BOLETIM GEPEM

21

ANO XII 2.° SEMESTRE 1987

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO

G E P E M

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

DIRETORIA DO GEPEM

APOIO FINANCEIRO DO
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA
— PADCT - CAPES —

ÍNDICE

Apresentação 5
Regina Monken

A Matemática e a Linguagem 7
Amélia M.ª Noronha Pessoa de Queiroz

Resolução de Problemas 21
Radiwal Alves Pereira

A Geometria dos Mosaicos 27
Luiz Márcio Imenes

Uma Experiência em Educação Matemática desenvolvida na Univ. Pernambuco 29
Reportagens JB e Diário de Pernambuco

Jogo Matemático 35
Anna Averbuck e Franca Cohen Gottlieb

Pesquisa em Ensino de Matemática 39
Douglas A. Grouws
(Tradução de Radiwal Alves Pereira)

Relatório da Secretaria do GEPEM 47

APRESENTAÇÃO

Regina Monken

Cá estamos nós, caro leitor, apresentando-lhe o boletim 21 com as costumeiras desculpas pelo atraso. Ele se refere ao 2.º semestre de 87.

Começamos com um artigo da colega Amélia M.ª de Queiroz relacionando a Matemática e a Linguagem. O fato de que um dos obstáculos ao bom desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem é a falta de compreensão da linguagem matemática ficou evidenciado no estudo desenvolvido na dissertação de mestrado "A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 2.º GRAU", defendida pela Prof.ª Amélia na PUC/RJ, em 87. No boletim 20 publicamos um resumo dessa dissertação e prometemos para os seguintes a fundamentação teórica dos testes usados na pesquisa. O artigo em questão expõe fatores decisivos para a escolha desses testes e nos próximos números daremos continuidade ao assunto.

Os dois artigos seguintes apresentam resumos das palestras proferidas pelos autores nas reuniões mensais do GEPEM: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, do Prof. Radiwal Alves Pereira, e a GEOMETRIA DOS MOSAICOS, do prof. Luiz Márcio Imenes. Procuramos, com a apresentação desses resumos, levar aos colegas ausentes às palestras uma amostra do que, nelas, os autores nos transmitiram. Lamentamos não poder passar aos leitores, na publicação, todo o brilhantismo, entusiasmo e calor humano com que fomos brindados nos encontros em questão.

A equipe de professores-pesquisadores João Barbosa de Oliveira e Maristela Jorge Melo, da Coordenadoria do Ensino de Ciências do Nordeste, e Teresa Emília Aquino de Lima, do Colégio de Aplicação da UFPE, elaborou o projeto ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA, que está sendo testado em escolas da rede pública de Pernambuco. Transcrevemos duas reportagens, do JB/RJ e do Diário de Pernambuco, sobre o projeto e sua execução que, julgamos, despertarão muito interesse e entusiasmo nos leitores.

As professoras Anna Averbuch e Franca Gottlieb, da diretoria do GEPEM e constantes colaboradoras do boletim, apresentam, a título de curiosidade, um jogo matemático traduzido de uma revista italiana. Acrescentam as professoras uma sistematização para a resolução do problema e comentários sobre o mesmo, deixando aos leitores o desafio da solução completa.

Ainda o prof. Radiwal, nosso outro assíduo colaborador, traduziu para nós a conferência PESQUISA EM ENSINO DA MATEMÁTICA, que o prof. Douglas A. Grouws, Univ. Missouri, Columbia, USA, proferiu no V ICME, Austrália, 84.

Encerramos o boletim com a publicação, para conhecimento dos associados, do Relatório da Secretaria do GEPEM, 1987.

E lembre-se, caro colega: esperamos pela narrativa de uma experiência ou pesquisa em Educação Matemática da qual você tenha participado ou tenha conhecimento. Esperamos por alguma curiosidade, problema ou jogo que você conheça e que possa interessar aos demais leitores. Esperamos pela tradução ou transcrição de artigos de outros periódicos cuja clientela não inclua a nossa. Estamos também à sua disposição, na Página do Leitor, para ajudá-lo no esclarecimento de dúvidas de seu dia-a-dia de professor.

Enfim, esperamos sua colaboração. Envie-na urgente!

Em tempo: a partir de Março/88 a sala do GEPEM na USU voltará a ser a 405 — A e o horário de atendimento, das 13h às 17h, somente às 3.as, 4.as e 5.as feiras. Não teremos mais plantão às 2.as e 6.as feiras.

A MATEMÁTICA E A LINGUAGEM

Amélia M.ª Noronha Pessoa de Queiroz

O cotidiano da sala de aula evidencia a compreensão da linguagem matemática como uma das maiores dificuldades do processo ensino-aprendizagem.

A Matemática no ensino fundamental geralmente é introduzida com a preocupação maior de aquisição de habilidades de cálculo, sem considerar que simultaneamente se está introduzindo um novo conceito através de uma linguagem convencional que não faz parte do coloquial da criança ou do adolescente. Tal fato torna difícil definir onde se encontra a maior dificuldade, se na linguagem natural, se na linguagem convencional de que se utiliza o professor, se na adequação dos novos conceitos à fase de desenvolvimento do aluno. Daí dever-se levar em conta, numa análise de processo ensino-aprendizagem, abordar os dois aspectos, buscando localizar os obstáculos a seu bom desenvolvimento e procurar eliminá-los.

"Os efeitos, na escola, das relações entre linguagem e classe social não se restringem à área do ensino da língua materna. Sendo a língua o principal instrumento de ensino e de aprendizagem, na escola, em todas as matérias e em todas as atividades, a compreensão dessas relações e de suas implicações para a comunicação pedagógica é imprescindível a todos os professores e, também, a todos os especialistas que atuam na instituição (...) O bidialetalismo que uma escola transformadora sugere não é, por isso, uma proposta apenas para o ensino da língua materna, mas para todas as atividades escolares em que a língua é o instrumento básico de comunicação — e estas constituem a quase totalidade das escolas (...). No ensino de Geografia (...), da Matemática, a questão lingüística é fundamental, sobretudo em seus aspectos semânticos e nas relações entre linguagens e pensamento, que parece não ocorrerem segundo a mesma lógica, em diferentes classes sociais, com mostra Bernstein." [5]

A Matemática se caracteriza pela utilização de uma linguagem específica que evolui constantemente, na medida em que se exige dela uma maior formalização para seu desenvolvimento.

