não conseguimos vencer este desafio, nem pelo ensino tradicional vigente, nem pela Assimilação Solidária, nem por qualquer outra pedagogia conhecida, enquanto NÓS não conseguimos resolver este problema, que fazemos? Vamos reprovando? Não? Então temos de mexer diretamente no processo de seleção.

No entanto sua colocação não está boa pelo seguinte. Não é o professor que deve aceitar esse desafio. Esse é um desafio das classes dominantes que propõe a escola como veículo de mobilidade, senão de igualdade social. Nesse jogo o professor é um agente assalariado. Quem diz que é possível ter o mesmo ponto de chegada para todas as séries ou para indivíduos que partem de pontos diferentes, com origens de classes diferentes? Até hoje não se dispõe de um conjunto de atividades que levem um indivíduo X a adquirir um conteúdo Y num tempo T. O que a Assimilação Solidária faz é transferir a responsabilidade dessa ignorância para a sociedade que postula a escola como possível, em vez de descarregá-la sobre a vítima.

O desafio do professor é levar cada aluno a adquirir a maior quantidade possível de conteúdos vivos para que eles possam se desempenhar o melhor possível na sociedade em que vivem. O desafio do professor é fazer isso apesar das condições adversas da escola e de seu baixo salário. **Seu compromisso é antes com o ser humano que tem diante de si** do que com a utopia escolar. Em resumo, **o desafio do professor é o "desafio-ensino"**, não o "desafio-escola".

Veja que a Guiomar coloca isso de maneira muito hábil. Ela fala em "como fazer que a **maioria** dos alunos domine conteúdos vivos". Se, em vez de "maioria", dissesse **todos**, estaria enunciando o desafio-escola. A Assimilação Solidária substitui essas expressões por **tantos quanto possível**, que é o desafio do professor, o desafio-ensino. Se, um dia, esse "possível" vier a ser "todos", tanto melhor, mas até lá são as classes dominantes que têm de se responsabilizar pelo fracasso de sua escola.

PARTICIPANTE: Seria necessário fazer uma escola voltada para os interesses da maioria da população.

BALDINO: Mas aí você vai ter o seguinte: os conteúdos seriam os mesmos? Vê-se que não dá. Seriam outros? Então seria outra escola. Ela iria substituir a existente ou seria paralela à existente? Se vai substituí-la, como caberiam dentro dela os que pudessem ir além? Se seria paralela, haveria duas educações, uma para as classes dominantes e outra para as subalternas? Ou enquanto não se decide isso continuamos reprovando?

DIFICULDADES EM MATEMÁTICA DOS FUTUROS PROFESSORES PRIMÁRIOS*

Vânia Maria Pereira dos Santos

INTRODUÇÃO

No Brasil, a formação acadêmica em Matemática do professor primário está bastante deficiente.

Ouvindo-se professores de Matemática que atuam nos cursos de formação de professores primários pode-se dizer que entre as principais causas desta deficiência estão:

- as mudanças curriculares nas últimas décadas;
- a má seleção dos alunos que ingressam no curso;
- a falta de motivação do aluno pelo estudo de Matemática;
- a falta de atitude positiva frente à Matemática;
- a falta de confiança do aluno em sua capacidade de aprender Matemática e
- a má avaliação terminal do curso.

As mudanças de carga horária e de conteúdo de Matemática e Metodologia de Matemática, decorrentes das alterações curriculares mais recentes, estão sendo responsáveis por sérios problemas na formação básica de Matemática dos futuros professores primários.

A principal falha no processo que seleciona os alunos que ingressam no curso de formação de professores primários, diz respeito à investigação do domínio de conteúdos básicos, como: sistema de numeração decimal, as quatro operações com números naturais, frações, resolução de problemas e geometria.

Reforçando este quadro problemático temos o aluno que não acredita em sua capacidade de aprender Matemática, que não percebe que a Matemática está relacionada com nosso mundo real, que não está motivado e nem tem atitude positiva para este estudo.

---

* *Trabalho apresentado no VI - ICME, Budapeste 1988 e financiado pelo SPEC/CAPES*

Agravam estes problemas uma avaliação ineficiente durante todo o curso, permitindo que o aluno se torne um professor primário despreparado. Como conseqüência desse despreparo e da correspondente insegurança em relação aos conteúdos matemáticos que devem ser ensinados, os professores recém-formados produzem reflexos negativos nos seus alunos da escola primária, tais como desinteresse e deficiências da aprendizagem em Matemática.

É frustrante para os professores que atuam nos cursos de formação de professores primários, constatar que até agora pouco se fez no Brasil para mudar a estrutura dos mesmos. Seus alunos não dominam conceitos básicos de Matemática e se transformam, num breve espaço de tempo, apenas 3 anos de curso com disciplinas prioritariamente de formação geral, em professores primários sem a mínima capacitação profissional necessária.

TRABALHO PRELIMINAR

Pensando nestes problemas um grupo de professores de Matemática (universitários e secundários) e alunos de licenciatura em Matemática do Projeto Fundão – Setor Matemática (Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro) iniciou, em 1984, um trabalho de pesquisa sobre a formação matemática dos futuros professores primários.

