E para 100 objetos de cada lado, perguntei. Depois de algum tempo alguns responderam:

– 10200

– Por que?

Recebi duas respostas traduzidas em símbolos como $N(N+2)$ e $(N+1)^2 - 1$ e antes que desse conta começaram a discutir qual seria a boa, e deixei-os discutir até que se deram conta de que dava na mesma.

Depois disso, do mesmo modo que nos problemas anteriores, fiz uma recapitulação do que havíamos feito.

Partimos de um jogo com certo grau de dificuldade, o suficiente para que depois de resolvê-lo esquecesse a resposta. Daí se chegou à necessidade de escrever a resposta, para a qual havia necessidade de se inventar uma forma de escrevê-la, inventar uma "linguagem"; mostrei-lhes como, sem se darem conta, tinham inventado uma forma de escrever o problema, tinham inventado nomes para os objetos, para os lugares, flechas em vez de "passa para" etc.

De todas as linguagens – talvez fosse mais apropriado dizer de todas as "taquigrafias" – que inventaram escolhemos uma para escrever no quadro, talvez a mais clara, ou mais cômoda, porém não, por isso, menos criativa.

Falei da arbitrariedade das linguagens e dos símbolos e como, por uma espécie de "seleção natural" se vão eliminando as mais complexas, as menos claras, as incompletas, e vão ficando as linguagens ou formas de escrever que com o tempo são aceitas universalmente. (Por exemplo números arábicos em contraposição a outros sistemas de numeração como o romano).

Logo passei a analisar a outra parte do problema:

Por um método direto, experimental, havíamos encontrado quantos passos eram necessários para passar 1,2,3,4 e 5 objetos de um lado para o outro, e a partir daí e de analisar os cinco primeiros casos havíamos enunciado uma regra. Generalizamos as regras de comportamento depois de descobri-las em um pequeno número de casos.

Insisti em que havíamos generalizado uma regra sem ter verificado na prática se o problema seguiria se comportando da mesma forma.

Aqui fiz um parêntesis para dar um exemplo típico em que parece que se descobre uma fórmula que funciona para vários casos mas que não vale em geral.

Voltando ao problema, quando lhes perguntei o que aconteceria se fossem 100 objetos de cada lado, a fórmula de encontrar o número não foi encontrando todos os anteriores; havíamos avançado mais, já que dos 5 primeiros "experimentados" havíamos encontrado uma fórmula geral. Essa fórmula era válida para os 10 primeiros casos, porém não tínhamos certeza alguma – menos ainda que antes – de que o problema prosseguiria cumprindo essa regra para números grandes. Até o momento, nosso único critério, na realidade, era a comprovação prática, que pode se tornar muito complicada para números grandes. Necessitávamos de outro "critério de verdade", válido para qualquer número. Necessitávamos de uma demonstração. Para isso não é suficiente analisar os primeiros casos, tem-se que analisar o próprio problema, suas regras, seus invariantes. Vejamos:

Para o caso N,
i) Há 2N objetos e um lugar vazio.
ii) Para chegar, da posição original à final, cada objeto deve avançar N + 1 lugares.
iii) Cada objeto deve cruzar com os N objetos do outro lado.
iv) Em cada cruzamento se economiza um passo.

Primeiro notamos que essas "frases" se cumprem para todo N, então 2N objetos devem avançar N + 1 casas cada um, ou seja 2N (N + 1) passos; e como cada objeto de um lado se cruza com os N do outro, no total os N objetos de um lado se cruzam N x N vezes com os do outro, ou seja, economizam N^2 passos e, portanto, o número de passos é $2N(N + 1) - N^2$.

Desenvolvendo essa última chegamos às fórmulas que já havíamos obtido antes.

Então chamei a atenção para a diferença entre os dois métodos usados. Em um partimos da observação, da experimentação e descobrimos, induzimos certas regras que podemos colocar como hipóteses do comportamento geral do problema; sem dúvida, para poder assegurar que o fenômeno sempre se comporta assim, é necessário analisar mais profundamente o próprio problema, encontrar os invariantes (os axiomas?) e a partir daí deduzir a fórmula do seu comportamento.

Finalmente, terminei falando-lhes sobre o método indutivo e o método dedutivo.

UMA EXPERIÊNCIA EM UM CURSO DE ÁLGEBRA SUPERIOR

Julieta Verduco Diaz
Grupo de Enseñanza de las Matematicas
Faculdad de Ciencias UNAM – Mexico, 04510
Trad. de Moema Sá Carvalho

O curso se destina a estudantes universitários do primeiro ano de Matemática e Física (idade de 17 anos em diante).