3.1 **A Matemática e o estilo**

Granger, em seu livro "Filosofia do estilo", faz um brilhante estudo de tal evolução, quando analisa a interdependência da teoria e da prática no processo do conhecimento, através do trabalho entendido como apenas uma das estruturas da prática. Um exame mais cuidadoso mostra talvez que ele é a sua estrutura constitutiva, uma maneira de relacionar, suscitando-os, uma forma e um conteúdo. A prática é a atividade considerada com seu contexto complexo e, em particular, com as condições sociais que lhe dão significação num mundo efetivamente vivido[5], e observa a distinção dos aspectos associados das relações forma-conteúdo, que coexistem em qualquer trabalho, como estruturação e aplicação, dominando ora um, ora outro, constituindo "dois movimentos complementares de determinação prática do individual (...). Determinação prática, aliás, é um pleonasmo; o individual somente pode ser apreendido numa atividade prática" [5], e é o que ele pretende mostrar através de exemplos tomados na obra científica, sobretudo na Matemática. Ele transpõe da arte para a ciência a noção de filosofia do *estilo* — "modalidade de integração do individual num processo concreto que é trabalho e que se apresenta necessariamente em todas as formas de prática"[5] ou, como especifica depois, que não entende estilo como uma modalidade de expressão, mas como "uso de simbolismo; o que diz respeito não apenas à textura deste último, mas também à sua relação com uma experiência que o envolve".[5]

Só se compreende estilo, portanto, tendo uma significação ao relacionar uma linguagem com sua expressão escrita, nascendo do contato das estruturas e de uma situação vivida. Granger propõe a possibilidade de uma estilística geral como reflexão filosófica, enquanto a Ciência, impessoal, não individuada, compreende a construção de modelos abstratos, cujo objeto é estrutural. "Se é verdade que não há ciência puramente especulativa e que todo processo de estruturação está associado a uma atividade prática, o individual aparece necessariamente de início, como o lado negativo das estruturas."[5]

Mostra que há uma pluralidade de modos de estruturação e que uma construção matemática geralmente se apresenta de forma unificada, o que corresponde ao que pensa Bourbaki, na proposta de seu livro "Théorie des Ensembles": "sabe-se hoje que é possível, falando logicamente, fazer derivar toda a Matemática atual de uma fonte única, a Teoria dos Conjuntos. Basta, pois, expor os princípios de uma linguagem formalizada única, indicar como se poderia redigir nesta linguagem a Teoria dos Conjuntos, depois ver como se inserem nesta os diversos ramos da Matemática, na medida em que nossa atenção se voltar para elas."[2]

Granger aponta para o aspecto paradoxal de a Matemática, apresentada como construção de modelos abstratos, poder ser estudada em seu aspecto individuado. Entretanto, ele a considera originalmente a partir da experiência vivida por um indivíduo, que constrói suas estruturas através de seu trabalho.

Considera as redundâncias como resíduos não explorados para se aplicarem as possibilidades de construir várias estruturas a partir da experiência ou as várias modalidades de constituição de uma estrutura por diferentes autores, expressando-se por diferentes estilos entendidos como "uma certa maneira de introduzir os conceitos de uma teoria, de encadeá-los, de unificá-los; de outro lado, como uma certa maneira de delimitar a carga intuitiva na determinação desses conceitos."[5]

Em Matemática, Granger cita como fatos de estilo as diferentes maneiras de apresentar um conceito, integrá-lo num sistema operatório sem atingir ou modificar seu conteúdo estrutural, como exemplo o número complexo, que tem uma pluralidade de maneiras para ser expresso: introduzido como noção trigonométrica; como um operador, se aplicado a vetores (que se compõem numa dilatação e numa rotação); como raízes de uma equação algébrica; intuitivamente, como sua imagem geométrica, representado por coordenadas polares cartesianas ou matrizes.

Modifica-se a orientação do conceito conforme o uso que se pretende fazer dele, sua prática. "O estilo desempenha, pois, um papel talvez essencial, ao mesmo tempo numa dialética do desenvolvimento interno da Matemática e na de suas relações com mundos de objetos mais concretos." [5]

A importância dada à linguagem é primordial, uma vez que "a ciência só pode se constituir num universo simbólico. De modo geral, a linguagem recorta o plano da informação. Fora daí, a prática permanece um processo imediato, mais ou menos imitável, mas não verdadeiramente transmissível, nem suscetível de transformações dirigidas e cumulativas engendrando um eventual progresso (...). A Matemática poderia ser qualificada de ciência por 'construção de linguagem' " [5], não querendo reduzi-la, entretanto, apenas à própria língua matemática, mas mostrando que a criação da linguagem é exterior a seu desenvolvimento, ao mesmo tempo que está ligada ao próprio conteúdo.

Granger coloca a linguagem matemática, assim como a linguagem em geral, constituída através do encontro da linguagem formal (a matemática realizada, como ele diz) com "o sistema dos atos concretos que constituem as relações dos homens entre si e com o mundo." [5]

Mostra, ainda, como a linguagem corrente pode impedir o desenvolvimento da Matemática, como é o caso de estabelecer as propriedades estruturais sem a utilização da linguagem formal. Um exemplo simples seria a operação da adição dos naturais e suas propriedades. Em linguagem corrente, ter-se-ia que dizer: se *a* e *b* representam números naturais quaisquer, chama-se adição a operação que associa o par de números (a,b) à sua soma, o que corresponde a juntar *b* unidades às *a* unidades que se tinha. O resultado encontrado é o número *c*. Para definir uma das propriedades, por exemplo, ter-se-ia que dizer: ao adicionar *b* unidades às *a* unidades, ou as *a* unidades às *b* unidades, encontra-se o mesmo resultado *c*. Na linguagem formal escreveríamos apenas:

$$a,b \in \mathbb{N},\ S: (a,b) \longrightarrow c = a + b,\ a + b = b + a$$

Citaríamos, entre outros, a simplificação obtida com a escrita das equações, somatórios, derivadas, integrais etc...

Observe-se que a construção lingüística matemática busca ser unívoca e veicular combinações de informações que se referem a sua própria estrutura, o que dificilmente seria realizável com a linguagem corrente.

