BOLETIM GEPEM

22

ANO XIII 1.º SEMESTRE 1988

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO
G E P E M
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Mª Laura M. Leite Lopes e Regina Monken

Estamos entregando o bol. 22 com uma coletânea de artigos sobre um assunto que sempre preocupa os professores de Matemática: a RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. Atualmente se dá muita ênfase a que a resolução de problemas seja uma estratégia de ensino. Para que não se torne apenas mais um modismo em nossas salas de aula procuramos apresentar resultados de algumas pesquisas sobre o tema.

A profª Lílian Nasser, do IMUFRJ, aponta razões pelas quais é tão importante a resolução de problemas, relacionando os fatores envolvidos nela com o resolvedor, o problema, o professor e os processos de resolução. Apresenta ainda exemplos, procedimentos e estratégias aconselháveis para os professores e para os "resolvedores". Este trabalho foi objeto de comunicação na VII CIAEM (Conferência Interamericana de Educação Matemática), República Dominicana, Julho/87.

Para que os leitores que não têm podido comparecer às nossas palestras mensais tenham acesso a elas, publicamos o resumo da que a profª Mª Ignez de Souza V. Diniz, do Instituto de Matemática da USP, fez em Maio de 88 sobre a Resolução de Problemas de Matemática Elementar. Questionando os problemas usualmente apresentados nos livros didáticos ela nos sugere que em nossas aulas passemos a usar os problemas como instrumentos para o aprendizado de procedimentos que ajudam na solução de qualquer situação problemática. Apresenta alguns princípios básicos da resolução de problemas que devem ser observados por professores e alunos e nos fornece ainda uma gama de exemplos que nos auxiliem na tarefa de ensinar a resolver problemas.

Um dos resultados da VI CIAEM (Guadalajara, México, 1985) foi a formação de um grupo de trabalho sobre o Ensino da Matemática através de problemas. Sob a coordenação dos Profs. Pilar Martinez Telles (UNAM - México), Antônio José Lopes (SP-Brasil) e Pilar Morfin Heras (Guadalajara-México), se iniciou imediatamente a publicação do Boletim do GTEMTB de la 6ª CIAEM. Do primeiro número desse boletim, de abril de 86, a profª Moema Sá Carvalho traduziu para nós os interessantes artigos sobre experiências no ensino da Matemática: Uma Experiência Educativa a Nível de Bacharelado e Uma Experiência em um Curso de Álgebra Superior.

O célebre problema da demonstração do último teorema de Fermat (séc. XVII) continua a desafiar os matemáticos e merece a atenção do grande público, como prova o artigo da revista Time de Charles Krauthammer, gentilmente traduzido para nós por Alexandre Lissovsky sob o título "A Alegria da Matemática ou A Vingança de Fermat". Nele o autor comenta e filosofa sobre o erro na demonstração apresentada em 87 pelo japonês Yoichi Miyaoka ter sido uma vitória para a Matemática.

Nossas assíduas colaboradoras prof[as] Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb relatam uma experiência de sala de aula de exploração de caminhos alternativos na resolução de problemas. Enfatizam as colegas a importância da valorização, de nossa parte, professores, de soluções diferentes das nossas, apresentadas pelos alunos. Novamente para os leitores que não têm podido assistir as palestras mensais, informamos que este artigo foi inspirado na palestra de Agosto de 87: "Escolha de Atividades Matemáticas no Ensino", do prof. Pluvinage, do IREM de Strasbourg.

Cumprindo a promessa feita no bol. 21 o prof. Radiwal nos apresenta as soluções dos seis problemas transcritos de Polya e Avital e propostos em seu artigo "Resolução de Problemas", daquele número do boletim.

Aproveitamos para reforçar nossos apelos às contribuições dos colegas em artigos, dúvidas, outras alternativas de soluções apresentadas, etc.

Colega, o BOLETIM é seu!

Em tempo: a tiragem de nosso boletim foi reduzida de 2000 para 500 exemplares, devido aos altos custos de impressão. Do boletim 20 (Jan./88) para o 21 (Junho/88) tivemos um acréscimo de aproximadamente 736% nesses custos enquanto que do dia 21 para o 22 (Nov./88) de 308%.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
– UMA ANÁLISE DOS FATORES ENVOLVIDOS (*)

Lilian Nasser(**)
UFRJ

Um dos principais temas da pesquisa em Educação Matemática nos últimos anos tem sido a Resolução de Problemas. Nos Estados Unidos, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) tomou a Resolução de Problemas como tema do livro do ano de 1980, e afirmou na "Agenda de Ação" (NTCM, 1980) que "a Resolução deve ser o foco da matemática escolar na década de 1980". Também foi estabelecido que "aprender problemas é a principal razão para estudar Matemática". (Conselho Nacional de Supervisores de Matemática).

Por que a Resolução de Problemas é tão importante?

Muitas razões podem ser dadas, como:

– A Resolução de Problemas desenvolve o raciocínio nos estudantes;

– A Resolução de Problemas ajuda a desenvolver a criatividade;

– A Resolução de Problemas motiva os estudantes a aprender Matemática;

– A Matemática só tem sentido se é usada para resolver **problemas reais**;

– A Resolução de Problemas é uma boa maneira de avaliar a aprendizagem;

– Através da Resolução de Problemas, os alunos aprendem a trabalhar em grupos;

A próxima pergunta deveria ser: por que é **necessário fazer pesquisa** em Resolução de Problemas? A resposta é, provavelmente porque é impossível descrever com palavras um método para resolver qualquer problema, incluindo todas as componentes envolvidas, com

---

(*) Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e pelo Conselho Britânico e foi apresentado na VIIª Conferência Interamericana de Educação Matemática na República Dominicana em julho/1987.

