^3}{6}$, isto é o volume só depende da altura h e é nula a diferença entre os dois volumes!

Um método que pode ser usado em cursos de Matemática é aquele baseado exclusivamente na resolução de problemas. Muitos cursos em universidades americanas têm seguido o chamado método de Moore, apoiado exclusivamente na resolução de problemas. Halmos relata, no n.º 82 do American Mathematical Monthly, uma sua experiência sobre um curso de Álgebra Linear, baseado no estudo de 50 teoremas que deveriam ser explicados, deduzidos e aplicados pelos alunos, com um mínimo de interferência do professor. Segundo observações posteriores ao curso, os alunos envolvidos continuaram seus estudos em outras disciplinas, com um desempenho muito superior ao da média dos demais alunos. Embora possa parecer o contrário, os preparativos e o acompanhamento desses cursos pelo professor são, em geral, muito mais trabalhosos do que num curso tradicional! Aconselharia que alguns professores, principalmente aqueles que gostem de inovar, tentassem empregar o método sempre que condições adequadas o permitam. Não posso deixar de comentar o título da tese de doutorado de Cantor (1867): "Em Matemática, a arte de fazer perguntas vale mais do que a de resolver problemas". Se Cantor pudesse ter previsto o futuro e conseguisse antever o que Polya escreveria quase um século mais tarde, poderia ter conciliado as duas artes, uma vez que a resolução de problemas, em sala-de-aula, bem postos, naturalmente, exige do professor um perfeito conhecimento da arte de fazer perguntas!

Finalmente, apresentamos alguns problemas transcritos dos livros de Polya e de Avital, cuja solução poderá ser apresentada em algum número futuro deste Boletim:

1) Dois navios passam simultaneamente pelos pontos A e B, com velocidades constantes $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente. Determine a mínima distância entre os dois navios.

2) O número de quatro algarismos xxyy é o quadrado de um número natural n. Determine n.

3) Generalize somas como $1^3 = 1^2$, $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$ e prove ser verdadeira a generalização, qualquer que seja o número de parcelas.

4) Qual o valor da soma $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$?

5) Como se podem retirar exatamente seis litros d'água de uma tanque, quando se dispõe apenas de dois recipientes, um de quatro litros e outro de nove litros, sem qualquer graduação nos recipientes?

6) Construa um trapézio cujos lados são a, b, c, d, sendo a e c as bases e todos os lados diferentes.

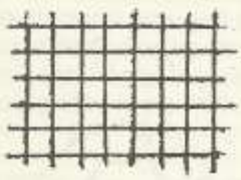
BIBLIOGRAFIA

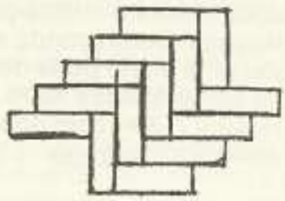
i) Bloom e outros — Taxionomia de Objetivos Educacionais
ii) Avital e Shetleworth — Objetives for Mathematics Learning
iii) Polya — How to Solve It? — Princebon University Press — 1973
iv) Coleção da Revista do Professor da SBM
v) Americam.Mathematical Monthly, n.º 82, artigo de P.R. Halmos, The Teaching of Problem Solving.

A GEOMETRIA DOS MOSAICOS

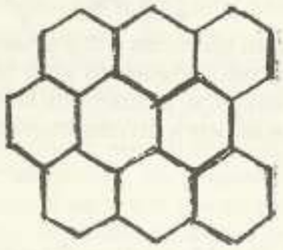
Luiz Márcio Imenes

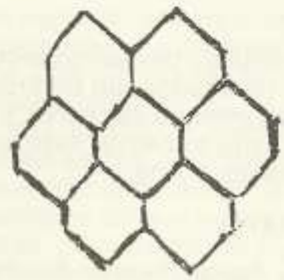
As paredes e os pisos das casas, às vezes, são recobertos por ladrilhos, tacos e azulejos de formas variadas. São bastante comuns as formas quadrada e retangular:



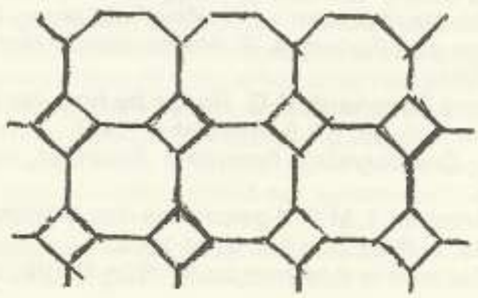


Há ladrilhos hexagonais (regulares ou não):



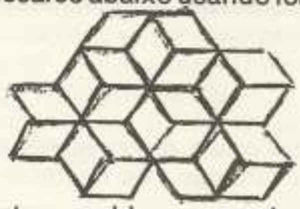


Podemos construir um mosaico bonito combinando quadrados e octógonos regulares:

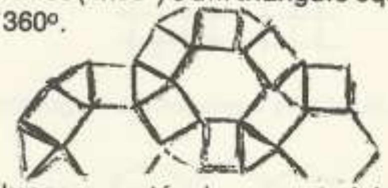


A observação destes diferentes recobrimentos do plano pode ser ponto de partida para a formulação de problemas interessantes, envolvendo ângulos e polígonos. Vejamos alguns exemplos:

1. No mosaico 3: qual a medida de cada ângulo de um hexágono regular?
2. No mosaico 5: qual a medida de cada ângulo de um octógono regular?
3. É possível recobrir o plano com:
   a) paralelogramos?
   b) triângulos equiláteros?
   c) triângulos escalenos?
   d) pentágonos regulares?
   e) losangos?
   f) trapézios?
   g) quadriláteros quaisquer?
4. É possível construir o mosaico abaixo usando losangos em que o ângulo agudo mede 40°?