Assim, Granger desenvolve seus estudos sobre a evolução do estilo da Matemática a partir de Euclides que, pretendendo dominar a intuição, estuda o conceito de grandeza, aplicando o conceito de número aos entes geométricos, passando da noção de igualdade das grandezas à sua medida e, finalmente, ao número como operador exterior à grandeza. Granger associa estas situações como topológica, métrica e algébrica, respectivamente, sem, contudo, deixar de advertir que estão apenas num estado muito rudimentar em Euclides.

Granger reduz o problema da compreensão a reconhecer que uma língua (definida por sua gramática e seu léxico) compreende uma seqüência de símbolos; extrair conteúdo informacional de um texto é traduzir, isto é, fazer corresponder um texto de uma língua a outra, mantendo seu sentido. Considerando que, dentro deste quadro, a compreensão evoca tarefas bem determinadas, a definição da gramática de uma língua e suas relações com o léxico, o verdadeiro alcance das relações do sentido com a informação seletiva e a significação e as aplicações de uma estrutura e de um material lingüístico numa outra língua, respectivamente.

É neste ponto que se envereda mais diretamente para a comparação da linguagem matemática com a linguagem corrente.

O progresso da criança, do ponto de vista intelectual, e o progresso da ciência seguem os mesmos passos. Quando Jean Claude Bringuier pergunta a Piaget se este acha que a criança de hoje é menos primitiva que a do homem pré-histórico, ele diz que "há uma aceleração com a civilização e com o meio social que desempenha, aliás, um grande papel, e que a criança de hoje evolui mais rapidamente e que, nos períodos iniciais da ciência, isto é, numa época em que a física era muito pouco elaborada, ou não era o que se tornou depois de Newton, encontram-se na história etapas que correspondem de uma maneira espantosa a etapas que observei na criança." [3] Ele, inclusive, compara as etapas das noções físicas de transmissão de movimento, sob todas as suas formas, com quatro períodos da evolução desta noção na criança:

> Um período aristotélico — de quatro-cinco anos aos onze-doze anos. Ex.: uma bola bate na outra; esta tem também força e as duas forças fazem com que elas continuem andando; "as nuvens se deslocam devagarinho, isto provoca um pouco de vento; se elas vão mais depressa faz mais vento." [3] Esta é a idéia do movimento perpétuo de Aristóteles.
>
> Na segunda etapa, o "motor interno" não desempenha mais um papel; "a força se torna algo de indiferenciado, um poder calcado sobre a ação humana". [3]
>
> E, depois, o terceiro período, o impetus: "só aos sete anos, a criança fala do impacto que uma das bolas do exemplo acima passa às outras bolas, imprimindo-lhes movimento, o impacto atravessa as outras" [3] Só aos onze-doze anos é que fala de aceleração.

Piaget faz, ainda, a comparação com a geometria: numa primeira etapa, as relações espaciais geométricas são "intrafigurais", como o eram para Euclides, que não considerava o espaço entre as figuras; numa segunda etapa, as relações são interfigurais, como acontece nas coordenadas cartesianas: são necessárias duas coordenadas para determinar a posição de um ponto no plano. E, numa terceira etapa, acontece "algebrização da geometria a partir de Klein e seu programa de Erlangem, quando todas as geometrias foram reduzidas a grupos de deslocamento e de transformações. E este foi um mecanismo comum à história das ciências e à psicogênese. (...) O intrafigural corresponde aos elementos e o interfigural é o começo do estabelecimento das relações e da algebrização, é a descoberta das estruturas." [3]

Ao ser indagado sobre como a criança fazia este percurso em tão pouco tempo, enquanto a história da ciência demorara tanto, Piaget responde distinguindo dois planos do conhecimento — o plano da ação e o da "conceitualização", teorização que traduz o que é descoberto pelas ações em termos de conceitos e doutrinas. E a ação precede sempre, em todos os domínios, a tematização e a conceitualização que vem depois. [3] E ele mesmo cita Euclides, que se serviu muito da noção de grupo de deslocamentos, sem ter tomado consciência do conceito, que só foi formalizado por Galois. "Então, com a Álgebra de Viete e com a geometria de Descartes, eu diria que estamos numa fase de tomada de consciência histórica das operações. Operações que Euclides utilizava sem tematizá-las, sem fazer a teoria correspondente (...) mas são as operações de que os gregos já se utilizavam. A ação, aqui, precedeu de muito a tomada de consciência. E, depois, exemplo recente, os Bourbaki fizeram uma teoria admirável das estruturas matemáticas, que se reduziram a três tipos de estruturas: as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas". [3]

A evolução da linguagem matemática permitiu Lobatchevski e Bolyai inventarem uma geometria não euclidiana e Cayley e Grassmann os espaços de mais de três dimensões. Estes fatos contribuiram para a "redução da geometria a uma forma puramente lógica, pois estas geometrias não partem do pressuposto de que seus postulados representem o espaço real e asseveram apenas que, dados estes postulados, tais e tais conseqüências decorrem deles" [6] e isto só foi possível graças à utilização de linguagem formal.

Esta evolução que caracteriza a Matemática é explicada pelo estilo que cada matemático pode imprimir à expressão formalizada de seu pensamento.

3.2 *A linguagem formal da Matemática e a Lingüística*

Uma linguagem formal, pode-se dizer, permitiu a união de várias ciências e suas linguagens específicas.

Frege dizia que as ciências abstratas precisavam cada vez mais de um meio de expressão que permitisse evitar erros de interpretação e impedir os de raciocínio.

A linguagem matemática oferece, além de uma característica mais fina que a das palavras da língua natural, que levam consigo seu sentido usual, uma teoria da dedução enriquecida pelos axiomas e as regras de quantificação." [4]

Claude Imbert, na introdução de "Écrits Logiques et Philosophiques de Gottlob Frege, constata que a língua comum confunde as relações de inferência e as de coordenação, um mesmo termo, às vezes acumulando as duas funções, como é o exemplo de "ora", que pode ser classificada como conjunção coordenada e, na Matemática, exprime uma etapa da dedução; o que mostra que a sintaxe dos gramáticos não serve para descrever as relações lógicas.