(**) Lilian Nasser é mestre em Matemática pelo IM-UFRJ, professora adjunta do IM-UFRJ, e esteve em Londres nos meses de abril, maio e junho de 1987, com uma bolsa do Conselho Britânico, trabalhando com a Professora Kathleen Hart.

suas propriedades específicas. Não se pode **ensinar** como resolver problemas. A Resolução de Problemas é uma **habilidade** que temos que **desenvolver** nos estudantes.

Polya (1957) deu seu famoso modelo para a Resolução de Problemas: entender o problema, traçar um plano de resolução, executar o plano e verificar a resposta. É perfeito, mas será que o aluno é capaz de seguir esses passos sozinho?

Suydam (1980) referiu-se à Resolução de Problemas como uma rede emaranhada, e deu algumas "dicas" para desembaraçá-la. Diversos pensamentos e caminhos para a pesquisa em Resolução de Problemas foram sugeridos por Lester (1983), Schoenfeld (1982), Silver (1985) e outros.

Vamos tentar analisar os fatores que podem influenciar o ensino e a aprendizagem em Resolução de Problemas. Esses fatores podem ser classificados em 4 grupos:

- Fatores relacionados ao resolvedor
- Fatores relacionados ao problema
- Fatores relacionados ao professor
- Fatores relacionados aos processos de resolução

I – Fatores relacionados ao resolvedor

Este grupo de fatores inclui todas as características individuais do estudante, como por exemplo: o meio ambiente em que ele vive, a experiência prévia em Matemática e em Resolução de Problemas, o nível sócio-cultural de sua família, a sua idade em relação à turma, etc.

Algumas características conhecidas dos "bons" resolvedores de problemas são: QI alto, boa compreensão de leitura, habilidade de raciocínio, facilidades em contas. Mas quando se pode afirmar que um aluno é um "bom" resolvedor de problemas? Não é fácil medir o desempenho dos alunos em resolução de problemas: depende da quantidade e do tipo de problemas resolvidos, do tempo gasto em cada problema e de todos os caminhos usados na tentativa de chegar à solução. Às vezes, uma resolução longa e confusa é mais inteligente que outra, mais clara e curta.

Como exemplo, vamos examinar duas resoluções distintas dadas ao problema:

(I.1): Ache um número inteiro entre 600 e 650 que tenha um número ímpar de divisores positivos.

1ª solução: Procure os primeiros números inteiros que têm um número ímpar de divisores. Todos os números primos estão excluídos (eles têm dois divisores).

Número	1	4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	22	24	25
Número de Divisores	1	3	4	4	3	4	6	4	4	5	6	6	4	4	8	3
	↑	↑			↑					↑						↑

Observe que os números com um número ímpar de divisores são quadrados perfeitos.

Logo, o número que estamos procurando é $625 = 25^2$, e é único.

2ª solução: Solução Algébrica

Suponha que a fatoração do número N que estamos procurando seja:

$N = 2^m \times 3^n \times 5^p \times 7^q \times ...$

O número de divisores de N seria:

$(m + 1) \times (n + 1) \times (p + 1) \times (q + 1) \times ... =$ nº ímpar. Logo, $m + 1$, $n + 1$, $p + 1$, $q + 1$, ... não podem ser números pares. Portanto m, n, p, q, ... são pares. Daí N ser um quadrado perfeito, já que todos os expoentes em sua fatoração são pares.

Logo, $N = 625 = 25^2$

A segunda solução pode ser mais longa que a primeira, mas envolve mais conceitos matemáticos. Por outro lado, o primeiro resolvedor teve as habilidades de achar a lei de formação e de generalizar. Qual deles é o melhor resolvedor de problemas?

Não podemos garantir que um estudante que sabe os conceitos matemáticos e as quatro operações é um "bom" resolvedor de problemas. Para isso, ele deve ter a habilidade de usar os dados do problema juntamente com seu conhecimento prévio, para chegar à conclusão.

Krutetskii (1976) relatou muitas habilidades de um "bom" resolvedor de problemas, tais como: a habilidade de notar semelhanças, diferenças e analogias, a habilidade de pular passos, um sentimento para soluções elegantes, a habilidade de generalizar com base em poucos exemplos, a habilidade de inverter passos facilmente, e a habilidade espacial.

Além dessas habilidades e as que mencionamos antes, podemos incluir ainda: a habilidade de estimar e analisar as respostas, o grau de auto-estima e confiança e a reação positiva ao stress, como características importantes do bom resolvedor de problemas.

Muitas dessas habilidades podem ser desenvolvidas através de atividades na sala de aula (Suydam, 1980), ou através de um programa instrucional (Charles e Lester, 1984).

II – Fatores relacionados ao problema:

Aqui consideramos os fatores relacionados à natureza do problema. Primeiro, o problema deve ser interessante, de modo a motivar o aluno para resolvê-lo. Também consideramos o nível de dificuldade do problema: se o vocabulário é adequado, se ele é diferente dos problemas anteriores, se é um problema de uma ou várias etapas, se ele tem muitas variáveis, se a estrutura é complexa, se envolve números grandes ou decimais, se admite mais de uma solução e, principalmente, se é necessário o uso de alguma estratégia ou heurística para resolvê-lo (problema de processo).

Os professores não devem evitar problemas com estas dificuldades. As crianças devem praticá-los, principalmente os problemas com dados complicados. Os problemas da vida real têm dados desse tipo:

podem ser encontrados todos os dias nos jornais (OTN, URP, inflação, etc).

Outra característica que podemos considerar em um problema é o modo como ele é proposto. Dependendo da maneira como o problema é proposto, o resolvedor pode ser mais motivado para resolvê-lo.

