BOLETIM GEPEM

23

ANO XIII 2.º SEMESTRE 1988

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO

G E P E M

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

**APOIO FINANCEIRO DO
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA
– PADCT – CAPES –**

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Regina Monken

A Matemática do século XX pode ser caracterizada pela ênfase às noções de estrutura e axiomatização. O prof. Pitombeira nos conta um pouco da história da estruturação da Matemática. Destaca as idéias fundamentais do movimento que se chamou de "Matemática Moderna", segundo ele uma das forças propulsoras de tantas reformas ocorridas nas décadas de 50 e 60 e o maior experimento já feito em Educação Matemática.

Seu artigo é leitura obrigatória para quem se interesse pelo ensino da Matemática.

Como apêndice o prof. Pitombeira acrescenta o exame que Dieudonné fez sobre:

- os conhecimentos que os professores de Escolas de Engenharia gostariam que os estudantes dominassem ao final da Escola Secundária;
- o tipo de aluno que eles realmente recebem;
- como seria possível melhorar a situação existente, incluindo aqui uma sugestão de currículo por faixas etárias.

O prof. Radiwal traduziu para nós a aula inaugural de Junho/81 do Instituto de Educação da Universidade de Londres, dada pela profª Célia Hoyles, sobre Cultura e Computadores nas Aulas de Matemática. Nessa aula a Profª destacou desafios que se apresentam à Educação Matemática e mostrou como os computadores, principalmente a linguagem LOGO, podem auxiliar e se constituir num caminho para a pesquisa em educação matemática.

Preocupados com os altos índices de reprovação na 1ª série do 2º grau do Col. Pedro II/Centro, um grupo de professores vem realizando desde 1985 um trabalho de atendimento a alunos repetentes dessa série. O desenvolvimento desse projeto foi apresentado aos sócios do GEPEM na palestra mensal de 24/11/87. Ao publicar uma descrição do trabalho esperamos mais uma vez atender aos sócios que nem sempre podem comparecer às reuniões, julgando estar contribuindo com um exemplo que pode ser incentivo para outras iniciativas no atendimento a alunos com dificuldades na aprendizagem.

As prof$\underline{as}$ Katia Regina e Mª Antonieta, da rede estadual do RJ e auxiliares de pesquisa da UFF nos resumem as conclusões de sua pesquisa sobre o LIVRO DIDÁTICO, feita para o INEP em 85, onde analisam os livros de Matemática de 1ª a 4ª série do 1º grau comprados pela Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) em 1985 para distribuição em todo o território nacional em 1986.

Iniciamos ainda, neste número, a publicação das provas das Olimpíadas Estaduais de Matemática (RJ) a partir da 1ª fase/87. Prometemos para os próximos números a continuação.

AS IDÉIAS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA MODERNA

João Pitombeira de Carvalho
Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro-RJ

"Há muitos indícios claros de que estamos às vésperas de mudanças importantes, até mesmo radicais, em um currículo de matemática que permaneceu relativamente estável durante muito tempo. Em verdade, este seminário foi organizado devido à convicção de que estas mudanças são essenciais para o progresso, e que elas devem ser discutidas com imaginação e discernimento antes de serem postas em prática." (Discurso de abertura de Marshall H. Stone no Seminário Royaumont, de 23 de novembro a 4 de dezembro de 1959).

"...Não posso deixar de demonstrar um certo pessimismo sobre os resultados dos movimentos de renovação curricular e de reforma educacional das décadas de 60 e 70... Suspeito que provavelmente os resultados da experiência internacional com o movimento de reforma matemática... seja semelhante à americana, e que há muito o que aprender das respostas ao impulso de Royaumont e que tem significação para políticas educacionais em geral." (Resenha feita por Ian Westbury dos Anais da Conferência Internacional sobre Mudança e Estabilidade no Currículo de Matemática, Osnabruck, de 7 a 11 de janeiro de 1980).

No início dos anos 50 praticamente todos concordavam que o ensino de matemática havia fracassado. Mesmo nas nações mais ricas e desenvolvidas, a maioria dos alunos chegava ao fim de seus estudos secundários com péssimas notas em matemática e, o que é pior, sem quase nada saber dela. Os que ingressavam na universidade demonstravam total falta de preparo para o contacto com a matemática aí ensinada e suas aplicações. Esta situação era particularmente séria nos Estados Unidos, onde a tradição educacional permite grande liberdade ao estudante na escolha de que disciplinas estudar na escola secundária, com o resultado de que relativamente poucos alunos obtinham boa preparação em matemática. A situação em países como a França e a Inglaterra, com sistemas educacionais mais tradicionais não era tão má, mas havia queixas generalizadas sobre o currículo e o desempenho dos estudantes (2).

Logo no início da década começaram os trabalhos para modificar o ensino de matemática na escola secundária (3). Principalmente nos Estados Unidos, onde a descentralização do sistema escolar facilita experiências, os movimentos de reforma tomaram grande impulso, se estruturando em geral sob a forma de "projetos", modelo pedido emprestado à indústria e à pesquisa operacional. Em princípio, cada projeto deveria passar por três fases: pesquisa, desenvolvimento, difusão ou disseminação (4).

Os movimentos de reforma se multiplicaram; como diz Howson (5):

> "Durante as décadas de 60 e 70, quase todos os países (talvez todos) tentaram reformar radicalmente o currículo da matemática escolar. Este movimento de reforma pode com razão ser considerado como o maior experimento jamais feito em educação matemática. Naturalmente, não foi [um experimento] conduzido ao longo de linhas de pesquisa clássica: em geral não havia grupos de controle, as hipóteses eram frequentemente implícitas, e a avaliação, quando feita, era conduzida de maneira improvisada. Nos meados da década de 70, a fase de desenvolvimento de currículos terminou quase tão rapidamente como tinha começado".