A resolução destes e outros problemas envolve conceitos e propriedades dos polígonos. Conhecendo as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares, o aluno pode descobrir novos mosaicos. Deverá procurar ângulos cuja soma totalize 360°. Assim, por exemplo, podemos juntar um hexágono regular (120°) com dois quadrados (2x90°) e um triângulo equilátero (60°), pois: $120° + 2x90° + 60° = 360°$.



Na construção destes mosaicos os alunos usam técnicas e materiais variados. Os resultados são bonitos e os trabalhos não envolvem só a Matemática. Há a procura das cores, a preocupação estética, a busca da harmonia visual. Estes trabalhos ilustram bem a riqueza enorme do casamento entre Matemática e Arte.

BIBLIOGRAFIA

1) Tóth, L. Fejes. *Regular Figures.* New York, The Macmillan Company, 1964.
2) O'Daffer, Phares G. and Clemens, Stanley R. *Geometry: An Investigative Approach.* California, Addison — Wesley Publishing Company, 1977.
3) Cundy, H. Mastyn and Rollett, A. P. *Mathematical Models.* Oxford, University Press, 1961.
4) Grunhaum, B. and Shephard, G.C. *Tilings by Regular Polygons.* Mathematics Magazine, vol. 50, n.° 5, novembro 1977.
5) Steinhardt, P.J. *Quasicrystals.* American Scientist, vol 74, novembro-dezembro 1986.
6) Jakubovic, J. e Imenes, L.M.P. *A geometria dos ladrilhos.* Revista de Ensino de Ciências, FUNBEC, n.° 8, abril 1983.
7) Imenes, L.M. Geometria dos mosaicos. São Paulo, Editora Scipione, 1987.

UMA EXPERIÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DESENVOLVIDA NA UNIVERSIDADE DE PERNAMBUCO

Reprodução de reportagens do Jornal do Brasil de 30/3/87 e do Diário de Pernambuco de 8/3/87

UFP simplifica ensino da matemática

JB-RJ-30/3/87

Recife — Um método para simplificar o ensino e o aprendizado da matemática, desenvolvido por um grupo de pesquisadores do departamento de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, está sendo experimentado com sucesso em cinco escolas pernambucanas, sob a supervisão de pedagogos e técnicos do MEC. A novidade do método é sugerir que, ainda no processo de alfabetização, seja aplicada às crianças uma série de exercícios capazes de ajudar o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Tradicionalmente, o ensino da matemática exige das crianças sobretudo a memorização, desgastando-a com problemas enfadonhos. No método desenvolvido pelos pesquisadores da UFPE a fundamentação foi obtida através da obra do pensador Jean Piaget, para quem a inteligência se desenvolve de forma análoga à estrutura da matemática, permitindo que a criança se habilite desde muito cedo a realizar operações aritméticas (somas, subtrações), de ordenamento (maior, grande, menor) e topológicas (dentro, fora, perto), antes mesmo de aprender a ler e escrever.

— Os exercícios que elaboramos funcionam, assim, como estímulo ao desenvolvimento dessa capacidade. Depois disso, nunca mais a pessoa vai ter aquele medo doentio da disciplina e pode, com toda tranqüilidade, aprender seus elementos — assegura o professor João Barbosa de Oliveira, coordenador do grupo que desenvolveu a pesquisa.

Como funciona

A cartilha que aplica o método foi editada em dois volumes e consta, basicamente, de exercícios através dos quais o professor ajuda a criança a pensar os conceitos matemáticos. Nela, praticamente não há palavras. As páginas estão cobertas por exercícios que permitem a classificação de objetos e figuras, de acordo com categorias aritméticas de ordem ou topológicas. Um dos primeiros exercícios ensina, por exemplo, o conceito de grande e pequeno. Antes, porém, de deter-se no exame da cartilha, o aluno é convidado pela professora — ou professor — a fazer essas relações no próprio ambiente da aula. Os exercícios seguintes são cada vez mais complexos, até chegar ao ponto em que as crianças estarão prontas a trabalhar com os símbolos — os algarismos relacionados com objetos. Eles chegam a fazer sua própria tabuada, limitada ao número cinco na primeira fase e indo até 10, na segunda.

— O importante é que o aluno não precisa decorar nada. Mesmo os cálculos não precisam ser tão grandes. Até porque, hoje em dia, existem as máquinas para fazer isso. O que é preciso é pensar — afirma, por sua vez, a professora Rosária de Pompéia Bezerra Ramos, outra integrante do grupo.