O problema (I.1) também pode ser proposto das seguintes maneiras:

(1) Seja d(n) o número de divisores positivos do inteiro n.
Prove que d(n) é ímpar se e somente se n é um quadrado perfeito.
(Butts - 1980)

(2) Um canibal propôs um jogo ao seu prisioneiro:
– Diga-me um número entre 901 e 1.000. Se ele tiver um número ímpar de divisores, você está livre. Caso contrário, você será servido no jantar.
O prisioneiro respondeu:
– Entre 0 e 20, eu teria 4 chances de acertar; entre 901 e 1.000, só tenho uma...
Ainda assim, o prisioneiro deu o número certo.
Qual é esse número?
(Grupo de Estudos de Resolução de Problemas - 1987)

(3) 500 alunos de uma escola participaram de um projeto de Matemática. Todos se juntaram no auditório da escola e se sentaram. Na etapa 1 do experimento, todos os alunos se levantaram. Na etapa 2, todo segundo aluno (2º, 4º, 6º, ...) se sentou. A etapa 3 consistiu de todo 3º aluno (3º, 6º, 9º, ...) inverter sua posição, isto é, eles se levantaram se estavam sentados, e se sentaram se estavam de pé. Na etapa 4, todo 4º aluno inverteu sua posição, e assim por diante, até a 500ª etapa, quando o 500º aluno inverteu sua posição.
Os estudantes tentaram prever quais deles terminariam em pé. Você é capaz de responder?
(Charles e outros - nível 8 - 1985)

(4) Imagine **n** armários, todos fechados, e **n** homens. Suponha que o 1º homem passa por eles, e abre todos os armários. Então o 2º homem passa e fecha todo 2º armário, começándo no 2º (2º, 4º, 6º, ...). O 3º homem passa e muda o estado de todo 3º armário, começando no 3º (3º, 6º, 9º, ...) (i.e. se está aberto, ele fecha, e vice-versa).
Se este procedimento continuar até que todos os **n** homens tenham passado por todos os armários quais deles estarão abertos?
(Butts, 1980).

Qual das cinco versões desse problema é mais interessante e motivadora?

III - Fatores relacionados ao professor:

O sucesso em Resolução de Problemas depende fortemente das atitudes do professor. O professor é responsável pela escolha e enunciado dos problemas. Nós vimos em (II) como isso é importante. Além disso, o professor deve medir a quantidade e o nível de dificuldade dos problemas, de acordo com cada turma.

Alguns indícios de atitudes positivas dos professores em relação à Resolução de Problemas são:

- Prover a sala de aula com materiais concretos, criando um ambiente favorável.
- Desenvolver nos alunos a persistência (dizer a eles que alguns problemas requerem tempo para serem resolvidos);
- Dar oportunidade a todos os alunos de serem bem sucedidos;
- Elogiar a criança bem sucedida;
- Deixar os alunos criarem seus próprios problemas e estratégias de resolução. Discutir todas elas com a turma, mesmo as que não cheguem à resposta correta;
- Incentivar os alunos a avaliar a solução obtida;
- Usar perguntas para focalizar a atenção da turma nas informações pertinentes dadas no problema;
- Não mostrar a resolução pronta e arrumada, mas deixar os alunos sentirem todas as tentativas e estratégias usadas;
- Dar aos alunos atividades de treino (ex.: Escreva um problema que pode ser resolvido por uma sentença matemática dada);
- Ensinar diversas estratégias e encorajar os alunos a tentar diferentes estratégias.

Veja Pehkonen (1987), Suydam (1980) e Zimmermann (1987).

IV – Fatores relacionados aos processos:

Nas séries iniciais, o processo usado para resolver problemas de uma etapa é: "escolher a operação correta". Em geral, os alunos escolhem a operação identificando uma "palavra-chave". Por exemplo, "sobrar" é uma palavra-chave para a subtração, e "juntos" é uma palavra-chave para a adição. De fato, quase todos os problemas propostos nos livros-textos do 1º grau podem ser resolvidos pelo método da "palavra-chave". Veja Schoenfeld (1982). No entanto, é preciso alertar os alunos para que eles leiam o problema inteiro, antes de traçar o plano de resolução.

Algumas vezes, os alunos fracos escolhem a operação que "combina" com os dados do problema. Por exemplo, num problema envolvendo os dados 5 e 10, eles escolheriam divisão, apenas porque 10 é divisível por 5.

As dificuldades maiores aparecem nos problemas de processo, que não podem ser resolvidos apenas através de uma ou mais operações, mas requerem o uso de alguma estratégia ou heurística.

Vários grupos de pesquisa têm sugerido atividades para desenvolver a habilidade de usar estratégias na resolução de problemas. Charles e Lester (1984) desenvolveram um programa instrucional orientado para o 1º grau, em 8 volumes. Para o nível colegial, veja Schoenfeld (1980) e Zimmermann (1987).

A seguir, destacamos algumas estratégias e exemplos que podem ser resolvidos por cada uma delas:

1. Tentativa e erro:

Ex.: Paulo tinha 6 dias para preparar desenhos para exposição de artes da escola. Em cada dia, fez mais 4 desenhos que no dia anterior.
Ele expôs 150 desenhos.
Quantos desenhos ele fez em cada dia?

2. **Fazer uma lista organizada:**

Ex.: A seleção brasileira de futebol pode usar calções azuis ou amarelos e três cores diferentes de camisas: brancas, azuis ou verdes.
Quantos uniformes diferentes eles podem usar, se não é permitido usar calções e camisas da mesma cor?

3. **Fazer uma tabela:**

Ex: Nina tem 6 anos, e sua mãe tem 27.
Com que idade terá a metade da idade de sua mãe?

4. **Fazer uma figura:**

Ex: Na cozinha de seu novo apartamento, Lúcia descobriu que faltavam azulejos numa região com 120 cm de perímetro.
O proprietário anterior lhe deu 5 azulejos (de 12 cm de lado) para cobrir a região.
De que maneira os azulejos serão dispostos?

5. **Procurar uma lei de formação:**

Ex: Em sua aula de artes plásticas, Sueli estava aprendendo a fazer pinturas com duas cores. Ela podia usar 8 cores diferentes.
Quantas combinações de duas cores ela conseguiu fazer com essas duas cores?