Comentando as diferentes interpretações da linguagem, diz: "Vê-se aqui o fosso que separa os psicólogos lógicos do matemático. O primeiro se interessa pelo sentido das palavras e pelas representações (que não distingue do sentido), enquanto o segundo se interessa pela própria coisa, pela denotação das palavras." [4]

Apesar da pretensa univocidade e clareza da linguagem matemática, Frege diz que "o signo de uma função não está saturado, precisa ser completado por um signo numérico, que é chamado signo de argumento." [4] Mostra como a forma de escrever a derivada $\frac{d \cos x/2}{dx} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ é errada, pois x marca mais o lugar do argumento que a expressão da generalidade, pois se fizéssemos a substituição de x por um "signo" numérico, escreveríamos (d cos2/2)/d2, o que não tem sentido, pois não saberíamos dizer se se trata de cos( )/2, cos(2)/( ), ou cos( )/( ), o que leva a uma forma de escrever mais complexa: $\left(\frac{d \cos x/2}{dx}\right)_{x=2}$ [4]

Com este fato, exemplifica a diferença fundamental entre as funções e os números, mostrando, inclusive, o erro cometido ao escrever uma função como $y = f(x)$, pois não só se confunde a função com seu valor para certo argumento, como também traduz-se o signo de igualdade pela cópula.

Frege já preconizava o trabalho do grupo N. Bourbaki, ao dizer que "a Matemática deveria ser, na verdade, um modelo de clareza lógica (...) É por isso que é extremamente importante elaborar uma linguagem matemática, que alie a uma extrema precisão a maior concisão possível: a ideografia será o instrumento mais adaptado a este fim: um conjunto de regras pelas quais pode-se exprimir imediatamente os pensamentos por meio de signos escritos ou impressos sem a mediação do som." [4]

N. Bourbaki, comentando que, desde o tempo dos gregos, quem fala de Matemática fala de demonstração, diz que "a análise do mecanismo de demonstrações nos textos matemáticos bem escolhidos permitiu destacar sua estrutura, sob o duplo aspecto do vocabulário e da sintaxe. Chega-se assim à conclusão de que um texto matemático suficientemente explícito poderia ser expresso numa linguagem convencional, comportando apenas um pequeno número de palavras invariáveis justapostas, seguindo uma sintaxe que consistiria num pequeno número de regras invioláveis: um tal texto é dito formalizado." [2] Ele comenta que um texto não formalizado pode levar a raciocínios errados, ao uso abusivo da intuição. Entretanto, o matemático geralmente formaliza um texto só até o ponto em que continuar seria levar o rigor ao exagero, sendo o método axiomático a arte de redigir textos de formalização simples, observadas as regras de sintaxe.

O autor mostra como um mesmo texto, um cálculo algébrico, por exemplo, pode ser aplicado a diferentes situações problema, seja de pesos, dinheiro, movimentos uniformemente acelerados e outros. Esta importância pode ser comparada com a que G. Granger chama de estilo, dando como exemplo o caso dos números complexos e seus diversos enfoques, conforme já foi dito anteriormente.

Dizendo que, assim como a arte de falar corretamente uma língua preexiste a uma gramática, o método axiomático foi praticado antes de haver linguagens formalizadas, o que pode ser comparado com o exemplo que Granger dá ao falar dos Elementos de Euclides, quando este já prenunciava as noções de ordem topológica e algébrica sem, entretanto, tê-las explicitado através de maior formalização. Encontramos, ainda, uma certa analogia com o pensamento de Martinet: "o estudo da escrita constitui disciplina distinta da lingüística e, por isso, o lingüista se abstrai, em princípio, da grafia." [9]

A esse respeito Ivins, em seu livro Art & Geometry, comenta que as traduções literais dos textos matemáticos gregos se ressentem da falta de uma terminologia e sistema de notação simbólica, fato que atribui a não terem podido avançar mais em suas teorias.

Bourbaki faz questão de ressaltar que a prática consciente do método axiomático tem que se fundamentar sobre os conhecimentos dos princípios gerais das linguagens formalizadas e suas relações com os textos matemáticos correntes.

Ao descrever a matemática formal, Bourbaki define os termos e relações, que bem podem ser relacionados aos termos de lingüística num recorte do objetivo deste trabalho. Estabelece os signos de uma teoria matemática: os signos lógicos τ, $\square$, v, $\neg$; as letras são signos específicos, que dependem da teoria considerada, por exemplo: $=$, ε. "Um grupamento de τ seria uma sucessão de signos de τ escritos uns ao lado dos outros, alguns deles distintos das letras, podendo ser ligados por traços passando por cima da linha e que são chamados ligações, como, por exemplo,

$$\tau \vee \neg \in \square A' \in \square A \text{ ''}$$

Este tipo de escrita, contudo, levaria a dificuldades tipográficas e mentais muito grandes, o que levou o grupo a misturar os símbolos matemáticos à linguagem corrente. Tal recurso é usado com freqüência nos níveis mais elementares do ensino da Matemática.

Bourbaki aceita a Teoria Matemática como "compreendendo regras que permitem dizer que alguns agrupamentos de signos são termos ou relações desta teoria, e outras regras que permitem dizer que certos agrupamentos são teoremas desta teoria." [2]

Os termos seriam agrupamentos que representam objetos e as relações representando asserções que podem ser feitas em relação aos objetos. Assim, os símbolos $\emptyset$, IN, a reta numérica, fog são termos e "todo corpo finito e comutativo" é uma relação, enquanto '3 e 4' não constituem nem termo nem relação.

G. Polya diz que "a notação matemática aparece como um tipo de linguagem, 'une langue bien faite', uma linguagem bem adaptada a seu propósito, concisa e precisa, com regras que, diferentemente das regras da gramática, não têm exceção." [11]

Encontram-se várias analogias entre os pontos de vista desses autores e alguns lingüistas.