A pressão mais forte e imediata para reformar o currículo de matemática da escola secundária e primária partiu em primeiro lugar da universidade. Dieudonné, na conferência que anexamos a este trabalho (6) deixa bem claro que sua preocupação é com a preparação matemática dos jovens que chegam à universidade. Kline(7) lembra o grande temor inspirado nos americanos pelo lançamento do satélite artificial soviético Sputnik, em 1957, que chamou a atenção para o despreparo científico e tecnológico americano.

Assim, a motivação inicial do movimento da matemática moderna(8) era a preparação pré-universitária dos jovens estudantes. Dieudonné, na conferência já citada, afirma não ter muito a sugerir sobre o que fazer com as crianças antes dos 14 anos, pois concorda com a orientação geral do ensino até esta idade. Howson diz(9):

> "...No entanto, a maior parte das tentativas no início dos anos 50 para modernizar os cursos introdutórios na universidade e para enriquecê-los com matemática mais exigente eram frustradas pelo baixo nível de compreensão e de conhecimentos matemáticos mostrados pelos estudantes que tinham concluído a escola secundária. Parecia essencial que os esforços para melhorar aquele nível tinham que principiar nas escolas. O currículo de matemática nas escolas secundárias e posteriormente das escolas primárias tornou-se um assunto preocupante para os matemáticos universitários. O resultado desta preocupação foi uma onda de reformas na matemática secundária muito mais abrangente e fundamental do que tinha sido inicialmente cogitado. Pois as mudanças planejadas

originalmente não tinham sido tão grandes, o que explica a ausência de qualquer levantamento ou análise ampla das práticas pedagógicas existentes. As correções a serem efetuadas eram simplesmente aquelas que se manifestavam aos matemáticos universitários como fraquezas óbvias do sistema escolar naquela época. Os problemas de método de ensino foram amplamente ignorados: em verdade, a ênfase anterior sobre a metodologia era considerada por muitos como causadora do desprezo pelo conteúdo.

O início da reforma foi portanto um período caracterizado por grande otimismo e confiança de que o problema poderia ser resolvido rapidamene e sem recursos complicados. Era um problema que os matemáticos achavam ter condições de resolver sozinhos."

Ou ainda:

"... (o movimento da matemática moderna) encarava a reforma do currículo de matemática em termos de uma renovação de conteúdo... e não questionava a prática pedagógica existente"(10).

É claro, todavia, que um movimento amplo e profundo de reformas curriculares, como aconteceu nas décadas de 50 e 60, não pode ter uma única causa nem uma única orientação. Ocupar-nos-emos de algumas linhas dominantes de influência. Nossa exposição privilegiará as reformas introduzidas inicialmente na escola secundária, para uma melhor preparação dos universitários, técnicos e profissionais de várias áreas, e que aos poucos desceram até a escola de primeiro grau. É o que Howson caracteriza como as reformas inspiradas na "matemática moderna", centradas no conteúdo. Outras reformas, inspiradas na linha estruturalista, deram atenção a vários outros aspectos, principalmente na escola primária(11).

Quais as idéias por trás do movimento que se chamou de "matemática moderna" e que foi uma das forças propulsoras para tantas reformas? Por quê esse movimento deu ênfase a certos tópicos e a certos métodos? Nesse trabalho, tentaremos fazer uma apresentação rápida das idéias fundamentais da matemática moderna, como seus defensores viam a matemática, e o que propunham para remediar a situação de seu ensino na escola secundária.

A matemática do Século XX repousa sobre as noções de estrutura e de axiomatização. Tal estruturação não foi feita subitamente, começou por volta de 1800, e seguiu quatro grandes correntes:

1- As extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra abstrata.
2- O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a axiomatização da geometria.
3- O desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica.
4- A aritmetização da análise e a percepção da necessidade de rigor nesta área.

Em primeiro lugar, é necessário chamar bem a atenção para o fato de que esses quatro movimentos simultâneos não foram gratuitos nem independentes. Explicitar detalhadamente a origem, gênese e consequências de cada um deles seria escrever todo um livro sobre a matemática dos séculos XIX e XX(12). Gostaríamos contudo de citar pelo menos um exemplo de relacionamento dos 4 ítens acima.

A teoria dos conjuntos, assunto tão polêmico na "matemática moderna", é um exemplo típico de como estas quatro correntes se interpenetram. Em geral, aparece como uma criação matemática independente, sem que se mostre como ela se relaciona com outras partes da matemática e que funções preenche. Diz-se no máximo que ela é importante para os fundamentos da matemática. No entanto, o criador da teoria dos conjuntos, o alemão Georg Cantor, chegou a ela não por acaso ou por simples "criar por criar". Ele estava estudando problemas delicados na teoria das séries de Fourier e percebeu que não era suficiente classificar os subconjuntos do conjunto dos números reais como finitos ou infinitos(13). Havia "várias" maneiras de um conjunto de números reais "ser infinito". De suas reflexões profundas sobre esse problema surgiu a teoria dos conjuntos. Em particular, Cantor percebeu que a ferramenta apropriada para comparar dois conjuntos infinitos é a noção de correspondência bijetora (um-a-um) entre seus elementos: dois conjuntos têm o "mesmo número de elementos" se podem ser postos em correspondência bijetora. Assim, explicitou-se e formalizou-se um processo que está por trás de toda contagem, e que vinha sendo usado desde os primeiros passos do homem no caminho da construção da matemática.