6. **Trabalhar de trás para frente:**

Ex: Quando 3 meninos subiram numa balança, o peso total foi de 166 kg. Um dos meninos desceu, e a balança marcou 106 kg. Quando outro menino desceu, o peso marcado foi de 57 kg.
Qual o peso de cada menino?

7. **Usar raciocínio lógico:**

Ex: Márcio, Marcelo, Marcos e Maurício são quadrigêmeos, e a única maneira de diferenciá-los é pela cor de suas camisas. Nem Marcos nem Maurício gostam de vermelho. Marcelo sempre usa verde. Maurício pensou em escolher o amarelo, mas mudou de idéia.
A cor favorita de um irmão de Márcio é azul.
Que cor de camisa cada menino usa?

8. **Simplificar o problema** (ou tentar resolver antes um problema relacionado)

Ex: Dado o triângulo T, com seu maior lado como base, prove que um quadrado S pode ser inscrito em T.

(Prove primeiro que um triângulo pode ser inscrito em T)

9. **Observar simetrias:**
Ex: Dividir um quadrado em quatro partes congruentes, de seis maneiras diferentes.

10. **Fazer um esquema:**
Ex: Num campeonato de duplas de vôlei, em cada jogo a dupla perdedora é eliminada.
Quantas partidas serão jogadas até se chegar à dupla campeã, num torneio com 15 duplas?

Comentários:

Os alunos devem ter oportunidade de resolver estes tipos de problemas, pois, ao resolvê-los, revelam os processos inerentes ao pensamento. A pesquisa em Educação Matemática deve estar sempre relacionada à psicologia. Os educadores matemáticos e psicólogos devem trabalhar juntos, desenvolvendo programas de atividades e modelos para melhorar o desempenho em resolução de problemas.

Observando os resultados de diversas pesquisas experimentais feitas no Brasil e no exterior, podemos detectar os seguintes fatos comuns:

- o desempenho em resolução de problemas é muito baixo;
- os alunos não estão habituados a resolver problemas "diferentes", isto é, que não dependem exclusivamente da matéria que está sendo ensinada;
- os alunos repetem a mesma estratégia quando resolvem problemas do mesmo tipo;
- alunos mais velhos não usam, em geral, tentativa e erro, procurando uma fórmula ou algoritmo que se ajuste ao problema;
- os alunos não verificam as respostas obtidas;
- as crianças são incapazes de coordenar simultaneamente as diversas variáveis envolvidas num poblema;
- resolver problemas desenvolve a habilidade de resolver problemas.

A pesquisa em Resolução de Problemas deve avançar, levando em conta os processos cognitivos e metacognitivos. Mas devemos ter sempre a preocupação de que os resultados obtidos fiquem ao alcance dos professores, para que interfiram de fato no ensino.

Referências:

- Butts, T. (1980) – Posing Problems Properly. Em Problem Solving in School Mathematics (1980 Yearbook), editado por Krulik, S e Reys, R. Reston: NCTM.
- Charles, R.I. e Lester, F.K. (1984) – An Evaluation of a Process – Oriented Instructional Program in Mathematical Problem-Solving in Grades 5 and 7. Journal of Research in Mathematics Education, vol. 15(1).
- Charles, R.I. e outros (1985) – Problem Experiences in Mathematics: Grades 1-1.8 Addison - Wesley Publishing Company.
- Grupo de Estudos de Resolução de Problemas (1987) – Mini-curso apresentado no 1º Encontro Nacional de Educação Matemática, fevereiro de 1987, São Paulo, Brasil.

– Krutetskii, V.A. (1976) – The Psychology of Mathematical Abilities in School Children. Chicago Press.
– Lester, F.K. (1983) – Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving Research. Em: Acquisition of Mathematics Concepts and Process, editado por Lesh, R. e Landau, M. New York: Academic Press.
– National Council of Teachers of Mathematics, 1980 Year book: Problem Solving in School Mathematics, editado por Krulik, S. e Reys, R. Reston: NCTM.
– Pehkconen, E. (1987) – On Teaching Problems – Solving in Mathematics – Mini-curso apresentado na Conferência Anual da Mathematical Association - Abril de 1987, Londres.
– Polya, G. (1957) – A arte de resolver problemas – Ed. Interciência, Rio de Janeiro.
– Schoenfeld, A. (1980) - Hemistus in the classroom - artigo publicado no livro do ano de 1980 do NCTM.
– Schoenfeld, A. (1982) – Some Thoughts in Problem - Solving Research and Mathematics Education. Em: Mathematical Problem Solving: Issues in Research, editado por Lester, F. e Ganofalo, J. Pennsylvania: The Franklin Institute Press.
– Silver, E.A. (1985) - Research of Teaching Mathematical Problem Solving: Some Under represented Themes and Needed Directions. Em: Teaching and Learning Mathematical Problem solving: Multiple Research Perspectives; editado por Silver, E.A. New Jersey: LEA Publishers.
– Suydam, M.N. (1980) – Untangling Clues from Research on Problem Solving - artigo publicado no livro do ano de 1980 do NCTM.
– Zimmermann, B. (1986) - From Problem Solving to Problem Finding in Mathematics Instruction. Em Mathematics Education Research in Finland, Yearbook 1985, editado por Kupari, R., University of Jyvaskyla.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Maria Ignez de Souza V. Diniz
IME-USP

O objetivo desse artigo é discutir alguns aspectos da resolução de problemas em aulas de Matemática. Antes de mais nada, devemos definir o que é um problema no ensino de Matemática.

Problema é toda situação na qual o indivíduo confrontado não tem garantia de obter a solução com o uso de um algoritmo; sendo que todo o conhecimento relevante desta pessoa deve ser combinado de maneira nova para resolver essa questão.