Jakobson afirma que "o nível cognitivo da linguagem não admite, mas exige a interpretação por meio de outros códigos, a recodificação, isto é, a tradução" [7], o que corresponderia aos estabelecimentos dos signos e agrupamentos de uma teoria matemática de que fala Bourbaki, o que corresponde, ainda, ao caráter da linguagem definido por Jakobson: "falar implica a seleção de certas entidades lingüísticas e sua combinação em unidades lingüísticas de mais alto grau de complexidade (...); quem fala seleciona palavras e as combina em frases de acordo com o sistema sintático da língua que utiliza; as frases, por sua vez, são combinadas em enunciados (...); a seleção (exceto nos casos raros de efetivo neologismo) deve ser feita a partir do repertório lexical que ele próprio e o destinatário possuem em comum (...). Assim, para ser eficiente, o ato da fala exige o uso de um código comum por seus participantes." [7]

Talvez se possa situar aí um dos problemas dos estudantes com a linguagem matemática — o código é dominado apenas por um dos interlocutores, o professor, que não averigua se o outro interlocutor, o aluno, conhece o código para que possa dominá-lo e trabalhar com ele eficientemente. A própria seleção dos termos para expressar qualquer conceito exige também dele um "repertório lexical", que nem sempre ele possui.

Pelas funções definidas por Jakobson, a Matemática compreende apenas a função referencial, pois se concentra em conteúdos de natureza intelectual, sem buscar atuar sobre outrem, nem modificar seu comportamento. A função metalingüística está além dos limites deste trabalho e, por isso, não se tratará dela aqui.

Quanto aos aspectos da sintaxe a que nos remete Bourbaki, pode-se, em termos lingüísticos, associar ao que Martinet chama de primeira articulação da linguagem: "pela primeira articulação da linguagem, as experiências a transmitir, as necessidades que se pretende revelar a outrem, analisam-se numa série de unidades, cada uma delas possuidora de uma forma vocal e de um sentido (...) alguns milhares de unidades do tipo *tenho, dor, cabeça, de,* umas com largas possibilidades combinatórias, permitem-nos comunicar mais coisas do que vários milhões de gritos inarticulados diferentes" e "cada língua articula a seu modo enunciados e significantes".[8]

No que se refere à segunda articulação, Martinet apresenta o exemplo dos números de telefone, em que os algarismos correspondem a unidades significativas distintivas: 225 3143, unidade significativa é o telefone de Maria Costa, enquanto 325 3143 é o de João da Silva. Distingue-o do caso dos números 213 e 12, unidades significativas distintas em que o 2, além de unidade distintiva, também é significativa. "Nosso sistema de notação de números apresenta um grau de abstração e de condensação que não se poderia esperar de sistemas menos conscientemente elaborados como os sistemas lingüísticos."[9]

Martinet considera os sistemas numéricos que precederam o nosso, como o romano, mais próximos dos sistemas lingüísticos, pois as unidades significativas se distinguem por uma certa disposição das unidades distintivas; mostra que a quantidade correspondente a um dado número interessa como um todo e não como uma articulação diferente: passa-se o número 618 para algarismos romanos sem deixar resíduos, o que não acontece com a comunicação lingüística.

A linguagem matemática, pode-se afirmar, busca utilizar signos semanticamente estáveis e sintaxe bem definida, sem exceções. Por exemplo, $y = 2x + 3$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; definem-se os valores possíveis de x e y e a combinação entre eles: multiplicar x por 2 e somar 3; o valor desta operação é o valor de y.

Quanto ao aspecto da comunicação, a Matemática procura emitir sua mensagem de forma a ser percebida univocamente. O próprio Jakobson, baseando-se em Pierce, considera mais perfeitos os signos nos quais os caracteres icônico, indicativo e simbólico estão "amalgamados em proporções tão iguais quanto possível"[7], colocando entre os ícones os diagramas (por exemplo, barras de gráficos estatísticos), em que a semelhança entre o significado e o significante concerne apenas às relações entre suas partes: "num diagrama típico, como as curvas estatísticas, o significante apresenta com o significado uma analogia icônica no que concerne às relações no seio do significado"[7](...). "O exame crítico de diferentes conjuntos de diagramas o conduz ao reconhecimento de que toda equação algébrica é um ícone, na medida em que torna perceptíveis, por meio de signos algébricos (os quais não são, por si mesmos, ícones), as relações existentes entre as quantidades visadas. Toda fórmula algébrica aparece como um ícone, e aquilo que a torna tal são as regras de comutatividade, de associação e de distribuição dos símbolos. É assim que a Álgebra não é outra coisa senão uma espécie de diagrama" (...).[7]

Assim como na Matemática há necessidade da seleção dos termos e relações para um texto demonstrativo, em lingüística, Martinet diz que "qualquer descrição supõe uma seleção: por muito simples que pareça à primeira vista, qualquer objeto é suscetível de se revelar infinitamente complexo (...). Qualquer descrição será aceitável se for coerente, isto é, se basear num ponto de vista determinado. Uma vez adotado tal ponto de vista, reter-se-ão certos traços, ditos pertinentes, enquanto se afastarão outros por não pertinentes (...). Toda ciência pressupõe a escolha de um ponto de vista próprio: em aritmética são os números os pertinentes, em geometria, as formas." [8]

O mesmo processo se dá para a solução de problemas em Matemática, onde há necessidade de compreender o problema escrito em linguagem corrente, identificar os fatos conhecidos — os dados (ou os elementos pertinentes à solução), os fatos desconhecidos — a serem revelados, as incógnitas, para, através da escolha de um ponto de vista, encadear conceitos já adquiridos que se aplicam ao caso em estudo para chegar à solução.

Polya descreve quatro etapas para a solução de um problema: primeiro, compreender o problema, depois ver como os ítens são conectados, ou seja, como a incógnita se liga aos dados, para planejar a possível solução; em terceiro lugar, executar o plano, finalmente rever toda a solução e discuti-la.

Ora, não é este o mesmo processo para fazer uma redação, analisar um texto?

M. Adler e C. Van Doren, ao tratar da leitura analítica de um livro, estabelecem como regras: 1) "É preciso saber que tipo de livro você está lendo e sabê-lo o mais cedo possível, de preferência antes de começar a ler." Ora, em Matemática, antes de resolver um problema, deve-se saber de que tipo de problema se está tratando; regra 2) "enuncie a unidade do livro todo numa única frase ou no máximo numas poucas frases". Em Matemática, deve-se resumir o problema em sentenças matemáticas concisas; regra 3) "descreva as partes principais do livro e mostre como se organizam num todo, por estarem harmonizadas entre si e com a unidade do todo". Ao resolver um problema, deve-se organizar as várias sentenças matemáticas de modo que seu encadeamento leve à solução do problema"; regra 4) "descubra quais eram os problemas do autor". Na solução de um problema, deve-se perguntar qual ou quais são as incógnitas; regra 5) "descubra as palavras importantes e através delas chegue a um acordo com o autor"; regra 6) "assinale os períodos mais importantes de um livro e descubra as proposições que ele contém"; regra 7) "localize ou estabeleça os argumentos básicos do livro descobrindo-os na conexão dos períodos." Estas três regras poderiam ser ligadas em Matemática numa única referente à descoberta das possíveis sentenças matemáticas, aí incluídos os valores conhecidos e as incógnitas, que permitam ligar as sentenças enunciadas à possível solução do problema proposto.