A cartilha, que é elogiada por educadores como Ubiratã D'Ambrósio, da Universidade de Campinas, São Paulo, evita sofrimentos como aquele pelo qual o professor João Barbosa viu seu próprio filho menor, Nicolas, passar:

— Um dia ele chegou em casa desesperado porque ia ter de escrever de um a 100 em algarismos romanos. Uma tarefa de casa absurda, por não acrescentar nada — lembra ele.

O livro enfrenta de cara, entretanto, uma dificuldade: é descartável — a criança risca as páginas, durante as aulas — e por isso vai de encontro à nova orientação do Ministério da Educação em relação ao livro didático, que exige ser perene. Os idealizadores garantem, no entanto, que as vantagens que o livro apresenta são fortes demais para não serem levadas em conta.

Eles estão convencidos de que sua aplicação ajuda, até, na própria alfabetização da criança.

— Os conceitos matemáticos estão presentes em todo o processo de aprendizado. Quando uma criança aprende divisão silábica, formação de novas palavras com as sílabas obtidas e de frases com essas palavras, está utilizando o raciocínio matemático — afirma João Barbosa, que entende ser possível uma inversão das atuais prioridades, passando o aprendizado matemático a ser feito antes mesmo da alfabetização.

A pesquisa que permitiu o desenvolvimento da cartilha foi financiada pelo MEC através do Fundo Nacional de Desenvolvimento Escolar — FNDE — e da Secretaria de Ensino Superior, e vem sendo renovada anualmente, desde 1983, após inspeção feita por supervisores do Ministério. Foi esse convênio que permitiu a edição dos 1.300 exemplares iniciais da cartilha — incluindo o Manual do Professor — aprovada por um grupo de 120 educadoras vinculadas à rede estadual e a escolas particulares. Agora, os pesquisadores estão aguardando a liberação de mais recursos para a edição de 10 mil novas cartilhas, para ampliar a difusão do método.

— No momento isso é impossível apesar de haver muito interesse — informa o professor João Barbosa.

Atualmente, são alfabetizadas pelo método 400 crianças na faixa dos 6 aos 7 anos, martriculadas em escolas públicas. Além disso, 1.350 normalistas do Instituto de Educação de Pernambuco e 140 estudantes do curso de Pedagogia da UFPE recebem instruções sobre a sua aplicação.

ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA JÁ É ADOTADA NO RECIFE

Diário de Pernambuco-8/3/87

Fernanda d'Oliveira

Alfabetizar uma criança, hoje em dia, está além do ensinar a ler e escrever. Inclui, ainda, o aprendizado pela compreensão da própria Matemática. É o que nos afirma o professor João Barbosa de Oliveira, do Cecine — Coordenadoria do Ensino de Ciências do Nordeste, da Universidade Federal de Pernambuco, criador, juntamente com um grupo de professores, do método "Alfabetização Matemática", adotado, há alguns anos, em três escolas, ligadas ao IEP — Instituto de Educação de Pernambuco.

Ele ressalta que uma criança está alfabetizada em matemática, quando ela assimila os conceitos básicos da estrutura topológica, estrutura de ordem e estrutura de classe. Na estrutura topológica, onde está incluída também a Geometria, são estudados os conceitos da posição em que os objetos e a criança ocupam no espaço. Noções de vizinhaça, dentro, fora, fronteira, entre outros. No que se refere à Geometria, são estudadas a forma das figuras planas e espaciais.

Na estrutura de classe ou algébrica são estudados todos os conceitos relacionados às noções de agrupar, reunir, separar, isto é, a noção de conjunto e, conseqüentemente, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, no que se refere a situações específicas. Na estrutura de ordem são desenvolvidos os conceitos de juntar, separar, tempo maior, menor, grosso, fino, alto, baixo, ordenação, numeração, etc. "Para nós, — esclarece o professor Barbosa — as crianças que recitam os numerais deverão, mais adiante, ter problemas em sua formação matemática, porque elas passam da simbolização, que são os números, para a automação, sem antes virem de uma ação, passando pela compreensão, para em seguida simbolizarem e, com o tempo, automatizarem".

IDÉIA

Foram três os motivos que levaram o professor João Barbosa a idealizar o projeto. O primeiro, pelos trabalhos escolares que seu filho trazia como "dever de casa" e pela angústia que o professor percebia quando seu filho ia fazer. Na maioria das vezes era escrever numerais até um certo valor ou efetuar "contas" sem sentido. "Esta situação, quando se faz uma análise, traz uma desorganização na cabeça da criança, criando o que os psicólogos chamam de "Metafobia" (ter medo da matemática), o que impede muitas pessoas de aprenderem qualquer coisa que reconheçam como matemática. E este é o segundo motivo".

O terceiro motivo é que o próprio processo de aprender a ler envolve uma série de conhecimentos de conceitos matemáticos, tais como: A — Tomamos uma palavra geradora e fazemos uma partição. B — Faz-se uma reorganização em estruturas novas (novas palavras). C — A partir de um conjunto disperso de palavras já obtidas formam-se frases. Todo este processo está envolvendo conceitos de dividir, reunir, etc, além de conceitos até mais complexos, como o de permutação, ou seja: T com A = TA; T com E = TE, ou mesmo o conceito de tábua de dupla entrada. "Estas são implicações matemáticas — explica o professor João Barbosa — e que independem do método usado na alfabetização que se vai utilizar. O processo de leitura necessita de certas condições mentais (matemáticas) para abarcar toda essa complexidade, que é o aprender a ler".