De posse dessa definição de problema podemos observar que aqueles que aparecem em nossos livros didáticos não podem ser considerados como tal. De fato, na sua maioria não passam de exercícios de fixação ou modelos que o aluno segue e repete sem compreensão, e não se prestam aos objetivos primordiais do ensino, quais sejam, a transferência de conhecimento e o desenvolvimento do raciocínio.

A conclusão mais sensata é a de que devemos repensar a atividade de resolver problemas e tentar utilizar o livro didático com outro enfoque e com espírito crítico.

Para isso, devemos considerar, em primeiro lugar que, resolver um problema é algo mais que obter uma resposta. Na verdade, um problema só pode ser considerado como resolvido depois de uma conscientização do processo de resolução e da discussão detalhada de possíveis generalizações e aplicações desse resultado. Outro dado importante é a discussão dos erros cometidos e o porquê desse ou daquele erro.

Em segundo lugar, devemos modificar nossas aulas tendo os problemas como instrumentos para o aprendizado de estratégias e procedimentos que se incorporam ao conhecimento pessoal, e podem ser utilizados para enfrentar outros problemas em outras áreas do conhecimento.

Alcançar essas metas não é tarefa simples. Sem dúvida são necessários perseverança e observação do professor e dos alunos em relação a alguns princípios básicos da resolução de problemas, quais sejam:

– A atividade de resolver problemas deve estar presente em todo o curso, e não apenas em algumas aulas como curiosidade.

– Salientar, na medida do possível, a estratégia empregada na solução e o porquê da escolha dessa estratégia.

– Trabalhar com problemas realmente interessantes e desafiantes.

Vamos considerar alguns exemplos e sugestões que implementam o que foi colocado aqui.

I. Substituir exercícios de reconhecimento de definições ou de enunciados de alguns teoremas pela conduta de pedir um exemplo de...

Por ex.

1) Dê um exemplo de uma fração própria maior que 3/4.

2) Dê um exemplo de triângulo em que uma das alturas coincide com a sua mediana.

Além de estimular a participação do aluno em aula, as diversas respostas obtidas podem gerar a discussão de outros tópicos.

II. Os exercícios algorítmicos, que são necessários para garantir desenvoltura e fixação de conceitos e regras computacionais, devem ser alterados com outras atividades que cumprem os mesmos objetivos, porém de forma mais interessante. Por ex.:

1) Criptogramas como os que seguem, onde cada letra corresponde a um algarismo distinto.

$$\begin{array}{r} HOPUS \\ +\ POCUS \\ \hline PRESTO \end{array} \qquad \begin{array}{r} AAA \\ BBB \\ +\ CCC \\ \hline FGHI \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} C7 & A \\ \cline{2-2} \underline{A} & 1B \\ 3B & \\ \underline{D5} & \\ E & \end{array} \qquad \begin{array}{r} ABC \\ \times\ BAC \\ \hline \ast\ast\ast C \\ \ast\ast A \\ \ast\ast\ast B \\ \hline \ast\ast\ast\ast\ast\ast \end{array}$$

2) Quadrados ou triângulos mágicos, como os abaixo:

$3\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{2}$	
	$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$

Arrume os algarismos de 1 a 9 na pirâmide triangular abaixo, de tal maneira que a soma de cada lado seja 23.

```
   X
  X X
 X   X
XXXX
```

3) Exercícios algorítmicos que tenham um propósito.
3.1) Calcular

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{99.100}$$

Generalize.
3.2) Multiplique

$$(1 + x)(1 - x + x^2)$$

$$(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4ab^2)$$

$$(3y - 2w^2)(9y^2 + 6yw^2 + 4w^4)$$

4) O reverso de um problema standard.
4.1) Encontre três problemas aritméticos que tenham resposta 15. Podemos colocar algumas condições a mais, por exemplo, especificando que só 5 números e os sinais + e X devem ser usados na solução.
4.2) Encontre três sólidos com área superficial igual a 60.

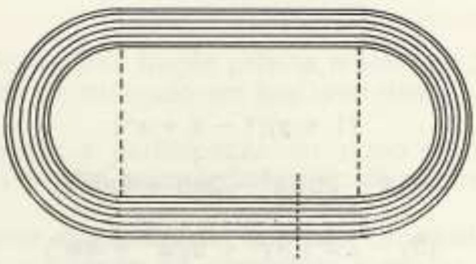
5) Problemas sem perguntas, onde se descreve uma situação e se pede que a classe formule as questões.
5.1) Mariana e Roberta foram a uma lânchonete. Mariana tinha 25 cruzados e Roberta 30 cruzados. Elas desejavam comprar um guaraná que custa 40 cruzados.
Algumas questões que podem ser colocadas pelas crianças são: Elas tinham dinheiro suficiente? Quanto elas receberão de troco? Cada uma delas receberá o mesmo troco? Se elas decidirem dividir o refrigerante, quanto cada uma receberá de volta?
5.2) Montamos um quadro como o que segue e deixamos aos alunos a formulação de problemas e suas soluções.

MENU	
Hamburger	Cz$ 120,00
Hot dog	Cz$ 70,00
Queijo quente	Cz$ 65,00
Refrigerante	Cz$ 40,00
Chocolate	Cz$ 55,00

III. Trabalhar com problemas de aplicação.

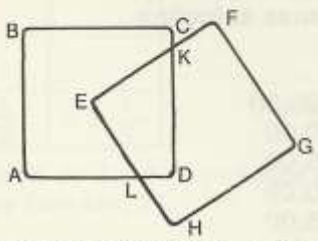
Chamamos problema de aplicação àquele que possui dados realistas e cuja incógnita é desconhecida por um motivo razoável e se tem um motivo plausível para procurá-la. Por ex.:

a) Um professor quer alterar as notas obtidas numa determinada prova para melhorar a situação de seus alunos. A nota máxima continua sendo 10, mas 5,6 se torna 7 na nova escala. Que nota corresponderá a 7,5 depois dessa alteração?
b) Uma pista de corrida com seis raias tem o formato de um retângulo cujo comprimento é 1,5 vezes a sua largura, com um semicírculo em cada extremidade. Cada raia tem 1 metro de largura. Qual o comprimento e a largura do retângulo se a raia interna tem 1500 metros de comprimento? Para uma corrida de 1500 metros, o corredor da raia interna deve começar na marca de chegada. Onde devem começar os demais cinco corredores?