Ainda comparando as linguagens, Martinet diz que "a função essencial do *instrumento*, que é a língua, reside na comunicação (...); (a linguagem) serve, por assim dizer, de suporte ao pensamento, e tanto que podemos até perguntar se mereceria o nome de pensamento uma atividade mental que não se exercesse no âmbito de uma língua (...); em última análise, é realmente na comunicação, isto é, na compreensão mútua, que temos de reconhecer a função central do instrumento que é a língua (...). Na realidade, cada língua organiza à sua maneira os dados da experiência; e, por isso, *aprender uma língua* nova (o grifo é nosso) não consiste em colocar novos rótulos em coisas conhecidas, mas sim em nos habituarmos a analisar de outro modo os objetos das comunicações lingüísticas." [8]

Aí poderia situar-se um dos problemas de compreensão da Matemática, que se referem ao campo psicolingüístico, o qual "tem por objeto o estudo específico do processo de codicicação e decodificação, tendo em conta as características próprias aos sujeitos humanos que trocam mensagens. A codificação e a decodificação são estudadas enquanto processos que colocam em relação o estado de uma mensagem com o estado dos interlocutores"[10], e não será aqui estudado.

Ao comparar a linguagem matemática e a lingüística convém mencionar, o aspecto da "economia".

Martinet, ao falar das articulações da linguagem, mostra a economia que representa a possibilidade combinatória tanto das unidades distintivas como das significativas. Na linguagem corrente realiza-se a escolha geralmente sobre experiências vividas. Na Matemática, esta economia, além de ser muito maior, a seleção de "monemas" não se dá sobre uma experiência vivida. Para expressar: "considerando os números reais x e y, sabe-se que o triplo do quadrado de x, mais seu sêxtuplo, mais 3 é igual a y", escreve-se apenas $x, y \in \mathbb{R}, y = 3x^2 + 6x + 3$. Isto é passado para o aluno sem considerar o grande salto que se está dando para a formalização. Ao se pedir para o aluno fazer a representação gráfica desta relação, que deveria ser um ícone, deixa de sê-lo porque o professor raramente apresenta uma situação que corresponda a ela.

3.3. Algumas analogias entre a aquisição da linguagem escrita e a aprendizagem da Matemática

Não se pode deixar de mencionar alguns estudos com referência à alfabetização que, aplicados à Matemática, enquanto linguagem, bem como a outras disciplinas, podem explicar muitas das dificuldades dos alunos.

J. Beauvais, M. Vial e E. Plaisance, responsáveis pelo Centre National de Pédagogie Spéciale de Beaumont, fizeram uma análise de crianças que apresentavam problemas na escola, criticando as idéias dos que se referem às crianças como deficientes, sem se preocuparem com os problemas ocorridos no processo ensino-aprendizagem na escola, onde geralmente são detectados os chamados "deficientes mentais" ou "alunos especiais" ou "excepcionais".

Monique Vial, baseando-se nos estudos de Piaget, diz que, se como o quer Piaget, as estruturas intelectuais são as formas de organização da experiência, sendo os esquemas de ação as principais fontes dos conceitos, é aí que se deve buscar a explicação das particularidades, as características do desenvolvimento intelectual dos deficientes: submissão tardia aos dados atuais da percepção, dificuldade em passar da percepção correta dos traços distintos dos objetos às abstrações e generalizações por meio da linguagem, dificuldade em estabelecer relações lógicas e constituir sistemas operatórios, fragilidade destes sistemas.

Numa caracterização da deficiência mental, definida por M. Vial como "um atraso no desenvolvimento das funções intelecutais ou uma inferioridade da eficiência neste domínio", a autora considera as estruturas cognitivas. Neste aspecto defende que os deficientes tem déficit de suas funções cognitivas, dos mecanismos intelectuais e da organização estrutural do pensamento; apóiam seus juízos sobre a mudança perceptiva que observam e não sobre a natureza das transformações operadas, observando-se oscilações patológicas em seu raciocínio, de um estágio a outro, sem uma seqüência.

Comenta que B. Inhelder encontrou entre os deficientes mentais, o desenvolvimento até o estágio das operações concretas.

Além deste aspecto, considera outros, entre os quais o da linguagem: "os retardos e os distúrbios da linguagem se encontram de forma constante na descrição dos deficientes intelectuais (...), são mal-falantes (...), a linguagem é pobre, mal utilizada, a sintaxe defeituosa e o discurso mal organizado, o nível global insuficiente (...). Citando Garron e outros, diz que a linguagem deles não desempenha seu papel, seja de comunicação, seja de descrição do pensamento.

Tal caracterização é importante para a consideração de possíveis obstáculos ao desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. B. Bettelheim e K. Zelan e se dedicaram ao estudo deste problema em relação à alfabetização.

Denunciaram as teses que atribuem os problemas de leitura, escrita e fala a distúrbios neurológicos ou psicológicos, baseados em ponto de vista do adulto, que lida com a criança e não os da própria criança, mencionando que a pesquisa tem abordado predominantemente estudos de determinantes físicos, tais como distúrbios visuais, auditivos e neurológicos, sem considerar que o significado subjetivo modifica o significado objetivo dos textos lidos pelas crianças, quando não lhes interessam. Basearam seus estudos no tratamento de crianças desajustadas na Orthogenic School da Universidade de Chicago, buscando descobrir as contribuições que a psicanálise poderia fornecer para auxiliar na alfabetização.

Verificaram ser mais fácil alfabetizar crianças que percebam que o texto a ser lido é uma experiência digna de valor, que entendem que estão "lendo alguma coisa que acrescente à minha vida" [1] e não uma leitura vazia de sentido a que devem atribuir o valor extrínseco de poder decodificar algumas palavras. Os referidos autores citam, inclusive Huey, que escreveu o primeiro importante tratado sobre leitura nos Estados Unidos, dizendo que a leitura nunca deve ter como objetivo a própria leitura, por amor a ela, mas que deve estar ligada ao interesse intrínseco da criança.