Em pesquisas realizadas ficou evidenciado que a grande maioria das cartilhas apresentam estimulos novos em lições, de forma não cumulativa, sem respeitar uma ordem crescente de dificuldades, além do número de atividades propostas nas cartilhas ser limitado e freqüentemente inadequado. Este fato acontece, principalmente, na alfabetização matemática. Outro ponto a ser salientado pelo professor Barbosa é a falta completa de instruções que especifiquem ao professor, procedimentos para a apresentação dos novos estímulos, exemplo de atividades de fixação da aprendizagem e opções para a avaliação.

"A nossa proposta — diz ele — é uma tentativa de resolver parte dos problemas analisados. Para isso foi elaborada uma cartilha para alfabetização matemática, com pequenos passos através de fichas de trabalho. Acompanha essa cartilha um guia para o professor, com orientação metodológica para cada ficha, dando oportunidade ao professor de criar novas atividades. Este material foi aprovado pelo Ministério da Educação/Secretaria de Ensino Superior e Secretaria de Educação de Pernambuco, em 1983".

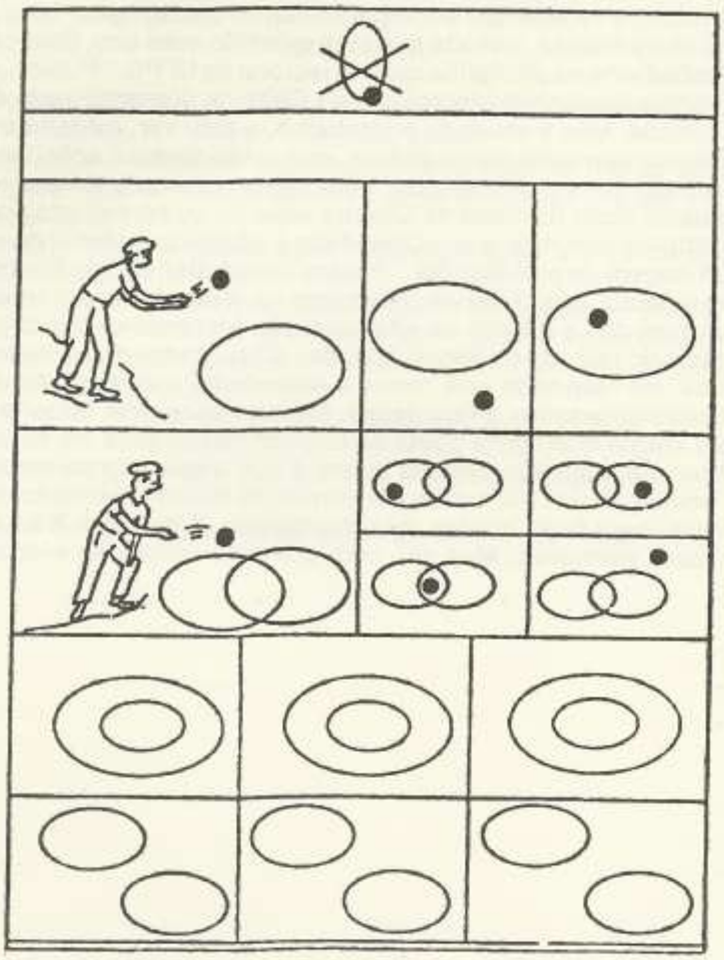
Atualmente, com o apoio da Secretaria de Educação de Pernambuco, vem sendo aplicado no IEP, nas suas seguintes escolas: Jardim da Infância Ana Rosa Falcão de Carvalho (160 alunos); Cônego Rochael de Medeiros (280 alunos de alfabetização); Sylvio Rabelo (1.300 alunos do curso de Magistério, 2.º grau), além de 20 professores e supervisores destas escolas. O trabalho foi iniciado em 1985, sendo solicitada sua continuidade no ano passado. Para 1987, este mesmo número de alunos será atendido.

ESCOLA:

10

ALUNO: IDADE:

DATA:



projeto: ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA

Identificação de interior e exterior de curvas fechadas, curvas estas anteriormente trabalhadas pelos alunos

METODOLOGIA

A coordenação do projeto, atualmente, está a cargo de Rosaria de Pompéia Bezerra Ramos, também professora de Metodologia da Matemática, do curso de Pedagogia da UFPE. Segundo ela, os professores destas escolas em que a Alfabetização Matemática foi aplicada participaram de cursos de treinamento e receberam acompanhamento pedagógico feito por ela própria no ano passado, método que será repetido esse ano. Esta cartilha é também trabalhada na disciplina que ela leciona na UFPE. "Porém, pelo período de tempo disponível oferecido pela Cadeira, somente parte da cartilha é trabalhada. Mas a validade do trabalho, a meu ver, evidencia-se pelo entusiasmo apresentado pelos alunos, que estão sempre solicitando cursos no período de recesso escolar, bem como a compra do material".