IV. Trabalhar com problemas de investigação.

Esses problemas devem encorajar a adivinhação com o intuito de desenvolver a criatividade do aluno e simular o processo de fazer Matemática onde a formalização vem depois de várias conjecturas e tentativas de solução. Por ex.:
a) Como deve ser cercado um jardim retangular com uma cerca de 20 metros de comprimento para que tenhamos a área máxima para plantio?
b) Quais os possíveis valores para o algarismo das unidades de um número quadrado perfeito?
c) Quantos triângulos diferentes com lados inteiros podem ser desenhados tendo seu maior lado (ou lados) o comprimento de 5 cm? O que acontece se trocarmos para 6 cm? Ou **n** cm? Em cada caso, quantos desses triângulos são isósceles?
d) Quais são os possíveis valores da área do quadrilátero EKDL, se ABCD e EFGH são quadrados de lado 12 e E é o centro do quadrado ABCD?



e) Para quais números naturais **n**, **n** é um divisor de:

(**n** – 1)(**n** – 2). . .3.2.1?

Por ex.: 5 não é divisor de 4.3.2.1, mas 6 é divisor de 5.4.3.2.1.

f) Para promover a atividade de adivinhar podemos utilizar a brincadeira de perguntas cujo objetivo é descobrir um número, figura geométrica, conceito ou teorema em que alguém está pensando, com perguntas que serão respondidas com apenas sim ou não. Devemos desestimular perguntas do tipo:

É... ? que devem ser substituídas por: O que você está pensando tem a propriedade ...?, ou, Tem relação com...?, ou ainda, É importante para...?

Referências:

– Butts, T. – Posing problems properly. In: Krulik, S. e Reys, R.E.: Problem Solving in School Mathematics. 1980 Yearbook. NCTM.
– Davis, E.J. e McKillip, W.D. – Improving story-problem solving in elementary school mathematics, idem.
– Barnett, J.C.; Sowder, I. e Vos, K.E. – Textbook problems: Supplementing and understanding them. idem.
– Ewbank, W.A. – Cryptarithms: Math made me daft, momma. Math. Teacher, 1(81)54,60. 1988

UMA EXPERIÊNCIA EDUCATIVA A NÍVEL DE BACHARELADO

Francisco Struck Chavez
Grupo de Enseñanza de Las Matematicas
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências – UNAM – México – 04510
Trad. de Moema Sá Carvalho

Trata-se de uma experiência acadêmica que se realizou em 1982.

Foram implantados paralelamente, na Faculdade de Ciências, Seminários sobre Ensino de Matemática I e II, e Cursos de Matemática I e II, no Colégio de Ciências e Humanidades (CCH) (nível bacharelado).

No Seminário se discutia o conteúdo e o método de ensino, preparavam-se as aulas e se avaliavam os resultados do curso do CCH.

Na prática me concentrei no que se fazia no CCH, esclarecendo inicialmente que todas as idéias provinham de uma discussão com a totalidade dos alunos do Seminário e com o Dr. Santiago Lopez Medrano que participava comigo da responsabilidade desse Seminário.

I – Antecedentes do CCH

Em 1971 foi criado o Colégio de Ciências e Humanidades, no qual se buscava uma alternativa ao ensino tradicional, rígido e escleroza-do, do sistema de Preparatórios; o grupo de professores do CCH era sumamente jovem, a maioria de estudantes dos últimos semestres ou recém-egressos das Faculdades, e, em Matemática, a maioria dos professores provinha do Curso de Matemática.

O lema do Colégio, que procurava refletir o espírito do novo método era: "Aprender a aprender"; de modo que não se tratava de locupletar de conhecimentos os estudantes, pelo contrário, fazer finca-pé no método de aprender por eles mesmos, de saber defrontar-se com problemas novos e ter capacidade de investigar a discutir para resolvê-los.

Particularmente em Matemática se torna, em princípio, muito difícil elaborar um programa com tais características, e, consequentemente, o primeiro programa proposto fracassou.

Diante desse fracasso, em 1972, os professores de Matemática se organizaram para discutir suas experiências do 1º ano e elaboraram um programa diferente, mais adequado ao "espírito do Colégio".

O resultado foi um programa muito aberto, no qual a diretriz era elaborar modelos matemáticos de problemas reais. Assim como primeiro tema vinham os Modelos Matemáticos e Linguagens Simbólicas e os temas seguintes, conjuntos, lógica, sistemas de numeração, álgebra etc eram apresentados como modelos e linguagem universalmente aceitos e úteis para resolver problemas concretos.

O método consiste em apresentar problemas interessantes e apropriados, de modo que, por meio de discussão coletiva e de pesquisa pelo grupo se vá elaborando a teoria, sob a direção do professor.

Esse programa e o método adequado decorrente, que representavam, a meu ver, um avanço significativo no ensino da Matemática, se defrontaram com muitas dificuldades e obstáculos.

Por um lado requeriam, por parte dos professores, um trabalho muito mais pesado do que o que representava um curso tradicional e, dadas as condições de trabalho (a maioria dos professores com turmas de 50 a 60 alunos) era uma tarefa praticamente estafante. Por outro lado, do ponto de vista das autoridades universitárias, eram inoperantes por não ser possível controlar os professores sob um programa estrito.