Bem cedo, percebeu-se a importância das idéias de Cantor não só para a análise mas para outras áreas de matemática. A teoria dos conjuntos, como objeto de investigação independente, levou às chamadas antinomias (leia-se contradições) e deu origem a muitos desenvolvimentos no estudo dos fundamentos da matemática. Ela foi usada por Frege na tentativa de reconstruir toda a matemática a partir da noção de conjunto, usando as leis da lógica formal(14). Permitiu, além disso, que se completasse a análise cuidadosa da noção de número, iniciada com a necessidade de tornar o cálculo infinitesimal rigoroso, possibilitando a construção dos números naturais a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos(13).

Ao mesmo tempo em que se tentava tornar rigorosa a noção de número, o matemático alemão David Hilbert completava um desenvolvimento principiando com a "descoberta" das geometrias não-euclidianas por Bolyai, Gauss e Lobatschevsky, axiomatizando a geometria euclidiana(16), e mostrando que ela é tão consistente quanto a aritmética dos números reais(17). O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a subseqüente axiomatização da geometria euclidiana tiveram conseqüências profundas para a percepção do que é o método axiomático. Hilbert tentou, além disso, "formalizar" toda a matemática, criando, juntamente com seus alunos, a chamada escola "formalista" a fim de mostrar que os métodos geralmente aceitos na matemática, tomada como um todo, não conduzem a contradições (o chamado "programa de Hilbert")(18). Dieudonné, de maneira algo exagerada, diz que a influência de Hilbert na matemática foi marcante tanto devido a suas descobertas realmente profundas e geniais, mas ao ponto de vista axiomático que adotou. Segundo Dieudonné, a contribuição essencial de Hilbert à matemática do século XX foi que "...(ele) ensinou os matemáticos a pensarem axiomaticamente, ou seja, a reduzir cada teoria específica estudada a um esquema lógico consistente."(19).

O uso do método axiomático é sem dúvida uma das características fundamentais da matemática contemporânea. O emprego dele deve ser entendido corretamente. Nenhum matemático, nem mesmo aqueles que trabalham nos fundamentos da matemática ou em lógica formal, "descobre" teoremas usando o método dedutivo(20). O processo de criação matemática é, como o processo de criação artística em geral, informal, intuitivo, meio-inconsciente, usa analogias, passagens formais não justificadas, etc. Somente após ter chegado a seus resultados, é que o matemático lhes dá a forma final lógico-dedutiva que aparece nos livros e artigos de pesquisa. Esta imposição do método dedutivo é a maneira que os matemáticos têm de se policiar e de se disciplinar para não incorrer em erros. E a experiência dos últimos séculos mostra como é fácil errar, se não se tomam os cuidados necessários(21). De maneira algo anedótica, René Thom salienta bem a diferença entre criar matemática e a exposição lógico-dedutiva em que esta criação é registrada em sua forma final, dizendo que fazer demonstrações não é missão dos matemáticos.

Quanto ao rigor matemático, pensa-se hoje que "não se trata de um conceito absoluto, independente do tempo; é uma construção histórica inseparavelmente ligada à prática da pesquisa matemática"(22). Como dito por Glaeser, o rigor não constitui um fim, mas uma ferramenta para conseguir um bom rendimento no trabalho(23).

O coroamento destas tendências de encarar a matemática como estruturas e de apresentar cada uma delas de maneira axiomática, encontra-se na obra do grupo de matemáticos que se intitulou Nicolas Bourbaki. A partir da década de 40, esse grupo de jovens matemáticos franceses incumbiu-se da missão de re-escrever toda a matemática conhecida, apresentando axiomaticamente suas grandes estruturas.

A motivação que os levou a empreender tal tarefa foi a percepção de que a matemática do século XX, quanto mais se desenvolvia, mais mostrava sua unidade profunda. Assim, percebeu-se que certas estruturas básicas estão presentes em várias teorias matemáticas, e que um estudo sistemático das relações entre elas, desnudando o que têm de comum, e apresentando automaticamente este núcleo comum, deixaria bem clara a unidade profunda e orgânica da matemática(24).

Há em matemática muitas estruturas. Por exemplo, as de grupo, de corpo, de anel, de espaço vetorial, de espaço topológico, de espaço métrico, etc. A estrutura de grupo, conjuntamente com a de espaço topológico, dá origem à de grupo topológico, de que os números reais, com a operação de soma usual, são um exemplo.

Ao se debruçar sobre a grande variedade de estruturas estudadas na matemática do Século XX, Bourbaki identificou o que chama de *estruturas-mãe*, que são as estruturas algébricas, as estruturas de ordem, e as estruturas topológicas. Elas, combinadas convenientemente, gerariam todas as outras.

Trata-se certamente de um programa extremamente ambicioso. Devemos salientar que Bourbaki propôs-se apresentar a matemática, e não um método de como criar matemática. Em seus escritos sobre como via a matemática, sua "filosofia da matemática", o grupo sempre chamou a atenção para a componente criativa da matemática, que não pode ser codificada ou reduzida a normas lógicas estritas.

Esta tensão que existe entre a criação e a formalização é parte essencial da matemática do século XX. Glaeser(25) diz a este respeito:

"Quando René Thom afirma... que "a axiomática não produziu nenhum teorema novo de certa importância" tem razão, mas não torna sua idéia suficientemente precisa. Se Thom quer dizer que o trabalho no "vazio", sem nenhuma referência a problemas interessantes, com sistemas axiomáticos-artificiais, somente pode produzir resultados medíocres, temos que dar-lhe razão. Porém todos os progressos importantes realizados nos últimos trinta anos – um período de descobertas matemáticas excepcionalmente fecundo – têm aproveitado a existência de meios de expressão formal e semântica que procedem diretamente do trabalho axiomático.