O programa padrão em nossa escola é:

I. Primeiro Semestre: 1 - Análise Combinatória e Indução Matemática
2 - Espaços Vetoriais e Sistemas de Equações Lineares

II. Segundo Semestre: 1 - Divisibilidade e Congruências
2 - Polinômios e Equações

O objetivo do curso é cobrir os temas, procurando fazer com que os estudantes trabalhem por eles mesmos em problemas concretos, sem exposição prévia da teoria, de maneira a que encontrem as suas próprias soluções. Procurar que a teoria surja naturalmente desses problemas e suas soluções; mostrar aplicações dessas teorias em campos diversos; insistir na conveniência de representações gráficas, geométricas ou com desenhos nas soluções de problemas; procurar discutir aspectos das soluções históricas reais dadas a alguns problemas, as relações entre o desenvolvimento da Matemática e o da Sociedade, o uso da ciência em nossa sociedade etc.

Como sempre as limitações do tempo não nos permitem fazer tudo isso tão minuciosamente como queríamos. Como um exemplo do que fazemos em classe, citaremos um problema que se apresentou aos alunos no primeiro dia de aula. No início não se deu teoria alguma, só se apresentou o problema de modo a que extraíssem elementos de onde quizessem para encontrar o resultado. Foi-lhes dado o tempo de que necessitassem, foram convidados a participar e dar suas razões, a discutir entre seus companheiros na dinâmica do próprio grupo dependendo de seus conhecimentos prévios.

Primeira Aula:

Torneio de Ping-Pong.

Uma vez que já estejam inscritos todos os participantes no jogo, fazem-se rodadas eliminatórias e as partidas se jogam por sorteio com dois jogadores cada partida; se o número de jogadores inscritos for ímpar, o jogador que sobra, por sorteio, passa à rodada seguinte, grátis, sem jogar. Todos os que ganham na primeira rodada passam à seguinte e assim sucessivamente até que reste um só vencedor.

Sabendo o número de jogadores inscritos, quantas partidas se jogam no total?

Suponhamos por exemplo que o número de jogadores inscritos sejam 173. Quantas partidas se tem que jogar para que haja um só vencedor?

Quando começam as intervenções dos alunos surgem respostas de caráter muito diverso: há quem afirme que o resultado é 8, 75, 86, 116, 120, 131, 160, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 194 e 277. A maioria das respostas incorretas resultaram de não terem entendido a pergunta.

Um exemplo de raciocínio que um aluno sustentava para afirmar que o número de partidas seria 172 é o seguinte:

Dos 173 jogadores inscritos tomamos 172 e os dividimos por dois; obtemos 86 que é o número de partidas na primeira rodada. Sobra um jogador que não joga. Depois tomamos os 86 que venceram nessa rodada e os dividimos aos pares, de onde obtemos 43 que é o número de partidas na segunda rodada. Tomamos os 43 vencedores e agregamos o jogador que sobrou desde o início; dividimos esse número por dois e obtemos 22. Tomamos os 22 vencedores e dividimos por 2, obtendo 11. Como não podemos dividir 11 por 2 de maneira exata, dividimos 10 por 2 e sobra um jogador. Agora se jogam 5 partidas e sobra um jogador. Tomamos os 5 vencedores mais esse que não jogou e voltamos a dividir por 2. Como resultado dessas três partidas obtemos 3 jogadores. Novamente tiramos um e se joga uma partida entre os restantes. O vencedor desta partida joga com o que ficou sem jogar e desta nova partida sai o vencedor.

Na primeira rodada se jogaram 86 partidas, na segunda 43, na terceira 22, na quarta 11, na quinta 5, na sexta 3, na sétima 1 e na oitava 1; portanto o total de partidas é:

$$86 + 43 + 22 + 11 + 5 + 3 + 1 + 1 = 172$$

O esquema desse raciocínio era:

$\begin{array}{r|l} 172 & 2 \\ \cline{2-2} & 86 \end{array}$ e sobra 1; $\begin{array}{r|l} 86 & 2 \\ \cline{2-2} & 43 \end{array}$ e sobra 1;

$\begin{array}{r|l} 44 & 2 \\ \cline{2-2} & 22 \end{array}$ e sobra nada; $\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ \cline{2-2} & 11 \end{array}$ e sobra nada; $\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \cline{2-2} & 5 \end{array}$ e sobra 1;

$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$ e sobra nada; $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$ e sobra 1; $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$ e sobra nada

Uma vez que se expõe esse tipo de raciocínio e que os alunos se convencem, propõem-se novas perguntas como: e se o número de participantes fosse 55?