O professor João Barbosa de Oliveira salienta que o método apresenta algumas dificuldades mas, a principal delas é a falta de material de aprendizado e reciclagem de professores. "Porém, com o dinheiro do Ministério da Educação e SESU, que deveremos receber no mês de julho, iremos editar 10.000 volumes da I e II parte da Alfabetização Matemática". Indagado sobre a eficácia do método na diminuição das dificuldades do aprendizado da matemática, ele responde que "onde o método foi aplicado, ele diminuiu consideravelmente essas dificuldades. Constatamos dois fatos: a própria professora afirma que agora gosta de ensinar matemática e o aluno gosta de aprender. Uma opinião pessoal minha é que o que vale na matemática, hoje, é a aquisição dos conceitos em termos de desenvolvimento do raciocínio porque, para fazer contas, as calculadoras já existem. Não é que se deixe de fazer continhas. Mas não com a ênfase como são ensinadas".

JOGO MATEMÁTICO

Anna Averbuck
Franca Cohen Gottlieb

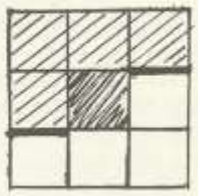
Apresentamos neste artigo um jogo que foi proposto na revista italiana Domenica Quiz (Ed. Rizzoli) de 13/2/86. Fizemos a tradução do problema e em seguida algumas considerações sobre sua resolução.

"**Uma Bissecção Simétrica**

Estamos propondo um problema de bissecção simétrica que vai fazer com que você quebre sua cabeça à procura das mais diferentes soluções.

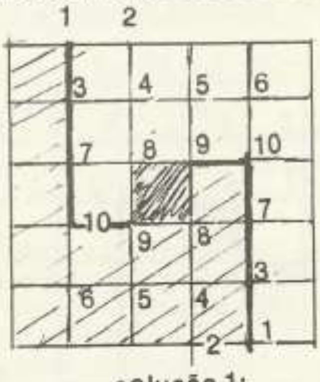
Considere o quadrado cujo lado mede três unidades, sem o quadrado central.

Queremos cortá-lo ao longo das linhas que o subdividem, de modo a obter duas figuras de mesma forma e mesma área.



Você pode facilmente constatar que os cortes são obrigatoriamente os dois assinalados, a menos de rotações do quadrado em torno de seu centro.

Considere agora o quadrado com cinco unidades de lado, também sem o quadrado central. Queremos cortá-lo, como o outro, de modo a obter duas figuras de mesma forma e área. A figura mostra uma maneira de se obter a bissecção desejada. Mas ela não é a única. Existem outras quatorze. O problema consiste em encontrá-las. Para representar uma bissecção usaremos a notação pela numeração dos vértices. Por exemplo, a bissecção da figura será representada por: 1 — 3 — 7 — 10 — 9.



solução 1:

Preste bem atenção para não considerar como diferentes as soluções que podem ser obtidas uma das outras por meio de convenientes rotações do quadrado em torno do seu centro."

Solução do problema

É evidente que com paciência e perseverança pode-se chegar a encontrar as outras quatorze soluções de maneira aleatória e sem método de trabalho.

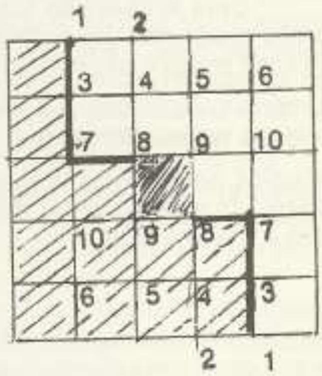
Nosso intuito é indicar um caminho formal para conseguir encontrar todas as soluções. Estabelecido esse caminho, deixamos aos colegas os problemas de verificar quantas soluções há para quadrados de sete unidades de lado ou de nove unidades.

No problema proposto observamos que o mesmo só tem sentido se usarmos quadrados que tenham por lado um número ímpar de unidades. Isto acontece devido à condição de exclusão do quadrado central.

No caso do quadrado de cinco unidades de lado, resolvemos o problema em duas etapas:

1.ª etapa: Procuremos todas as bissecções com origem no vértice 1 (1').

Partindo dele, vamos ao vértice 3 (3'). Daí, seguimos para baixo (para cima) ou para a direita ou para a esquerda, até o próximo vértice. Aí, novamente temos as opções: para baixo (para cima), para a direita ou para a esquerda, e vamos repetindo o processo até que a poligonal encontre um dos vértices do quadrado central.

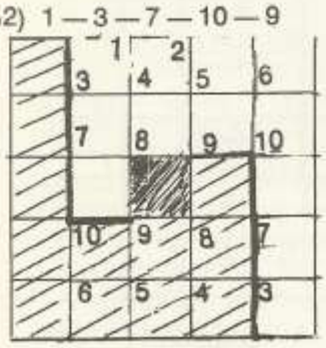


Observação: Devemos ter o cuidado de fazer simultaneamente os dois "caminhos" simétricos, para que os mesmos não se interceptem (Na solução 1: 1 — 3 — 7 — 8 e 1' — 3' — 7' — 8').