O próprio Thom participou desse esforço, com seu temperamento peculiar. E não foi por acaso que um matemático como Hassler Whitney, cujos trabalhos são particularmente apreciados por Thom, e que resolveu alguns dos problemas mais importantes e difíceis no domínio da análise e da topologia diferencial, tenha contribuído igualmente para a elaboração de algumas teorias axiomáticas fundamentais (variedades diferenciais, produtos tensoriais, estratificações, classes características, etc.). Em verdade, a partir de problemas que surgem de maneira natural, se realiza, entre outras, uma atividade e clarificação axiomática que forma parte integrante da descoberta".

O programa de Bourbaki teve muita influência. Quando se iniciou, foi acolhido com entusiasmo. Havia então um grande abismo entre a matemática que se criava nas universidades e institutos de pesquisa e a que se ensinava nas escolas, e isto foi uma das motivações para sua proposta de se rever o ensino de matemática no curso secundário(26). Particularmente na França, o ensino da matemática tinha se tornado sinônimo de problemas sutis e complicados sobre a geometria do triângulo, manipulações algébricas capciosas, etc.

Segundo Howson(27), a influência de Bourbaki foi tão grande que deu origem ao movimento da matemática moderna. Para ele, Bourbaki

"Tinha oferecido em seu tratado uma descrição sistemática da matemática, reorganizada de maneira a enfatizar as considerações estruturais e apresentada em uma linguagem uniforme com grande precisão. Devido à sua clareza e à maneira majestosa em que ela pouco a pouco se envolve, a apresentação estrutural oferece uma maneira convincente, (ou, talvez, tentadora) de organizar e apresentar o ensino da matemática nas universidades. Em comparação, o conteúdo da matemática escolar parecia não ter nem exatidão nem organização sistemática. Foi assim fornecido um estímulo para reformar a matemática escolar tradicional... A reorganização resultante teve como resultado mudanças significativas na seleção e no tratamento matemático do conteúdo (ensinado). Nas escolas elementares, o conteúdo, principalmente trabalho com números, não mudou muito, mas certamente houve mudanças na maneira de desenvolvê-lo – a partir da teoria dos conjuntos – e na ênfase dada aos aspectos estruturais, por exemplo, as leis comutativa, associativa e distributiva. Certos tópicos tradicionais da escola secundária, como a geometria euclidiana e a trigonometria avançada, foram postos de lado, por não terem nenhuma função significativa no novo sistema, e em seu lugar foram introduzidas as probabilidades, a estatística e a informática. O princípio básico de Bourbaki, a dedução do conteúdo a partir dos axiomas, também passou a ocupar posição central no ensino da matemática. Conteúdos que não se prestavam a um enfoque axiomático, como por exemplo muitas das aplicações da matemática, foram relegados a um plano secundário: a capacidade de fazer uma demonstração matemática e de raciocinar logicamente foi considerada mais importante do que a aquisição de "perícia trivial para calcular"... Como resultado desta reorganização, tornou-se possível tratar domínios da matemática bastante sofisticados bem cedo na educação das crianças... O método [de Bourbaki], no entanto, não diz nada sobre como tais conceitos básicos poderiam ser introduzidos nos níveis elementares de maneira consistente com a organização sistemática do material..."

Uma exposição bem "pura" e cristalina das intenções dos que esposaram as idéias da matemática moderna, como aplicação da maneira de Bourbaki apresentar esta ciência, encontra-se na palestra que Jean Dieudonné(28) fez em um seminário promovido pela OEEC (Organização para a Cooperação Econômica Européia) em Royaumont, em 1959. Devido à clareza das idéias, ao prestígio do autor e a seu estilo incisivo e vigoroso, trata-se de um texto de leitura obrigatória para todos os que se interessam por uma análise da matemática moderna. Além disso, as idéias de Dieudonné neste trabalho, muito citado mas pouco lido, têm sido frequentemente deturpadas. A leitura do texto permite uma visão mais justa e equilibrada da "proposta Bourbaki". Algumas das idéias expostas nesta conferência são repetidas ou mais desenvolvidas no prefácio de(29).

As idéias de Bourbaki, de matemáticos profissionais preocupados somente com o conteúdo de sua ciência, foram reforçadas pelas posições de Piaget e seus alunos sobre a psicologia do desenvolvimento da inteligência. Segundo Piaget(30)

"... Por um processo que é à primeira vista paradoxal, embora em verdade psicologicamente natural e claramente explicável, as estruturas mais abstratas e gerais da matemática contemporânea são muito mais ligadas às estruturas operacionais naturais da inteligência e do pensamento do que o eram as estruturas particulares que enquadravam a matemática e o ensino clássicos".

E ainda(31):

"... Pelo contrário, cremos que existe, em função do desenvolvimento da inteligência em seu conjunto, uma construção espontânea e gradual das estruturas lógico-matemáticas elementares, e que estas estruturas "naturais"... estão muito mais próximas das utilizadas pelas matemáticas chamadas "modernas" do que as que intervinham no ensino tradicional.

...

Outra coincidência interessante reside no fato de que, a partir do nível das operações concretas,... encontramos um equivalente elementar das três "estruturas-mãe" de Bourbaki, o que torna manifesto o caráter "natural" destas estruturas".

No entanto, é necessário cuidado na interpretação dessas declarações de Piaget como sendo um endosso da matemática moderna(32).