Quase sempre respondem que se jogariam 54 partidas porque 55 é ímpar e sempre sobra um jogador.

E se fosse 48?

Alguns sugerem que se o número de jogadores é n, na primeira rodada se jogam n/2 partidas e na segunda n/4 e assim sucessivamente até n/n-1.

Perguntados se n não for uma potência de dois, em geral não sabem responder.

Continua-se perguntando pelo número de partidas, variando o número de jogadores e propondo, inclusive, números muito grandes que lhes compliquem os cálculos diretos.

Quando já não podem avançar mais na resposta, dão-se algumas sugestões para que formulem suas respostas, como, por exemplo, fazer listas com números pequenos:

Jogadores	Partidas
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5

e agrupar do seguinte modo:

Se n é ímpar XX XX XX X – 1ª rodada

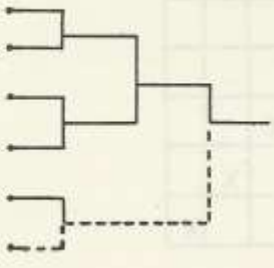
X X X X – 2ª rodada

X X – 3ª rodada

X

A sugestão que se torna chave para a resolução do problema consiste em averiguar o que acontece quando chega um jogador novo:

Ao chegar um jogador novo "na última hora" só se aumenta em um o número de partidas:



Finalmente chegam à conclusão de que o número de partidas é n–1 (quando há n jogadores) porque só se tem um vencedor; quer dizer, o número de perdedores é sempre n–1 e em cada partida se elimina um e um só jogador.

Depois de resolver esse primeiro problema apresenta-se uma pequena variação; por exemplo, que todos os jogadores têm que jogar contra todos os outros.

Os alunos sugerem que se construa uma tabela com números pequenos e que se inclua uma coluna com os aumentos no número de partidas:

Jogadores	Partidas	Aumentos
2	1	
3	3	2
4	6	3
5	10	4
6	15	5

Como não se podem obter de imediato a regra por meio da tabela, sugerem novos caminhos, por exemplo construir uma tabela de confrontos.

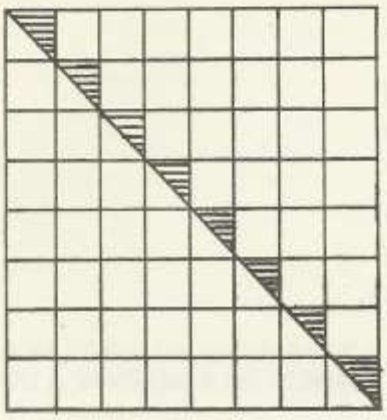
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

De imediato surge a idéia de "eliminar" a diagonal porque não faz sentido que um jogador se confronte com ele mesmo. Também observam que as partidas que estão acima da diagonal são as mesmas que estão abaixo e que portanto só se tem que contar uma parte dessas:

	1	2	3	4	5
1	X				
2		X			
3			X		
4				X	
5					X

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ + \; 2 \\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

A partir desse esquema uma aluna sugeriu que se poderia resolver o problema calculando uma área. Se considerarmos o quadrado n x n:



cuja área é n^2, metade de sua área é $n^2/2$, porém nessa área estamos contando "a mais" os triângulos que correspondem à diagonal. Portanto, devemos retirar sua área da área total. Como são n triângulos com base 1 e altura 1, temos que subtrair n vezes 1/2, ou seja, n/2. Portanto a área que buscamos é $n^2/2 - n/2$.

Diante deste problema surgem em geral muitas variações de soluções, duas das quais expusemos. Aqui já se observa uma participação muito maior dos alunos e uma fundamentação melhor das respostas. Esta é uma parte importante que se buscava no curso.

Uma vez que tenham resolvido eles mesmos problemas desse tipo e que manejem mais ou menos bem um método para os resolver, se lhes dá a teoria da Indução Matemática e as fórmulas comuns mais usadas em Combinatória.

O restante do programa se enfoca de maneira semelhante.

A ALEGRIA DA MATEMÁTICA
OU A VINGANÇA DE FERMAT

Charles Krauthammer
da Revista Time – abril/88
Trad. de Alexandre Lissovsky

Por um breve resplandecente momento parece que o século XX se havia justificado. A era das guerras mundiais, bombas atômicas, lixo tóxico, AIDS, Musak e agora, para não deixá-la de fora, uma pendente corrida eleitoral Busch-Dukakis, se tinha redimido, é o que parecia. Havia produzido um milagre. O último teorema de Fermat tinha sido solucionado.