Citam, também, Sara Zinet, que diz precisar ser deslocada a ênfase da leitura do aprender a ler para a "leitura com algum significado enquanto se aprende a ler" [1], senão deixa de ter sentido sua decodificação.

Em Matemática, assim como na leitura, o professor precisa tomar cuidado para não se preocupar com as habilidades básicas de cálculo em detrimento da compreensão da função dos símbolos com que a criança ou o adolescente está trabalhando. B. Bettleheim e Zelan citam o caso do japonês, como linguagem que se expressa na escrita por pictogramas, que são ensinados com ênfase em seu significado e não nas suas características gráficas, o que justifica a facilidade que a criança japonesa tem para compreender textos bem mais complexos que a das línguas que se utilizam de letras para comporem as palavras.

Outra colocação importante que fazem e que pode explicar um dos problemas de aprendizagem da Matemática, referente à linguagem, é que "quanto menos sofisticado intelectualmente for o leitor, menos acostumado estará a compreender assuntos que dependem de raciocínio abstrato, e mais inclinado estará a ser influenciado por suas preocupações dominantes ou humor momentâneo." [1]

A atitude negativa da criança em relação à leitura é apontada, entre outras causas, como conseqüência do desinteresse dos pais, mas dizem que isto pode ser resolvido conforme a maneira de a escola lidar com o problema. Ora, em relação à Matemática, sabe-se que os próprios professores têm uma atitude negativa em relação a ela, como se pode citar a pesquisa Binômio Professor-aluno, realizada pelo GEPEM, em que 48% das professoras primárias das escolas declararam não gostar de Matemática, alegando, sobretudo, a dificuldade que tinham nesta matéria. 45% dos professores atribuíram a alunos os problemas da dificuldade no bom desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem: raciocínio lento, falta de interesse, falta de concentração, preguiça mental, se bem que 23% tenham reconhecido que o professor influencia por não motivar os alunos, não ser capaz de mostrar a utilidade prática do que ensina, ter dificuldade de comunicação, não compreender bem a matéria que ensina.

Outro ponto abordado por B. Bettlehein e K. Zelan é o professor se preocupar mais com o acerto na leitura das palavras em detrimento da compreensão do texto.

Dizem que é importante levar em conta o modo de o inconsciente do leitor envolver-se com o texto, buscar o motivo que o levou a envolver-se com ele, tornando-o atraente. Além disso, recomendam que se preste atenção para o significado dos erros cometidos, que podem trazer muita luz para o modo de compreensão do aluno. Esta advertência foi levada em conta na bateria dos Chelsea Diagnostic Mathematics Tests usada neste trabalho.

Bettleheim e Zelan fazem referência ao aprendizado da Matemática: "ensinar habilidades básicas de Matemática é útil; são ensinadas a todas as crianças. Apesar de sua utilidade, entretanto, a maioria das crianças fracassa ao adquirir o mínimo de conhecimento superficial necessário para atingi-lo. Isto porque, com a ênfase dada à praticidade das habilidades rudimentares de cálculo, nada na maneira de as crianças aprenderem Matemática as tornou cientes do fascinante mundo dos números, ou de como a Matemática oferece a chave para uma compreensão mais profunda do mundo. Somente as poucas crianças que, por alguma razão especial, tornaram-se suficientemente fascinadas e penetraram além do uso prático compreendem realmente de que trata a Matemática. Não sei se este conceito mais elevado e verdadeiro da Matemática está potencialmente ao alcance de todos, mas não há dúvida de que ele poderia ficar ao alcance de um número muito maior de alunos, caso não se acentuasse que o principal mérito da Matemática está em sua aplicação prática." [1] Esta conotação raramente se encontra na prática pedagógica, em que os alunos estão constantemente a perguntar "para que serve isto?", ou a dizer "não vejo porque tenho que estudar isto, se não servirá para nada..."

Não se pode deixar de lado, também, a importância da natureza dos relacionamentos da criança com as pessoas emocionalmente significativas para ela, o que explica a modificação da atitude de alguns alunos em relação a algumas disciplinas do currículo, conforme o maior ou menor envolvimento com o professor. Sua aprovação ou desaprovação podem motivá-lo ou desmotivá-lo para a aprendizagem. Um outro aspecto muito relacionado com a Matemática é a comparação feita entre a linguagem falada e a escrita. "Como falante, a criança é bem capaz de dizer ou não o que acha apropriado, pois os pensamentos que ordenam a sua fala vêm apenas dela, ou, pelo menos, são concebidos por sua personalidade quando reage ao mundo exterior. Quando lê alto, porém, deve falar os pensamentos de outra pessoa — idéias que não se coadunam necessariamente com seus sentimentos ou pensamentos. Além disso, os textos de leitura básicos geralmente são tão vazios que não faz a menor diferença para a criança entender o que expressam." [1]

Ora, se isso se refere à linguagem corrente, com a qual a criança lida desde seus primeiros anos de vida, pode-se transferir à situação do aprendizado da Matemática, que geralmente acontece pelo sétimo ano de vida, sem que o professor atente para o fato de que, além de conceitos novos, expressa-os através de linguagem desconhecida ou muito pouco trabalhada pelos alunos.

As observações aqui apresentadas não pretendem sugerir que o professor se torne um psicólogo, psicanalista ou professor de Português, mas que tenha informação suficiente sobre os processos internos da aprendizagem e possíveis obstáculos, buscando favorecer o desenvolvimento das faculdades cognitivas dos alunos para uma melhor atuação no mundo.