O programa e o espírito do Colégio se foram perdendo com o tempo e foi caindo em um ensino tradicional, seguindo um texto. O programa foi se degenerando no programa tradicional, com a única diferença de que havia um tema de Modelos e Linguagens que acabou por se converter em um apêndice do programa tradicional, dele totalmente desvinculado.

II. A Experiência

A experiência acadêmica realizada em 1982 pretendia restabelecer o programa de 1972.

De imediato as minhas condições eram diferentes das dos professores do CCH, pois eu dispunha de tempo integral para me dedicar a esse projeto, pensar em problemas adequados etc, e contava com o apoio de um grupo de estudantes dos últimos semestres do Curso de Matemática.

A idéia do curso, de acordo com o espírito do programa de 72, talvez um pouco modificado, era apresentar ao grupo problemas cuja proposta fosse suficientemente simples para que todos eles, inclusive os que se sentissem mais inseguros em Matemática ou que, pior ainda, a detestassem, pudessem opinar, mesmo que pela primeira vez estivessem tendo certo interesse matemático. Isto é, problemas nos quais surgisse, de forma natural durante sua discussão, conceitos que os levassem a alcançar resultados, teoremas, fórmulas etc.

Depois de cada problema, e uma vez resolvido, se realizava uma discussão no grupo, fazendo um balanço do problema, analisando os erros, as dificuldades com que se haviam deparado e colocando claro o que tivéssemos obtido, particularmente os resultados e conceitos novos.

III. Alguns Exemplos

Para dar uma idéia mais completa citarei alguns exemplos dos problemas que foram usados, para que serviram e, finalménte, desenvolverei detalhadamente um deles, para melhor ilustração do método.

Os problemas aqui citados são apenas alguns dos que apresentamos no curso; não estão na mesma ordem em que lá apareceram nem na forma exata com a qual foram enunciados, pois alguns deles vinham imersos em uma história que os situava e, nesta exposição, estão retirados desse contexto.

1. Um senhor compra um cavalo por $ 10,000, o vende depois por $ 12,000; Se arrepende depois de ter vendido e o compra de volta por $ 14,000 e, finalmente, lhe oferecem $ 16,000 e ele o vende.

Ganhou ou perdeu? Quanto?

O problema provocou várias respostas diferentes:

"Ficou na mesma", "Ganhou 2,000", "Ganhou 4,000", "Ganhou 6,000" e provocou uma discussão acalorada entre as equipes formadas no grupo o qual, finalmente, se resolveu por uma via prática: tomaram moedas e "venderam" uns as outros alguns objetos. Foi o primeiro problema; e se colocou quase com o único objetivo de romper o gelo. Objetivo que se atingiu muito bem e que, além disso, deu ensejo a uma discussão intessante sobre a necessidade de se ordenarem os dados em um problema, de se descartar dos dados desnecessários e, finalmente, já que tinham sido incapazes de convencer uns aos outros sem recorrer a moedas, de se tornarem conscientes da dificuldade que têm de expressar um raciocínio matemático (por simples que seja), daí a necessidade de estabelecer uma linguagem simples e clara para todos.

2. Tem-se uma jarra com água e outra com vinho igualmente cheias. Toma-se uma colher de vinho e se despeja na jarra de água e da mistura obtida se toma uma colher e se despeja na jarra de vinho.

O que ficou mais: água no vinho ou vinho na água?

Nesse problema, atribuindo medidas numéricas ao conteúdo dos vasos e à capacidade da colher, resulta um problema aritmético interessante e difícil. Dando-lhes medidas "abstratas" x e y também resulta um problema interessante, e esses foram os caminhos que os alunos tentaram, dando oportunidade a muitas discussões, a erros aritméticos e algébricos que foram discutidos etc. Sem dúvida a solução desse problema se pode obter muito facilmente sem fazer um só cálculo.

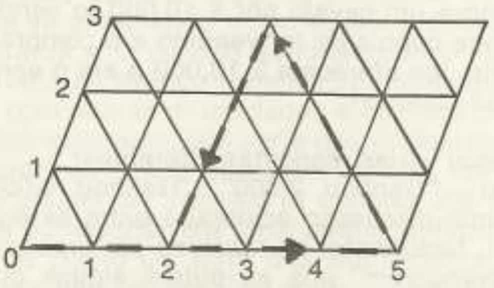
3. Tem-se uma fonte e duas jarras com capacidades n e m (por exemplo 4 e 9). Pode-se apanhar na fonte exatamente k litros? (por exemplo 7)

Depois de muitos exemplos concretos, variando n, m e k, como devem ser n, m e k para resolver o problema?

Daí se chega ao conceito de máximo divisor comum, ao conceito de combinação linear, ao de primos entre si e se dá oportunidade à formulação de alguns resultados simples relacionados com esses conceitos. Por outro lado, pode-se fazer um modelo geométrico para resolver qualquer caso.

Por exemplo:

Com jarras de 3 e 5 litros extrair 4 litros. Para isso desenhamos uma rede como a ilustrada aqui, de 3 por 5 e, partindo de 0, nos movemos sobre as linhas ricocheteando nas laterais, como se se tratasse de uma mesa oblonga de bilhar, passando de (0,0) a (5,0) a (2,3) a (2,0) etc, onde a primeira coordenada representa o conteúdo da jarra de 5 litros e a segunda o da jarra de 3 litros.

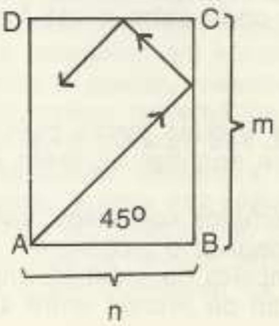


Isso também dá base para se discutir o que é um modelo, já que todos os "movimentos" válidos no problema original têm seu correspondente no modelo; (por exemplo, uma flecha assim ⟶ significa chegar a 5, uma flecha assim ↖, ir de 5 a 3 etc). Por outro lado se vê bem claramente que se um caso tem solução, então tem duas soluções, uma partindo assim ⟶ e outra assim ↗

3. Com n símbolos quantas palavras distintas de m letras se podem construir?

Esse problema serviu para introduzir Análise Combinatória e para explorar a numeração em bases diferentes de 10.