O último teorema de Fermat é o mais famoso enigma matemático não-resolvido. Ele deve sua fama à sua idade – nasceu uns cinco anos antes de Isaac Newton – e à sua simplicidade. Consiste apenas de uma linha. Os gregos haviam mostrado que existem números inteiros para os quais $a^2 + b^2 = c^2$. Uma solução para o teorema de Pitágoras, por exemplo, é $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pierre de Fermat conjecturou que a equação pitagórica não funciona para dimensões mais elevadas: para n maior que 2, $a^n + b^n = c^n$ é impossível. Não funciona para $n = 3$ (Não há números naturais para os quais $a^3+b^3 = c^3$). E igualmente não, teorizou Fermat, para qualquer potência mais elevada: para $n = 4$ ou $n = 5$ e assim por diante.

E então veio a maldade. Fermat deixou a seguinte anotação marginal: "Eu descobri uma prova verdadeiramente impressionante [deste teorema] que esta margem é por demais pequena para conter". E que por mais de três séculos a mente humana tem sido obscura demais para discernir.

Durante esses anos todos os matemáticos deram a Fermat o benefício da dúvida: o consenso que o último teorema era provavelmente verdadeiro, mas que Fermat estava equivocado em pensar, ou foi perverso em alegar, que o havia provado. Sua lenda cresceu ao desafiar 15 gerações das maiores mentes matemáticas do mundo. Tornou-se o Santo Graal da teoria dos Números. E então, no mês passado, veio a notícia de que um professor assistente japonês de 38 anos tinha achado a solução. Parecia que entre o banal e o absurdo que é o cotidiano, algo de épico havia acontecido.

Mas não foi não. Yoichi Miyaoka e seus colegas estavam verificando, e encontraram, fundo em sua prova, problemas fundamentais embora sutis. Miyaoka chegou a vislumbrar o Graal, mas não mais que isso. A decepção é aguda – o século XX continua irredimido – mas está misturada com um curioso alívio. "Depois de uma batalha perdida", escreveu Wellington (1), "a maior desgraça é uma batalha ganha". Para ele, era fácil dizer (Ele venceu). Ainda assim, há sabedoria em Wellington, e consolo também. Solucionar Fermat teria significado perdê-lo. Com o erro de Miyaoka, Fermat – divertido, enganador, desafiando a posteridade a superá-lo – continua.

E a matemáica sai ganhando. O ataque de Miyaoka a Fermat é um lembrete, uma encenação do romance que é a matemática. A matemática nos dias de hoje tem um mau conceito. Na mente popular tornou-se uma síndrome (a angústia da matemática é um mal a ser tratado como o pavor de voar) ou mera aptidão. Pensamos num prodígio matemático como alguém que em sua cabeça pode fazer o que faz na maquininha calculadora. Mas isso não é matemática. Isso é contabilidade. A verdadeira matemática não é mastigar números e sim contemplá-los, e contemplar o mistério de suas conexões. Para Gauss, a "aritmética superior" era um "inesgotável depósito de verdades interessantes" sobre o relacionamento mágico entre números soberanos. A verdadeira matemática é saber se Fermat tinha razão.

Isso importa? É orgulho do pensamento político que idéias tenham consequências. A matemática, para glória sua, apresenta idéias sem consequências. "Um matemático", diz Paul Erdos, um dos maiores praticantes vivos e um dos mais excêntricos, "é uma máquina para transformar café em teoremas". Matemáticos não gostam de reconhecer isso, porque quando o fazem, suas subvenções cessam – é difícil exportar teoremas – e eles se tornam suspeitos de estarem só brincando, o que é evidentemente o que estão fazendo.

Políticos e jornalistas precisam acreditar que essencialmente tudo tenha uso e aplicação. Assim, quando é anunciada uma solução para algo como o último teorema de Fermat, ouve-se que a prova pode trazer algum benefício aos campos, digamos, da criptografia e dos computadores. Os matemáticos e seus simpatizantes, incapazes de justificar sua existência, dirão, como último recurso, que fazer matemática é útil porque "aguça a mente".

Aguça a mente? Para que? Para calcular resultados de votações ou compreender filmes de Fellini ou consertar propulsores de ônibus espaciais? Nossos meios e fins estão invertidos. O que poderia ser mais importante do que adivinhar o Absoluto? "Deus fez os números inteiros", disse um matemático do século XIX. "Tudo o mais é trabalho do homem". Esse trabalho é a matemática; que ela tenha de se justificar por suas aplicações, como uma ferramenta para fazer o mundano ou aperfeiçoar o efêmero, é uma afronta não só à matemática mas também à criatura que a inventou.