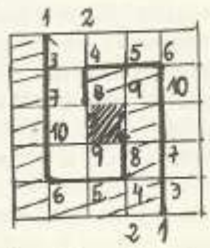
Além disso, não podemos tocar as bordas. Isto "quebraria" a figura.

Assim, partindo do vértice 1 temos ainda as soluções:

2) 1 — 3 — 7 — 10 — 9



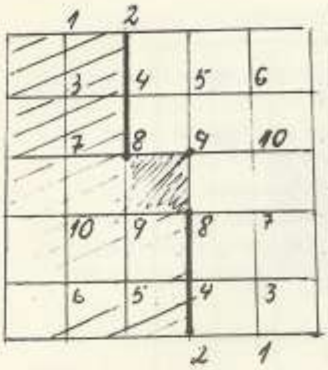
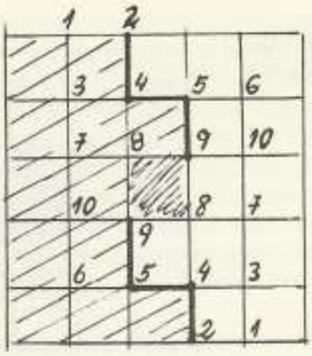
3) 1 — 3 — 7 — 10 — 6 — 5 — 9



4) 1 — 3 — 7 — 10 — 6 — 5 — 4 — 8

5) 1 — 3 — 4 — 8
6) 1 — 3 — 4 — 5 — 9
7) 1 — 3 — 4 — 5 — 6 — 10 — 9
8) 1 — 3 — 4 — 5 — 6 — 10 — 7 — 8

2.ª *etapa:* Procuremos as bissecções partindo do vértice 2 (com procedimento análogo ao da 1.ª etapa).


9) 2 — 4 — 8 10) 2 — 4 — 5 — 9 11) 2 — 4 — 5 — 6 — 10 — 9

12) 2 — 4 — 3 — 7 — 8
13) 2 — 4 — 3 — 7 — 10 — 9
14) 2 — 4 — 3 — 7 — 10 — 6 — 5 — 9

Qualquer outra solução seria uma das quatorze anteriores a menos de rotações do quadrado em torno de seu centro.

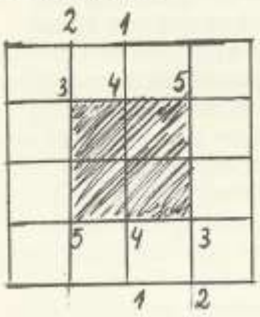
Variações sobre o problema:

O que devemos fazer se queremos que o lado tenha por medida um número par de unidades?

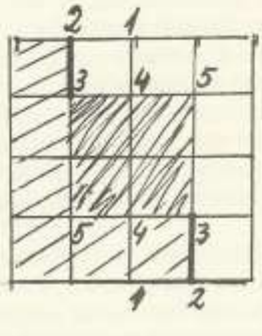
Evidentemente a medida 2 para o lado não serve, pois não podemos tirar nenhum quadrado no meio.

Experimentemos com o quadrado medindo 4 unidades.

Precisamos neste caso tirar, no meio, um quadrado com duas unidades de lado, e depois numerar os vértices como se vê na figura ao lado. As duas únicas soluções possíveis, a menos de rotações do quadrado em torno do seu centro, são:



solução 1 — 4



solução 2 — 3

Consideremos o quadrado cujo lado mede seis unidades, e tiremos o quadrado 2 x 2 no meio. Vejamos a numeração necessária:

A solução é obtida saindo do 1, para baixo. Esta solução é anotada:
1 — 6 — 11.

Deixemos aos colegas a diversão de resolver o problema. Só adiantamos que há 29 soluções ao todo.

PESQUISA EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Douglas A. Grouws
Universidade de Missouri — Columbia

Tradução de Radiwal A. Pereira

O professor é componente importante no ensino de Matemática nas escolas e, provavelmente, também tem efeito duradouro sobre como e o que o estudante aprende de Matemática, após seus estudos escolares. Apesar desse importante papel, o reconhecimento da relevância da pesquisa no ensino tem sido muito lento. É fácil fazer essa verificação em face do pequeno número de pesquisas nessa área, se comparado com o número de trabalhos em aprendizagem e questões curriculares. Entretanto, é alentador verificar que o interesse geral pela pesquisa em ensino está em fase de crescimento.

Neste artigo, gostaria de rever rapidamente o que há de pesquisas em ensino, focalizando o progresso que tem sido feito na conceituação do que se entende por professor eficiente, comentar a atual metodologia de pesquisa, resumir alguns resultados de ensino "process-product" que tenham aplicações em sala-de-aula e sugerir direcionamento e refinamento para a pesquisa futura, usando essa metodologia.

Revisão Histórica

No meu ponto de vista, o desenvolvimento da pesquisa em ensino tem-se revelado com uma tendência significativamente progressista. A conceituação do que se entende por professor eficiente tem variado em diversas e sucessivas etapas. Os primeiros estudos focalizaram as características do professor que estivessem relacionadas com o desempenho dos alunos. A atenção esteve toda voltada para variações individuais, tais como inteligência do professor, anos de sua experiência de ensino, seu conhecimento de Matemática, sua atividade profissional, sua personalidade, etc. Depois de alguns anos de trabalho e muita pesquisa, ficou claro que não era possível encontrar uma relação forte entre essas variáveis e a medida do desempenho dos alunos.