"Uma interpretação superficial seria enganosa. A matemática piagetiana poderia ser vista como uma combinação de aprendizagem por descoberta com a "matemática moderna". Isso está errado por duas razões. Em primeiro lugar, pode-se argumentar que, quando Piaget menciona "[ser essencial] compreender uma teoria por meio de sua redescoberta", tinha em mente algo muito mais dialético do que o ensino pela redescoberta, como esse termo é geralmente usado em educação matemática. Nesta última acepção, seu significado [do ensino pela redescoberta] está baseado em técnicas heurísticas desenvolvidas basicamente por Polya(33)... A idéia de Piaget parece ser mais semelhante ao ciclo evolucionário de conjectura, demonstração e refutação por contra-exemplos proposto por Lakatos(34). Em segundo lugar, a matemática moderna a que se refere Piaget consiste nas "estruturas-mãe" de Bourbaki e na teoria das categorias de Mac Lane(35). Isso é bem diferente da teoria dos conjuntos que forma a base da matemática moderna. Pode ser possível identificar os "aspectos fáceis" de Bourbaki e da teoria das categorias e trazê-los para um nível elementar, como foi feito com a teoria dos conjuntos. No entanto, isso ignora e pode reforçar um aspecto muito anti-Piagetiano da matemática moderna (e uma das razões por que se considera frequentemente hoje que ela falhou). Ou seja, que as estruturas são impostas de cima. Ela [a matemática] não parte das estruturas informais que a criança já possui. Pode-se dizer que ela tenta ensinar a criança a pensar sobre o pensamento de alguma outra pessoa, e não sobre seu próprio pensamento [da criança].

O importante [no comentário de Piaget]... não é que o currículo deve incluir seu tipo de matemática moderna. Em vez disso, é que aquilo que é ensinado deveria, em princípio, conduzir naturalmente a estas noções e a outras como elas, mesmo se muitas delas não foram encontradas explicitamente antes..."

Como exemplo de aplicação das idéias sobre a matemática expostas acima, temos o trabalho do professor Howard Fehr, da Universidade de Columbia, que organizou, com sua equipe, em 1965, o primeiro grande projeto de reforma do ensino da matemática baseado na chamada matemática moderna, adotando o ponto de vista de Bourbaki. Coerentemente com as idéias de ressaltar a unidade da matemática e a economia de pensamento proporcionada pelo método axiomático-dedutivo, deu ênfase, nos materiais elaborados em seu projeto (o Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study – SSMCIS), aos conceitos de conjuntos, operações, aplicações entre conjuntos, relações e estruturas. Na explicitação destas noções, seguindo a filosofia geral de todos os projetos inspirados nas idéias do grupo Bourbaki, foram enfatizados(36):

1 - Insistência sobre as idéias abstratas: fechamento, inversa de uma operação, par ordenado, conjunto vazio, relação de equivalência, densidade do conjunto de números racionais (nos reais), e, finalmente, as extensões da noção de número.

2 - Maior cuidado com o rigor lógico: existência de termos não definidos, proposições relacionadas com uma proposição dada (a negação, a recíproca, e a contrapositiva), equivalência lógica, pepel das definições e hipóteses, o significado de implicação lógica, a validez e a verdade, as demonstrações formais [das propriedades] da multiplicação de números negativos, etc...

3 - O uso de um vocabulário contemporâneo. Falamos, por exemplo, de proposições abertas e de tabelas de verdade, de semi-retas, semi-planos, regiões, curvas simples, polígonos convexos, números naturais e números reais, domínio e contra-domínio, conjuntos, subconjuntos e subconjuntos próprios, etc.

4 - A insistência na precisão da linguagem, o que dá lugar a distinções sutis e a definições bastante formais. Temos assim que considerar números e numerais, as raízes de uma equação e o conjunto de soluções, as frações e os números racionais, as funções e as relações, as incógnitas, triângulo definido como a união de três pontos que não são colineares e dos segmentos que os unem, etc.

5 - A insistência em idéias matemáticas "novas", incluindo, entre outras, a linguagem da teoria dos conjuntos, os diagramas de Venn, as mudanças de base, o conjunto dos números reais, a estrutura lógico-dedutiva da aritmética e da álgebra, a aritmética modular, as desigualdades, as relações (com suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva), as funções, as geometrias não-métricas, a axiomática em geral e o caráter axiomático da geometria em particular, os fundamentos da lógica e a natureza da medida.

Uma crítica extremamente virulenta, quase caricatural, de um tal conteúdo pode ser encontrada em (37).

Apresentamos, assim, as idéias que orientaram o movimento da "matemática moderna" em sua origem. O estudo de sua propagação, influência, e os porquês de sua contestação bem generalizada, principalmente a partir dos meados da década de 70 merecem outro trabalho. Como já dissemos, é impossível, dentro dos limites de um artigo, fazer um levantamento de todos os desenvolvimentos do assunto e das controvérsias que ele fez surgir. Agora, que o movimento já tem mais de vinte e cinco anos, pode-se começar a historiá-lo com isenção de ânimo, tentando ver seus pontos positivos e negativos. É inegável que ele marcou indelevelmente o ensino da matemática elementar. Repetindo as palavras já citadas de Howson(38), o movimento da matemática moderna foi o maior experimento já feito em educação matemática. Assim, qualquer pessoa que se interesse pelo ensino da matemática, quer do ponto de vista acadêmico, de pesquisa, quer do ponto de vista histórico, quer como professor engajado pessoalmente no ensino, deveria tomar conhecimento deste assunto. Sua compreensão é essencial para entender porque se ensina matemática como hoje em dia.

APÊNDICE

NOVAS IDÉIAS NA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Jean Dieudonné.

Minha tarefa específica hoje é examinar, do ponto de vista do currículo de matemática atual nas universidades e escolas de engenharia(39):

a) Que conhecimentos de matemática os professores destas instituições gostariam que as crianças tivessem, ao fim de sua educação secundária.

b) Que tipo de aluno eles realmente recebem.

c) Como seria possível melhorar a situação existente.