Que chamado mais elevado pode haver do que procurar verdades inúteis e belas? A teoria dos números é tão linda e não mais inútil que o domínio da haste do equilíbrio ou um passe pra frente bem jogado. E nossa cultura gasta quantias enormes em tais exercícios sem perguntar a que finalidade maior podem servir.

Além do mais, dentre todos esses exercícios, a matemática é o mais sublime. Ela é a metafísica do homem moderno. Opera muito próximo da religião, e é por isso que numerologia é importante para tantas crenças, e porque um sentido de transcendência é tão intensamente desenvolvido em muitos matemáticos, mesmo os mais irreligiosos. Erdos, um agnóstico, gosta de falar de Deus como tendo um Livro que contém as mais elegantes e mais perfeitas provas matemáticas. O maior elogio de Erdos, relata Paul Hoffman na revista **Atlantic**, é dizer que uma prova vem "direto da Bíblia". Afirma Erdos: "Você não precisa acreditar em Deus, mas devia acreditar na Bíblia".

Em um dos contos de Borges (2), um bibliotecário celeste passa sua vida inteira procurando em vão um volume análogo, o divino "livro total" que explicará o mistério do universo. Depois, compreendendo que tal alegria não está destinada a ser sua, expressa a tocante esperança de que possa ao menos ser de algum outro: "Rezo aos Deuses desconhecidos que um homem – somente um, muito embora fosse há milhares de anos atrás! – o possa ter examinado e lido. Se honra e sabedoria e felicidade não são para mim, que então sejam para outros."

Por uns poucos dias parecia que honra e sabedoria e felicidade eram de Miyaoka. Mas acabou sendo uma miragem. No entanto, algum dia o último teorema de Fermat será resolvido. Você e eu não compreenderemos aquela prova perfeita assim como não compreendemos a versão de Miyaoka. Não obstante, pensar que a alguém, em algum lugar, algum dia, será permitido olhar a página de Fermat no Livro é para mim, por ora, a alegria suficiente.

Notas (do tradutor):

(1) – O Duque de Wellington foi vitorioso contra Napoleão na Batalha de Waterloo (1815).

(2) – Jorge Luis Borges, grande escritor argentino.

CAMINHOS ALTERNATIVOS NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA RELATIVO ÀS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb

Inspiradas na palestra "Escolha de Atividades Matemáticas no Ensino" que o Professor François Pluvinage proferiu em 27/08/87 no GEPEM, apresentamos aos nossos alunos do 2º grau o problema a seguir.

Consideramos a tabela abaixo que é uma parte da tábua da multiplicação em N*.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Qual a soma de todos os números contidos na tabela?

Para resolvermos este problema podemos somar os elementos de cada linha e em seguida adicionarmos as somas parciais obtidas.

Vemos que cada linha é formada por 9 números em progressão aritmética de razões:

1 na 1ª linha
2 na 2ª linha
3 na 3ª linha e assim sucessivamente.

Calcular a soma dos elementos de cada linha, significa então achar a soma dos 9 primeiros elementos de uma progressão aritmética onde se conhece o primeiro elemento, a razão e o último elemento.

Esta resolução é aceita com facilidade pelos alunos, desde que seja superada a dúvida inicial sobre o tipo de progressão que cada linha representa. Por se tratar de uma Tabela de multiplicação, o aluno, antes de analisar o problema com cuidado, tem a tendência em considerar tratar-se de uma progressão geométrica. Após exame mais cuidadoso, o método de resolução torna-se acessível.

Assim, consideremos a soma dos elementos de cada linha.

1ª linha : $S' = 1 + 2 + ... + 9$

2ª linha : $S'' = 2 + 4 + ... + 18$

3ª linha : $S''' = 3 + 6 + ... + 27$

e assim sucessivamente.

Como a soma dos primeiros **n** elementos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é a_1 e o último é a_n é $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$, temos:

$$S_1 = (1 + 9)\frac{9}{2} = \frac{10 \,.\, 9}{2} = 45$$

$$S_2 = (2 + 18)\frac{9}{2} = \frac{20 \,.\, 9}{2} = 90 = 2 \,.\, 45$$

$$S_3 = (3 + 27)\frac{9}{2} = \frac{30 \,.\, 9}{2} = 135 = 3 \,.\, 45$$

e assim sucessivamente.