A pesquisa então deslocou-se de modo a considerar professor eficiente como aquele capaz de implementar métodos eficientes usados. Esses estudos experimentais comparavam turmas ensinadas por um método, com turmas que usavam outro método. As dificuldades metodológicas mais comuns incluiam tratamentos mal definidos, fracasso na observação e na medida das diferenças na implementação do tratamento, uso de medidas de desempenho pouco sensíveis e o uso de aluno em vez da turma como unidade de análise (dessa maneira, os efeitos devidos aos métodos foram confundidos com as diferenças existentes entre os professores). A interpretação dos resultados era também difícil por causa dos métodos, tais como "aprendizagem pela descoberta", por falta de uma definição comum para as pesquisas e porque os tratamentos comparavam resultados, que muitas vezes diferiam em tantas dimensões, que não se podia determinar relações de causa e efeito entre as variáveis. Em geral, os resultados eram freqüentemente inconclusivos e algumas vezes contraditórios.

A popularidade dos estudos desses métodos declinou quando a atenção da comunidade começou a se deslocar, na década 1950-1960, dos resultados cognitivos para os afetivos. O *clima* da sala-de-aula e a *atitude* do aluno tornaram-se as palavras-chaves. Com essa mudança de direção, os pesquisadores passaram a preocupar-se com o comportamento do professor. Numerosos esquemas de controle foram desenvolvidos e então os pesquisadores começaram a focalizar a ligação entre o comportamento do professor e a aprendizagem do aluno, o chamado estudo "process-product", que visa a relacionar atos de ensino com reação do aluno, começou a ganhar popularidade. Inicialmente, o trabalho "process-product" focalizou reações afetivas dos alunos e acabou misturando resultados. Os estudos entre tamanho da exposição do professor e imprecisão, feitos por Flanders e outros, são típicos desse trabalho, cujos resultados e limitações são muito bem conhecidos. O ponto relevante, no entanto, é que os pesquisadores haviam começado a focalizar o que o professor *faz*, em oposição ao que o professor *é*. Como será visto mais tarde, isto forneceu alguns importantes resultados que tiveram conseqüência em sala-de-aula.

De certa maneira, a pesquisa em ensino atingiu o seu ponto mais baixo durante a década 1960-1970, quando a atenção foi desviada do ensino para os currículos, por imposição dos governos centrais. A principal preocupação dos projetos era o conteúdo de Matemática. A organização do conteúdo era determinada pela estrutura da Matemática e sua apresentação era feita com terminologia precisa. Em suma, os projetos estavam mais interessados com o que ensinar e rapidamente provavam que o ensinado era aprendido, mas silenciavam sobre a eficiência do professor. Talvez a impropriedade desses projetos curriculares em desenvolver materiais para testar os professores e as restrições às tentativas de extrapolar pesquisa de laboratório para sala-de-aula, tenham despertado novamente o interesse pela pesquisa em ensino já anteriormente mencionada.

Em resumo, o que era considerado um professor eficiente na cabeça dos pesquisadores evoluiu nos seguintes estágios (Medley, 1979): possuidor de certas características, utilizador de métodos particulares, deflagrador do clima da sala-de-aula, dominador de repertório de conhecimentos e qualificado tomador de decisões no uso e aplicação dos conhecimentos adquiridos.

Metodologia de Pesquisa Atual

Duas metodologias de pesquisa são hoje responsáveis pelos recentes avanços no nosso conhecimento de ensino de Matemática. A primeira envolve estudos etnográficos, o que pode ser considerado um tipo especial do estudo de casos, onde, como Bellack (1978) observa, o pesquisador tenta obter compreensão do ensino, do ponto de vista de professores e alunos, por meio de descrição do fluxo de eventos em sala-de-aula, como percebidos e interpretados pelos participantes. De um trabalho de Roberg e Carpenter, ainda no prelo, salientamos: "o que é comum nesses estudos é a preocupação com a intencionalidade e com a interpretação (ou sentido) subjetiva do agente na compreensão do mundo social."

A segunda metodologia envolve estudos "Process-product", que procuram compreensão do ensino através da ligação entre comportamentos de ensino e desejadas reações dos alunos. Os comportamentos a estudar são previamente identificados, considerando a teoria do ensino e a existência de modelos de ensino, assim como pesquisa anterior nessas áreas. Segue observações freqüentes e sistemáticas, num grande número de salas-de-aula, usando esquemas estereotipados, previamente preparados. Finalmente, o pesquisador procura correlação entre os dados do comportamento de ensino e das medidas do desempenho do aluno, levando-se em conta a diferença inicial existente.