Nos últimos cinquenta anos, os matemáticos introduziram não somente novos conceitos mas uma nova linguagem, que cresceu empiricamente das necessidades da pesquisa matemática e cujo poder para exprimir afirmativas matemáticas de maneira concisa e precisa tem sido repetidamente testado e [que] ganhou aprovação universal.

Mas até agora a introdução desta nova terminologia tem sido (pelo menos na França), ferozmente combatida pelas escolas secundárias, que se apegam desesperadamente a uma linguagem obsoleta e inadequada. Assim, quando um estudante chega à universidade, quase que certamente nunca terá ouvido falar de palavras comuns da matemática como conjunto, aplicação, grupo, espaço vetorial, etc. Não espanta que se sinta confuso e desencorajado em seu contacto com a matemática superior.

Alguns elementos de cálculo, álgebra vetorial e um pouco de geometria analítica foram recentemente introduzidos nos dois ou três últimos anos da escola secundária. Mas tais tópicos têm sido sempre relegados a uma posição subalterna, o centro de interesse permanecendo, como antes, a geometria pura ensinada mais ou menos como Euclides, com um pouco de álgebra e de teoria dos números.

Acho que os dias de uma tal colcha de retalhos estão contados, e estamos comprometidos com uma reforma muito mais profunda – a não ser que estejamos dispostos a deixar que a situação se deteriore ao ponto em que impedirá seriamente qualquer progresso científico. E se todo o programa que tenho em mente deve ser resumido em um slogan, esse slogan seria: Abaixo Euclides!

Esta afirmação talvez choque alguns dos senhores, mas eu gostaria de mostrar-lhes detalhadamente os argumentos em seu favor.

Foi graças aos gregos que erigimos a estrutura majestosa da ciência moderna. Mas, ao fazer isso, as noções básicas da geometria foram profundamente examinadas, especialmente desde os meados do século dezenove. Isso tornou possível reorganizar o conteúdo da geometria euclidiana, colocando-o sobre alicerces simples e sólidos, e reavaliar sua importância em relação à matemática moderna – separando o que é fundamental de um monte caótico de resultados que não têm nenhum significado exceto como relíquias dispersas de métodos grosseiros ou obsoletos(40).

O resultado talvez seja um pouco surpreendente. Suponhamos, que se deseja ensinar geometria euclidiana a mentes maduras do outro planeta que nunca ouviram falar dela, ou ensiná-la tendo como objetivo sua aplicação possível à pesquisa moderna. Então, todo curso poderia, acho eu, ser dado em duas ou três horas – uma ocupada pela descrição do sistema de axiomar, outra pelas consequências úteis deles, e possivelmente uma terceira hora por alguns exercícios razoavelmente interessantes.

Todo resto, que agora enche volumes de "geometria elementar" – e incluo aí tudo sobre triângulos (é perfeitamente possível e desejável descrever toda a teoria sem mesmo definir um triângulo!)... – é tão relevante ao que os matemáticos (puros e aplicados) fazem hoje quanto os quadrados mágicos e os problemas de xadrês!

Se isso parece fantástico, deixem-me dar alguns detalhes [Dieudonné apresenta então (A) os axiomas de um espaço vetorial real de dimensão dois; (B) de um produto interno].

O que eu chamei de consequências úteis são, por um lado, a álgebra linear bi-dimensional (dependência linear, bases, retas, o grupo de translações e aplicações homotéticas, retas paralelas, aplicações lineares, formas lineares e equações de retas), que é dedutível do sistema de axiomas (A), e constitui o que é também chamado geometria afim plana, e, por outro lado, ortogonalidade, círculos, rotações, simetrias, ângulos e o grupo de simetrias, noções que provêm do grupo (B).

Naturalmente, deste ponto de vista, a velha disputa entre geometria "pura" e "analítica" se torna sem sentido, pois ambas são simples traduções de linguagem de vetores (que, a propósito, vale mais a pena frequentemente aplicar diretamente). É claro como a geometria de três dimensões pode ser desenvolvida no mesmo espírito.

Contrastando com esta maneira "ideal" de ensinar geometria, não preciso contar-lhes o que é hoje em dia realmente feito nas escolas secundárias. As noções básicas (ponto, reta, distância, ângulo) não recebem nunca uma definição axiomática estrita; são introduzidas baseando-se diretamente na intuição, embora nunca sejam explicadas suas relações com os objetos físicos de que são representações "ideais". Como não é dado nenhum sistema completo de axiomas, é naturalmente impossível verificar se qualquer demonstração apresentada está ou não correta.

Os defensores da tradição a qualquer preço têm, naturalmente, uma resposta pronta para isso. Acreditando-se neles, a geometria euclidiana, ensinada de sua maneira, é o único método pelo qual a mente da criança pode ser aberta para uma compreensão real da matemática. No entanto, como nenhum outro método foi jamais tentado, não vejo como aceitar esta afirmação a não ser como um artigo de fé(41).

Acrescentarão que, apesar disso, os grandes matemáticos do passado e do presente foram educados desta maneira e isso não os impediu de fazerem suas descobertas. Isso é certamente verdadeiro, mas estou convencido de que se esses matemáticos não tivessem aprendido nada até a idade de, por exemplo, 16 anos, teriam, muito provavelmente, se saído igualmente bem.

Gostaria de salientar, além disso, que todas essas discussõs não são relevantes. Ninguém deveria ocupar-se, pelo menos nas escolas secundárias, com o ensino de futuros matemáticos profissionais (sem falar dos realmente excepcionais), de que talvez haja um em cada 10.000 crianças. O que está realmente em jogo é o tipo de imagem mental da matemática incutida na mente do estudante inteligente médio após ter sido submetido a esse tratamento durante vários anos(42).