Observamos que a soma dos elementos da linha de ordem **i** é

$$\begin{aligned} S_i &= i + 2i + 3i + ... + 9i = \\ &= i\,(1 + 2 + 3 + ... + 9) = 45i \end{aligned}$$

Deste modo somando as 9 somas parciais obtemos:

$$\begin{aligned} S &= 45 + 2 \,.\, 45 + 3 \,.\, 45 + ... + 9 \,.\, 45 = \\ S &= 45\,(1 + 2 + 3 + ... + 9) = \\ S &= 45 \,.\, 45 \\ S &= 45^2 = 2025 \end{aligned}$$

Apresentamos também a nossos alunos do Colégio Estadual Souza Aguiar o processo de resolução que foi sugerido pelo prof. Pluvinage em sua palestra.

Partimos do 1º elemento no alto da Tabela à esquerda. Vemos que a soma é igual a 1 o que pode ser considerado igual a 1^3.

x	1
1	1

Em seguida "orlamos" como abaixo.
A soma dos elementos da orla relativa ao número 2 é:
$2 + 4 + 2 = 8 = 2^3$

x	1	2
1	1	2
2	2	4

Continuando, consideremos a orla relativa ao número 3.
Teremos como soma de seus elementos:
$3 + 6 + 9 + 3 + 6 = 27 = 3^3$

x	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

Vamos demonstrar que a soma dos elementos da orla correspondente ao número **i** é igual a i^3.
Chamemos de A a soma daqueles elementos.
Teremos:

$$A = i + 2i + 3i + \ldots + i^2 + (i-1)i + \ldots + 3i + 2i + i =$$
$$= 2\,[\,i + 2i + 3i + \ldots + (i-1)i] + i^2$$

Chamemos de S a soma : $i + 2i + 3i \ldots + (i-1)i$
S é então a soma dos $(i - 1)$ primeiros elementos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é **i** e a razão é **i**.
Como a soma dos **n** primeiros elementos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é a_1 e a razão é r é: $S_n = [2a_1 + (n-1)r]\frac{n}{2}$, então no nosso caso temos:

$$S = [2i + (i-2)i]\frac{i-1}{2} =$$

$$= \frac{2i\,(i-1) + i(i-2)\,(i-1)}{2} =$$

$$= \frac{i(i-1)\,[2 + i - 2]}{2} =$$

$$= \frac{(i^2 - i)i}{2} = \frac{i^3 - i^2}{2} =$$

Substituindo o valor de S na fórmula que nos dá A, temos:

$$A = 2 \cdot \frac{i^3 - i^2}{2} + i^2 = i^3 - i^2 + i^2 = i^3$$

A soma total dos elementos da tabela será então:

$$B = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3$$

Ora, a fórmula que nos dá a soma dos cubos dos **n** primeiros elementos de N* é:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots n^3 = \left[\frac{1}{2} n\,(n+1)\right]^2$$

Esta fórmula pode ser verificada por indução finita (ver Jacy Monteiro: Elementos de Algebra - Editora Ao Livro Técnico S/A - Pág 98).

Assim a soma desejada é igual a:

$$B = \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10\right)^2 = (9 \cdot 5)^2 = 45^2 = 2025$$

Com esta atividade quisemos despertar nos alunos a curiosidade e o interesse pela descoberta de caminhos alternativos. Deste modo os incentivamos a desenvolver seu potencial criativo na resolução de problemas.

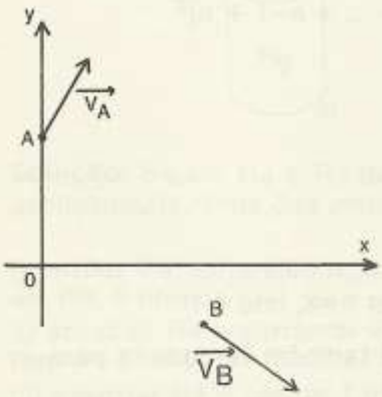
Damo-lhes assim uma segurança para que, ao resolver um problema por um caminho diferente daquele apresentado pelo professor, possam defender seus pontos de vista.