Ambos os estudos, etnográfico e "process-product", têm auxiliado a aumentar a nossa compreensão do ensino e dos seus efeitos. O estudo etnográfico, com seu estudo em profundidade de um professor, ou de uns poucos deles, fornece uma útil visualização do processo de tomada de decisão, já mencionado anteriormente. Resultados interessantes têm sido encontrados, como por exemplo, de que maneira o sistema de crença do professor na natureza da Matemática e a importância da disciplina de classe influem na atividade didática. À proporção que os estudos "Process-product" têm sido refinados e melhorados, têm também eles dado importante contribuição ao ensino. Refinamentos e sua contribuição ao ensino serão discutidos nos parágrafos seguintes.

Refinamentos na metodologia "process-product"

Um certo número de refinamentos no acompanhamento dos estudos "Process-product" têm evoluído. Os cinco que se seguem melhoraram grandemente este tipo de pesquisa:

Primeiro é o controle de situação em sala-de-aula. Se, além do ensino, diferentes condições existem em uma e outra turma, o desempenho dos alunos pode variar e, assim, haverá dificuldade para descobrir relações entre comportamento do professor e reação do aluno. Os pesquisadores têm, cada vez mais, levado em conta esse controle e, geralmente, escolhem turmas que tenham, no mínimo, mesmo nível escolar, e que estejam estudando o mesmo programa de Matemática e com o mesmo livro-texto. Constante preocupação com esta situação deve continuar.

A segunda melhoria é o uso de maior número de observações de cada professor. Isto é especialmente importante no estudo de comportamentos pouco freqüentes, ou que só ocorrem em situações especiais (por exemplo, nos exames e nas revisões).

O terceiro refinamento é o uso de múltiplas medidas de aproveitamento do aluno. No começo, nos EE.UU. em particular, os testes padronizados de desempenho eram normalmente usados para avaliar o conhecimento dos alunos. Apesar de muitas escolas ainda considerarem como apropriada a aplicação desses testes para medida da consecução dos seus objetivos, os pesquisadores estão agora aumentando a busca pela correlação entre comportamento do professor e reação do aluno, dando especial atenção aos testes de conteúdo, às medidas de afetividade e aos níveis de aprendizagem de Matemática. Temos esperança de que, no futuro, sejam empregados instrumentos para medir habilidades específicas como, por exemplo, resolução de problemas.

Finalmente, os últimos refinamentos, isto é, o quarto e o quinto, estão nos estudos que dão especial atenção em distinguir o professor mais eficiente dos menos eficientes. No início esses estudos selecionavam os professores à base de avaliação feita pelos diretores da escola ou por outros "especialistas", sem levar em conta medidas objetivas do desempenho dos seus alunos. Um importante passo adiante ocorreu quando os pesquisadores começaram a fazer a seleção dos professores através de medidas diretas do desempenho dos alunos. Um outro passo adiante foi o exame do impacto nos estudantes pela permanência do mesmo professor na turma, de um ano escolar para o seguinte. Há agora estudos para examinar as práticas de ensino de professores cujos estudantes tiveram desempenho superior ao esperado durante um determinado período (ver, por exemplo, Good e Grouws).

Resultados dos estudos "process-product"

Um grande número de estudos "process-product" têm sido feitos. Gostaria de dar especial atenção a três deles, em Matemática. Um, realizado por Good e Grouws (1977), envolviam a observação de 41 professores de turmas de 4.ª série. Cada um deles foi observado 6 ou 7 vezes, quando ensinavam Matemática, tendo sido medido o desempenho dos seus alunos, usando-se um teste padronizado de desempenho. Estudo semelhante de professores de Matemática das primeiras séries do 1.º grau foi realizado por Evertson, Emmer e Brophy (1980). O terceiro estudo foi feito, com turmas de Álgebra de 9.ª série, por Smith (1977).

No estudo de turmas de 4.ª série, a melhoria de desempenho dos alunos, ao que foi achado, esteve associada a: (1) clareza geral da instrução; (2) tarefas focalizadas no meio ambiente; (3) ambiente de ensino não-avaliativo e relativamente frouxo; (4) expectativa de desempenho superior (mais tarefa de casa, maior rapidez de aprendizagem); (5) poucos problemas de disciplina; (6) turma considerada como uma unidade. Os professores que obtiveram bons resultados eram muito ativos, enfatizavam o *sentido* dos conceitos de Matemática e aplicavam sistematicamente processos de revisão na sua atividade didática.

No estudo de professores das primeiras séries do 1.º grau, obtiveram bons resultados aqueles que: (1) gastaram mais tempo em apresentação de conteúdo e discussão e menos tempo em trabalho individual passivo; (2) tiveram expectativa otimista de seus alunos (passaram deveres de casa mais freqüentemente, preocuparam-se com seu desempenho acadêmico e deram orientação acadêmica com mais freqüência); (3) tiveram habilidade de condução mais forte (comportamento impróprio mínimo, transições mais eficientes e mais atenção dos alunos).

Como já assinalava antes (Grouws, 1980), muitas relações importantes existem entre os dois estudos citados e também entre eles e pesquisas anteriores. A conclusão sobre o valor do tempo gasto na apresentação de conteúdo, por exemplo, coincide muito proximamente com os resultados de grande número de estudos experimentais em Matemática (por exemplo, Schuster e Pijge, 1965; Chipp e Deer, 1960; Zahns, 1966 e Dubriel, 1977). Es-