Se tivéssemos um currículo enfim livre do peso morto da "geometria pura" o que colocaríamos no lugar dela? Já mencionei rapidamente alguns dos tópicos que formariam uma preparação extremamente valiosa para teorias de nível superior; mais detalhadamente, gostaria de listar os seguintes:

a) Matrizes e determinantes de ordem 2 e 3.
b) Cálculo elementar (funções de uma variável).
c) Construção do gráfico de uma função e de uma curva dada parametricamente (usando derivadas).
d) Propriedades elementares dos números complexos.
e) Coordenadas polares.

Afirmo que nenhum desses tópicos é mais abstrato ou exige pensamento mais profundo do que a geometria clássica, desde que o ensino de cada um deles seja adaptado ao desenvolvimento intelectual dos estudantes. Isso significa, naturalmente, que continua a haver vários grandes problemas, o principal sendo o de organizar o material em um currículo bem equilibrado e de criar métodos para ensiná-lo(43).

. . .

Com estas idéias em mente, voltemo-nos para um esboço do que julgo deveria ser um currículo moderno. Dividi-lo-ei segundo a idade dos estudantes (a fim de evitar problemas de peculiaridades nacionais e de distribuição por várias séries); e em cada nível discutirei os aspectos "experimentais" e "dedutivos" dos vários tópicos.

Idades até os 14 anos(44). É provavelmente sábio limitar o ensino da matemática nesse grupo a trabalho "experimental" com álgebra e geometria plana e não fazer nenhuma tentativa de axiomatização. Isso não quer dizer que não devessem ser enfatizadas as inferências lógicas, sempre que for possível mostrá-las de maneira bem clara e óbvia.

Em álgebra, o objetivo deveria ser tornar o estudante completamente familiarizado com o cálculo literal, a noção de número negativo, e a resolução de problemas lineares com uma ou duas incógnitas; isso é essencialmente o que é feito hoje, e não tenho portanto nenhuma modificação a propor aqui, excetuando que eu gostaria de ver mais horas gastas com álgebra do que com geometria, nesse estágio.

Em relação à geometria, sei que há muitas pesquisas e experimentos nos últimos anos... sobre os métodos de como ensinar a geometria como parte da física(45). Acho que esse desenvolvimento deveria ser altamente encorajado, desde que enfatize não objetos artificiais como os triângulos, mas sim as noções básicas tais como simetrias, translações, composições de transformações, etc.

Finalmente, em toda esta matemática "experimental", a linguagem e a notação hoje universais deveriam ser introduzidas tão cedo quanto possível: não há nada misterioso ou amedrontador em abreviar "pertence a" por $\in$ ou "acarreta" por $\Rightarrow$, ou falar de "subconjunto do plano" em vez de "lugar geométrico". É chamar um objeto por seu nome apropriado – como "grupo" ou "relação de equivalência" sempre que esse objeto for naturalmente observado em algum contexto geométrico ou algébrico – não implica que tenhamos de desenvolver anteriormente a teoria abstrata dos grupos ou das relações de equivalência.

Se for julgado apropriado, do ponto de vista psicológico, começar com alguma axiomatização neste nível, então, segundo nosso princípio geral, deveríamos procurar a parte da matemática com que as crianças tiveram mais contacto "experimental" até então, ou seja, a aritmética.

Com efeito, é um dos mais simples e mais belos exercícios de lógica desenvolver as leis usuais da aritmética a partir dos axiomas de Peano, e não vejo nenhuma razão para que isso não seja tentado o mais cedo possível(46).

...

É desnecessário salientar que isso não deveria ser tentado antes de que se possa fazer o estudante perceber a necessidade de um tal tratamento axiomático; [isso pode ser feito] encorajando-o a pensar o que quer dizer um inteiro muito grande e por que podemos aceitar a validez das leis da aritmética para tais objetos completamente fora de nossa percepção intuitiva; mas acho que não necessito frizar estes problemas, que os senhores dominam muito melhor do que eu.

● *Idade de 14 anos*. Do ponto de vista "experimental" é esta a idade em que é introduzida a idéia do gráfico de uma função, e isso certamente não deveria ser adiado para mais tarde. O método geral de resolver a equação $f(x)=O$ com ajuda do gráfico de $y=f(x)$, deveria ser imediatamente relacionado com esta idéia juntamente com os vários processos de aproximação (Lagrange, Newton) para o cálculo numérico das raízes, que são consequência dela.

A ênfase aqui deveriam ser as soluções aproximadas, e nunca as "fórmulas fechadas" para as raízes; o estudante deveria ser prevenido de que nunca deve esperar encontrar tais fórmulas, excetuando casos especialíssimos. Em particular, a fórmula para a resolução de uma equação quadrática deveria apenas ser mencionada nesse estágio e nenhum estudo especial deveria ser devotado àquele tipo de equação...

Do ponto de vista lógico, agora, após vários anos de álgebra, parece chegado o momento para uma descrição axiomática dos números reais. Com isso, não quero dizer naturalmente a construção tradicional dos números reais por meio de cortes de Dedekind ou sequências fundamentais de Cantor, partindo dos números racionais...

O que tenho em mente é bem mais modesto, (e também muito mais útil e esclarecedor). Consiste simplesmente em listar as propriedades básicas dos números reais a partir das quais todas as outras podem ser deduzidas logicamente. É bem conhecido que estas propriedades podem ser resumidas dizendo que os números reais formam um corpo arquimediano ordenado, no qual vale o princípio dos intervalos encaixados.