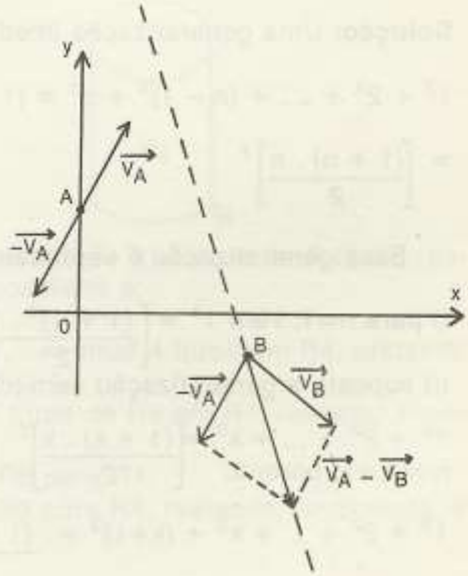
Ao mesmo tempo chamamos a atenção dos novos professores para os cuidados que eles devem ter, ao avaliar o trabalho de um aluno, em examinar se o caminho, diferente daquele que ele planejara, é também válido.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS APRESENTADOS NO BOLETIM 21

Radiwal Alves Pereira

1) Dois navios passam simultaneamente pelos pontos A e B, com velocidades constantes $\overrightarrow{V_A}$ e $\overrightarrow{V_B}$, respectivamente. Determine a mínima distância entre os dois navios.





Solução: O movimento relativo dos dois navios não se altera se somarmos o mesmo vetor velocidade $(-\overrightarrow{V_A})$ aos vetores $\overrightarrow{V_A}$ e $\overrightarrow{V_B}$. Neste caso, pode-se considerar que o navio em A esteja parado e que o navio em B se esteja deslocando com a velocidade $\vec{v} = \overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}$. Logo, a menor distância entre os dois navios será a distância de A ao suporte de $\vec{v}$.

Obs.: Com os dados das figuras, a mínima distância terá ocorrido **antes** que os navios tenham passado por A e B, respectivamente.

2) O número de quatro algarismos xxyy é o quadrado de um número natural n. Determine n.

Solução: Como a soma dos algarismos de ordem ímpar, menos a soma dos algarismos de ordem par, é zero, o número xxyy é múltiplo de 11. Como xxyy é o quadrado de um natural, então xxyy é também múltiplo de 11^2, ou de 121. Logo xxyy/121 = m^2, onde m é um número natural.

Como: $1100 \leqslant xxyy \leqslant 9999$, temos $9 \leqslant m^2 \leqslant 82$ ou $3 \leqslant m \leqslant 9$.

Os produtos de m^2 por 121, podem então valer:
1089, 1936, 3025, 4356, 5929, 7744 e 9801,
dos quais somente 7744 é da forma xxyy.
Logo o número n procurado vale 11x8 = 88.
Verificação: 88 x 88 = 7744.

3) Generalize somas como $1^3 = 1^2$, $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$ e prove ser verdadeira a generalização, qualquer que seja o número de parcelas.

Solução: Uma generalização imediata é:

$$1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + ... + n-1 + n)^2$$

$$= \left[\frac{(1+n) \cdot n}{2}\right]^2$$

Essa generalização é verdadeira, pois:

i) para n=1, vem $1^3 = \left[\frac{(1+1)^2 \cdot 1}{2}\right]^2$

ii) suposta a generalização verdadeira par n=k, isto é:

$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \left[\frac{(1+k) \cdot k}{2}\right]^2$, ela é também verdadeira para n = k+1, porque:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(1+k)^2 \cdot k^2}{4} + (1+k)^3 =$$

$$= (1+k)^2 \cdot \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \frac{(1+k)^2}{4} \cdot (k^2+4k+4) = \frac{(1+k)^2}{4} \cdot (k+2)^2 =$$

$$= \left[\frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}\right]^2.$$

Logo a generalização é verdadeira $\forall\ n \in N^*$.

4) Qual o valor da soma: $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} \cdots \dfrac{1}{99 \times 100}$?

Solução: Como $s_1 = \dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2}$, $s_2 = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} = \dfrac{2}{3}$,

$s_3 = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{3}{4}$, é natural pensar que $s_n = \dfrac{n}{n+1}$.

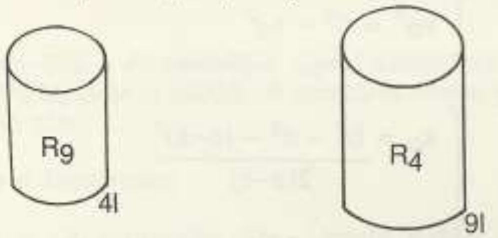
Esta soma é verdadeira qualquer que seja n, pois é verdadeira quando $n = 1$ e, suposta verdadeira para $n = k$, também será verdadeira para $n = k+1$, porque

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \text{ ou } s_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k.(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Então $\dfrac{1}{1x2} + \dfrac{1}{2x3} + \ldots + \dfrac{1}{99x100} = \dfrac{99}{100}$

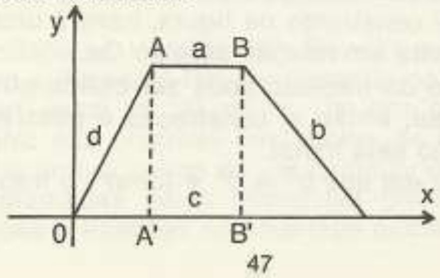
5) Como se podem retirar de um tanque exatamente seis litros d'água, quando se dispõe apenas de dois recipientes um de quatro litros e outro de nove litros, sem qualquer graduação nos recipientes?