4. Tem-se uma mesa de bilhar n x m e se lança do canto A uma bola a 45°. Supondo que a bola não para e conhecendo n e m, em *quantos lados a bola toca antes de chegar a um canto? A que canto* chega?



Construindo muitos exemplos variando de n e m chega-se aos conceitos de primos entre si, máximo divisor comum, semelhança etc, porém o mais interessante no problema é que se pode chegar a enunciar teoremas como:

– Se m e n são primos entre si e ímpares se chega ao canto C.
– Se m e n são primos entre si o número de lados é n + m – 1

E vários outros que os próprios alunos colocam até finalmente abordarem o problema de fazer uma demonstração desses teoremas.

5. Dados 7 lugares e 6 objetos colocados como na figura,

X	X	X		0	0	0

trata-se de passar os 3 objetos da esquerda para a direita e vice-versa com as seguintes regras:

> Um objeto pode avançar só uma casa e pular um objeto do lado oposto. Não vale voltar nem pular objetos do mesmo lado.

A seguir exporei mais detalhadamente como se desenvolveram os trabalhos em classe.

Deixei-os pensar e discutir durante um espaço de tempo bem maior.

Houve diferentes formas de trabalho: uns pegaram papel e lápis, outros pegaram objetos (lápis, moedas etc).

Foi muito marcante o fato de que os que pegaram objetos resolveram antes que os que pegaram papel e lápis, porém mesmo aqueles primeiros demoraram muito a resolver. Quase todos se agruparam em pequenas equipes para discutir e, algum tempo depois, começou-se a escutar exclamações: "já saiu!"

Ia eu então a seus lugares e lhes pedia para ver como haviam feito. Tentavam outra vez e já não o conseguiam.

As exclamações se faziam cada vez mais frequentes e em nenhum dos casos conseguiam reproduzir corretamente, à minha frente, o que haviam feito.

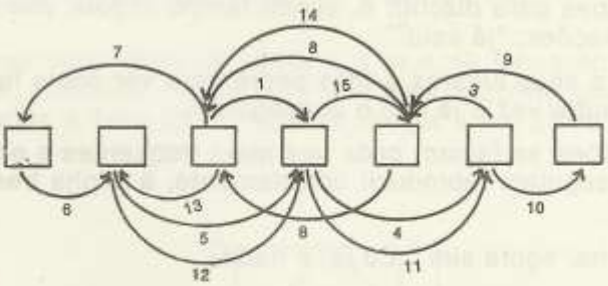
– "Veja, venha, agora sim". Eu ía, e nada.

Quando quase todos tinham chegado a resolver pelo menos uma vez, pedi-lhes que, antes de me chamarem outra vez, escrevessem para não se esquecerem. Antes que alguém conseguisse escrever uma resposta esgotou-se o tempo de aula (hora e meia), de modo que a tarefa não foi cumprida.

Para a aula seguinte havia um número grande de respostas; quase todos tinham resolvido bem o problema porém as formas pelas quais o escreveram eram muito diferentes.

X	X	X		O	O	O
X	X		X	O	O	O
X	X	O	X		O	O
X	X	O	X	O		O
X	X	O		O	X	O
X		O	X	O	X	O
	X	O	X	O	X	O
O	X		X	O	X	O
O	X	O	X		X	O
O	X	O	X	O	X	
O	X	O	X	O		X
O	X	O		O	X	X
O		O	X	O	X	X
O	O		X	O	X	X
O	O	O	X		X	X
O	O	O		X	X	X

ou em forma gráfica, como:



Outros tinham numerado os lugares (do 1 ao 7 ou de A a G) e escreviam:

3 a 4; 5 a 3; 6 a 5; 4 a 6; etc.

Outros escreviam:

3 a 4; 5 a 3; 6 a 5; 3 a 6; etc.

Apesar de parecerem distintas, ambas queriam dizer a mesma coisa. No 1º caso a idéia era o que está no lugar —— para o lugar-

—— ; e no segundo queriam dizer o que "originariamente" estava no lugar —— para o lugar ——.

Outros numeravam os objetos e escreviam: 3 ao centro, 4 no lugar do 3, 6 no lugar do 5, 3 no lugar do 6... etc.

Outros ainda usaram indicações diferentes para os lugares e para os objetos; por exemplo, números para os objetos, letras para os lugares e escreviam:

3 ⟶ D, 4 ⟶ C, 5 ⟶ E, 3 ⟶ F, etc

Depois de discutir as diferentes formas de escrever, de analisar as vantagens e as desvantagens de umas e outras e de escolher uma para ser usada por todos daí por diante (a última que se escreveu), pedí-lhes que tratassem de o fazer com 4 objetos de cada lado e 9 lugares. Demoraram muito menos do que com 3 e, além disso, todos escreveram corretamente. Ficou a tarefa de resolver para 2 e para 5.

Com os resultados da tarefa, na aula seguinte obtivemos a lista que segue.

Número de objetos por lado	Número de passos necessários
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Perguntei-lhes quantos passos seriam necessários para 6 objetos por lado.

Alguns rapidamente pegaram 12 objetos, outros simplesmente ficaram pensando, alguns outros escreviam.

Alguém gritou: "487".

Esperei um pouco, vários outros deram a mesma resposta. Perguntei-lhes a razão.

"É que as diferenças crescem de dois em dois; de 3 a 8 aumenta 5; de 8 a 15, 7; de 15 a 24 aumenta 9 e assim por diante."

1	3		
		5	
2	8		2
		7	
3	15		2
		9	
4	24		2
		1	
5	35		

Com esta regra continuamos a tabela até 10.

6	48
7	63
8	80
9	99
10	120