● *Idade de 15 anos.* A esta altura, o estudo anterior da geometria *plana* do ponto de vista experimental deveria ter preparado o estudante para o enunciado dos axiomas (A) e (B) como dado acima. As consequências destes axiomas deveriam, naturalmente, ser desenvolvidas do ponto de vista geométrico e algébrico, i.e., todas as noções deveriam ser apresentadas com ambas as interpretações. Como feito geralmente, a ênfase deveria ser sobre as transformações lineares, seus váris tipos e os grupos que elas formam. As matrizes e determinantes de ordem 2 aparecem de maneira natural durante esse desenvolvimento.

Quando isso tiver sido feito, o estudo "experimental" da matemática da escola secundária propriamente dita terá sido concluído, pois todos os axiomas já terão sido formulados. Mas no estudo de qualquer teoria há ainda espaço para mudanças de ênfase, quer para o aspecto técnico quer para o aspecto conceitual das noções que devem ser introduzidas. E, segundo nosso princípio, qualquer teoria nova tem mais chances de ser assimilada por meio de seus aspectos técnicos do que enfatizando pontos delicados de dedução lógica.

Isso se aplica em particular ao início do cálculo diferencial para funções de *uma* variável, que julgo se enquadrar melhor nesta faixa de idade. Assim, não vejo nenhum problema no ensino desse tópico atualmente, desde que as noções centrais de limite e de continuidade tenham sido corretamente definidas; é aconselhável omitir as demonstrações de todos os teoremas do cálculo (mas devem-se dar seus enunciados precisos), e concentrar-se sobre as técnicas práticas do cálculo das derivadas e de seu uso para traçar gráficos de funções e resolver equações.

● *Idade de 16 anos.* A parte axiomática deveria continuar a desenvolver as consequências dos axiomas, como um estudo mais profundo dos grupos da geometria plana e, em particular, o uso de ângulos e das funções trigonométricas. A "medida" de ângulos deveria ser definida de maneira precisa (como um homomorfismo do grupo dos números reais sobre o grupo das rotações) mas sua existência aceita sem demonstração. Com isso naturalmente surge a introdução dos números complexos e de sua interpretação geométrica.

Finalmente, um outro tópico de interesse poderia ser a discussão de todas as formas quadráticas possíveis no plano, o que é equivalente à classificação das cônicas.

Sob o aspecto das "técnicas", poder-se-ia iniciar o estudo da noção de primitiva e de área para tipos simples de regiões do plano, com exemplos elementares. O estudante deveria também começar a aprender como traçar curvas dadas sob forma paramétrica.

● *Idade de 17 anos.* Neste ano final da escola secundária, os axiomas da geometria tri-dimensional deveriam enfim ser introduzidos, juntamente com suas consequências usuais, incluindo naturalmente o uso de matrizes e determinantes de ordem 3.

Sob um ponto de vista mais técnico, poder-se-ia explicar o uso de primitivas para calcular tipos simples de volumes, e introduzir a noção de coordenadas polares e o método de construção de uma curva dada por suas equações em coordenadas polares.

Finalmente, os logaritmos e as exponenciais podem ser certamente definidos e estudados nesta idade (sem demonstrações de existência), enfatizando o fato de que são homomorfismos de grupos.

Para finalizar, deixem-me indicar em poucas palavras como esse currículo poderia ligar-se naturalmente com o programa atual dos primeiros anos da universidade. Aí, os tópicos principais são:

a) Álgebra linear em sua forma geral (espaços vetoriais de dimensão arbitrária, teoria geral dos determinantes e matrizes).

b) Formas quadráticas e espaços vetoriais euclidianos de dimensão finita.

c) Derivadas e integrais de funções de várias variáveis reais, com suas aplicações. Equações diferenciais ordinárias e parciais. Geometria diferencial elementar.

d) Teoria elementar dos espaços métricos, espaços de Banach, espaços de Hilbert e outros espaços funcionais. Análise funcional elementar.

BIBLIOGRAFIA

BLUMENTHAL, L.M. – A Modern Introduction to Geometry, New York, Dover, 1980.

BOURBAKI, N. – L'Architecture des mathématiques, F. le LIONNAIS (ed.) Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, Paris, Blanchard, 1962.

BOYER, C.B. – A History of Mathematics, New York, John Willey & Sons, 1968.

BRUNER, J.S. – On Learning Mathematics, The Mathematics Teacher, vol 53, 1960, pp.610-619

CAVAILLES – L'Epistémologie d'une Science comme Construction du Concept de son Histoire, Bulletin de la Société Française de Philosophie, 196.

DAVIS, P.J. e Hersh, R. – A Experiência Matemática, Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1985.

DIENES, Z.P. – The Six Stages in the Process of Learning Mathematics, NFER, 1973.

DIEUDONNÉ, J. – Algebre Linéaire et Géométrie Elémentaire, Paris, Hermann, 1964.

DIEUDONNÉ, J. – New Thinking in School Mathematics, NEW THINKING IN SCHOOL MATHEMATICS, Paris, OEEC, 1961, pp. 31-45 (reproduzido em HOWSON, 1981, pp. 101-107).

EBBINGHAUS, H.-D. – Mathematical Logic, New York, Springer, 1984.

FREUDENTHAL, H. – Review of Linear Algebra and Elementary Geometry (Algebre Linéaire et Géométrie Elémentaire) by J. Dieudonné, American Mathematical Monthly, 74(1967), pp. 744-748, (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 285-290).

GLAESER, G. – La Transmission des Conaissances Mathématiques Hier, Aujourd'hui, Demain. L'Enseignement Mathématique 18(1972) pp. 277-289 (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 208-218).