Solução: Sejam R_4 e R_9 os recipientes de 4 litros e de 9 litros, respectivamente. Uma das maneiras possíveis é:

i) encher R9 no tanque e, a seguir, derramar 4 litros em R4, restando em R9, 5 litros;
ii) esvaziar R4 e derramar 4 dos 5 litros de R9 em R4, restanto 1l em R9;
iii) esvaziar R4 e passar 1 litro de R9 para R4;
iv) encher R9 e passar 3 litros de R9 para R4, restando, finalmente, 6 litros em R9.

6) Construa um trapézio cujos lados são os distintos comprimentos a, b, c, d, sendo **a** e **c** as bases.



Solução: Uma condição óbvia para existência de quadrilátero com lados **a**, **b**, **c**, **d** é que o maior deles seja menor do que a soma dos outros três. Para que esse quadrilátero seja um trapézio de bases **a** e **c** uma nova condição vai aparecer adiante.

Suponhamos o trapézio já construído e desenhado no plano xOy, como se vê na figura. Sejam x_0 e y_0 as coordenadas do vértice A. Então B tem coordenadas $x_0 + a$ e y_0. Construídos os triângulos retângulos OA'A e CB'B podemos obter o sistema.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = d^2 \\ (c-a-x_0)^2 + y_0^2 = b^2 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{b^2 - d^2 - (c-a)^2}{2(a-c)} \\ y_0^2 = d^2 - x_0^2 \end{cases}$$

ou a:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{b^2 - d^2 - (c-a)^2}{2(a-c)} \\ y_0^2 = d^2 - \left[\dfrac{b^2 - d^2 - (c-a)^2}{2(a-c)}\right]^2 \end{cases}$$

Então, caso o sistema tenha solução real, os quatro vértices do trapézio serão os pontos $A(x_0,y_0)$, $B(x_0+a,y_0)$, $C(c,O)$ e $D(O,O)$.

Obs.:

i) Para que o problema tenha solução devemos ter

$$d^2 > \left[\frac{b^2 - d^2 - (c-a)^2}{2(a-c)}\right]^2.$$

Neste caso, y_0 terá dois valores simétricos reais e, além da posição em que o trapézio foi construído na figura, haverá uma segunda posição, simétrica à primeira em relação ao eixo Ox.

ii) Como a construção do trapézio pode ser obtida através de um sistema de segundo grau, então a construção é possível com régua e compasso, embora não seja trivial.

iii) No caso particular em que $b^2 = d^2 + (c-a)^2$, o trapézio será retângulo.

INFORMES

Regina Monken

Diretoria 88/89

Realizou-se em 5/5 a Assembléia Geral Ordinária para eleição da Diretoria do GEPEM, biênio 88/89. A diretoria eleita (ver contra-capa) foi empossada no ato.

Pós-Graduação e Mestrado:

O GEPEM e a Universidade Sta. Úrsula estão empenhados em transformar o Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática de Lato-Sensu para Stricto-Sensu. Com esse objetivo já existe um grupo de especialistas da USU estudando as providências necessárias e apoiando o GEPEM na elaborção do projeto, que conta com grande entusiasmo de nosso presidente, Prof. Mello e Souza, e de nossa Vice-Presidente, Profª Estela Fainguelernt. Em 13/10 realizou-se, na chancelaria da USU, uma mesa-redonda presidida pela Madre-Chanceler, com a presença de outras personalidades da USU, da Presidência e Vice do GEPEM, e de professores que concluíram a Pós-Graduação nas primeiras turmas, a convite. Na ocasião, foi discutido o projeto e as possibilidades do grupo já iniciar a complementação do curso em 89.

SBEM: Sociedade Brasileira de Educação Matemática

A SBEM, fundada no I ENEM, SP, Fev./87 e ratificada no II, Maringá, Jan./88, tem a Regional-Rio funcionando no Sindicato dos Professores, R. Pedro Lessa, 35, 2º andar. Um dos objetivos da Regional-Rio é o encontro das diversas tendências da Educação Matemática no Rio, inclusive com a busca de um calendário que abranja todas as atividades programadas pelos diferentes grupos já organizados do Rio. Colaborações e filiações no endereço acima.