Bibliografia

1) Bettelheim e Zelan, K. — On Learning to Read: the child's fascination with meaning. NY, Alfred A. Knopf, 1982.
2) Bourbaki, N — Théorie des Ensembles. Paris, Hermann, 1970.
3) Bringuier, J.C. — Conversations Libres avec Jean Piaget • Paris, Robert Laffont, 1977.
4) Frege, G — Ecrits Logiques et Philosophiques • Trad. de Claude Imbert. Paris, Edit., du Sevil, 1971.
5) Granger, G.G. — Filosofia do Estilo. SP, Perspectiva/ EDUSP, 1974.
6) Ivins, W.M., Jr. — Art of Geometry • NY, Douve Publication, 1964.
7) Jakobson, R — Lingüística e Comunicação. Trad. de I. Blikstein e J.P. Reis. SP, Cultrix, 1969
8) Martinet, A. — Elementos de Lingüística Geral • Paris, PUF, 1968
9) Martinet, A. — A Lingüística Sincrônica. Paris, PUF, 1968
10) Peterfalvi, J.M. — Introduction à la Psycholinguistique • Paris, PUF, 1970
11) Polya — How to solve it? • Princeton University Press, 1973.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Radiwal Alves Pereira

Nos dias 28/05/87 e 25/06/87, como atividade de rotina do GEPEM, foram realizadas duas palestras, sob o título "Resolução de Problemas", pelo Professor Radiwal Alves Pereira. Um pouco mais de três meses depois, este artigo foi escrito de memória, o que talvez tenha modificado um tanto aquilo que fôra anteriormente dito, porém tendo em conta aquilo que o professor pensa que deveria ter dito. A forma escrita das palestras deste artigo difere certamente da sua forma falada, uma vez que o professor deu às palestras uma forma bastante coloquial, aproximando-se da amistosa e da gentil participação dos companheiros, que, com sua presença, prestigiaram a atividade.

O homem muitas vezes defronta-se com problemas que deve resolver, que podem ocorrer na sua vida familiar, na vida profissional, na interação com os outros homens, na tomada de decisões cruciais que se lhe apresentam. De modo geral, na Ciência, são os problemas que desafiam a capacidade do homem, o estímulo que permite e acelera o desenvolvimento da Ciência. Nas guerras entre nações, muitas vezes são equacionados e resolvidos problemas importantes, que dão a vitória àquela nação mais capaz científica e tecnologicamente.

A Matemática, desde os seus primórdios, através dos problemas próprios que foram surgindo, tem conseguido alcançar um nível jamais suspeitado pelos primevos. O Papiro Rhind, escrito há cerca de quatro milênios, já mostra o interesse dos egípcios em resolver seus próprios problemas. Os elementos de Euclides, com pouco mais de dois milênios de existência, já mostram problemas cujo interesse específico seria o desenvolvimento da própria Matemática. Com o decorrer dos tempos, principalmente a partir da Idade Moderna, problemas diversos têm permitido a criação de novas áreas de estudos em Matemática. Hoje, nas revistas específicas, na tentativa de resolver problemas específicos, são publicados mais de 200.000 artigos anualmente, embora, no dizer de Halmos, talvez apenas uma dúzia deles tenha real importância para o desenvolvimento da Matemática.

De importância não menor tem sido o uso adequado, em sala-de-aula, de problemas deflagradores do interesse dos alunos no aprendizado de Matemática.

Em julho de 1900, no limiar do século XX, em Paris, foi realizado o Segundo Congresso Internacional de Matemáticos. Nesse Congresso, Hilbert apresentou os seus 23 célebres problemas em aberto, os quais, acreditava-se então, deveriam orientar as pesquisas em Matemática no século XX. A maioria dessas 23 conjecturas já tem resposta, embora algumas tenham sido negativas. Por exemplo, o sétimo problema: "Se a e b são números algébricos, $a \neq 0$, $a \neq 1$ e b não-racional, então a^b será algébrico?" foi resolvido em 1934, quando o soviético Gelfond provou que a^b é um número transcendente, isto é, não algébrico. Um outro problema de Hilbert: "Existe algum conjunto com potência intermediária entre a dos números naturais e a dos reais?" ainda não tem resposta conclusiva. Entretanto, em 1938, o lógico Godel, usando como axioma a forma do problema: "O número cardinal do conjunto dos reais é o menor cardinal maior que o dos números naturais" conseguiu provar que existe uma resposta negativa à pergunta de Hilbert com a axiomática existente para a teoria dos conjuntos. Em 1963, o matemático Paul Cohen mostrou não haver contradição entre a negação do axioma de Godel e os fundamentos da referida teoria dos conjuntos. Logo, o problema continua em aberto, lembrando bastante o que já ocorrera na geometria com a negação do Postulado das Paralelas de Euclides.

Em 1944, George Polya, professor da Universidade de Stanford, escreveu o livro "How to Solv It", que se tornaria um clássico em resolução de problemas. Em 1975 foi o livro traduzido pelo professor Heitor Coelho Lisboa, da Escola de Engenharia da UFRJ. É um livro que deveria ser lido e relido por todo professor de Matemática. Polya teve o mérito de reviver o método heurístico, já um tanto esquecido neste século, lembrando os comentários de Pappus sobre um capítulo de "Os Elementos", que teria sido elaborado por Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo. A RPM da SBM, no seu número 7, publicou uma tradução de um artigo escrito por Polya pouco antes de sua morte, em 1985. É notável verificar que o autor, então quase centenário, continuava com o mesmo entusiasmo que lhe marcara a vida. Polya continuamente lembra aos seus leitores as quatro fases que existem na resolução de qualquer problema: i) compreensão do problema; ii) conexão entre os dados e as incógnitas e, eventualmente, uma estratégia para a sua solução; iii) execução do plano de resolução; iv) verificação da solução. Essas quatro fases sempre existem, embora algumas vezes não estejam muito aparentes no problema em resolução, sejam os problemas "de calcular" ou "de provar", no dizer do autor. Muitos exemplos de problemas do livro são apresentados através de diálogo entre professor e aluno. É enfatizado que a ajuda eventual do professor ao aluno não deve ser excessiva, apenas a necessária para que o aluno não desanime, quase sempre sob forma de perguntas que lhe despertem o raciocínio; a ação deve ser exercida sobre o *interior* do aluno e nunca dizendo-lhe especificamente o que fazer. É sugerida às vezes a resolução de um problema auxiliar ou de um problema relacionado que permita atingír-se a solução do problema principal em estudo. Um vocabulário de termos usados em Heurística é parte integrante do livro.

Vamos considerar o problema: "Dado o quadrilátero convexo ABCD, são prolongados os seus lados como se vê na figura e de modo que AB = BB', BC = CC', CD = DD' e DA = AA'. Se a área de ABCD é s, determine a área do quadrilátero A'B'C'D'."