Começamos analisando as diferenças curriculares no tocante ao conteúdo e carga horária de Matemática dos cursos de formação de professores em algumas escolas estaduais do Rio de Janeiro.

A seguir, passamos à análise das principais dificuldades de aprendizagem em Matemática, buscando suas causas.

Através de questionários, respondidos por professores e alunos destes cursos, observamos que muitas das constatações informais confirmavam-se.

Partimos, então, para uma etapa de estudo [1] e reflexão sobre as causas dos problemas constatados. Depois de todas estas fases centramos nossa atenção nos seguintes aspectos:

- a não compreensão do sistema de numeração decimal acarretando erros nos algoritmos das quatro operações;
- a má compreensão conceitual das quatro operações levando a erros na resolução de problemas;
- a deficiência na construção do conceito de fração;
- a má construção das noções de comprimento e área e suas aplicações no cálculo de perímetro e resolução de problemas simples.

Questões que se colocaram:

. Como diagnosticar o domínio dos conteúdos pelos alunos dos pontos de vista conceitual e operatório?

. Como investigar as formas de interpretação dos conceitos utilizadas pelos alunos?

. Como elaborar um instrumento de medida para efetuar o diagnóstico já citado?

TRABALHO EXPERIMENTAL

Partimos, assim, para uma etapa experimental de elaboração, testagem e reelaboração de testes-diagnóstico sobre alguns conteúdos básicos para a formação dos futuros professores primários.

Em 1987, realizamos a testagem preliminar dos instrumentos de medida sobre sistemas de numeração decimal e sobre conservação de comprimento e área (este último teste baseou-se no teste de medidas do CHELSEA College - projeto CSMS).

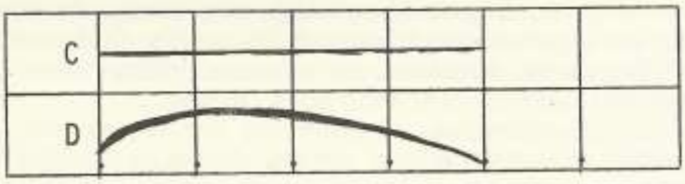
Aplicamos estes testes numa amostra de 124 alunos de cinco escolas estaduais, numa faixa de idade de 14 a 39 anos.

Entrevistamos 20 alunos dessa amostra, para avaliarmos como os alunos interpretaram e resolveram as questões e também para verificarmos se as mesmas estavam redigidas de modo claro e pedindo o que queríamos. Entre esses havia alunos de rendimento fraco, médio e bom em Matemática.

Passamos agora a transcrever algumas dessas entrevistas. Escolhemos apenas uma questão de cada teste diagnóstico, pois essas questões podem mostrar-nos algumas das principais falhas conceituais dos futuros professores primários.

DO TESTE SOBRE CONSERVAÇÃO DE COMPRIMENTO E ÁREA

Questão 2: Assinale a alternativa correta.



(a) A linha C é menor
(b) a linha D é menor
(c) C e D têm o mesmo comprimento
(d) Nada se pode afirmar
(e) Não sei

Entrevista 1:(Professor → P; Aluno → A)
P: Leia a questão e diga qual é a resposta.
A: As duas linhas têm o mesmo comprimento.
P: Por que você pensa assim?
A: Porque estas linhas ocupam o mesmo número de quadradinhos.
P: Se você esticar a linha D o que vai acontecer? Neste caso a linha D vai ter o mesmo comprimento que a linha C?
A: Não, ainda assim fica igual.

Entrevista 2:
P: As linhas C e D têm o mesmo comprimento?
A: Sim, a linha D está inclinada.

P: Se você esticar a linha D, as duas linhas ainda terão o mesmo comprimento?
A: Bem, neste caso a linha D vai ficar maior.
P: Então as linhas C e D têm o mesmo comprimento?
A: A linha D é maior que a linha C.

Entrevista 3:
P: Assinale a alternativa correta.
A: A linha C é uma reta e a linha D é uma curva. Eu botei que C e D têm o mesmo comprimento.
P: Por que você acha que as linhas C e D têm o mesmo comprimento?
A: Porque, olha só, elas ocupam o mesmo número de quadradinhos. A linha C, 1, 2, 3, 4 quadradinhos e a linha D, 1, 2, 3, 4. Eu botei com o mesmo comprimento. Aliás, apesar de que, se a linha D se tornasse uma reta, talvez tivesse maior.
P: É?
A: Não sei.
P: Por quê?
A: Pegando um elástico ou um barbante. Um barbante como se fosse uma curva ia ficar do mesmo tamanho, mas se esticasse ia ficar maior.
P: Então, qual que você acha que é a menor? É a resposta que você marcou?
A: Não, a linha C é menor.

Entrevista 4:
P: Leia e diga qual é a resposta certa.
A: É a letra (a).
P: Por quê?
A: Porque quando eu ando em linha reta ando menos que em curva.

Nestas entrevistas pudemos observar que alguns alunos percebem seus erros no teste escrito, após as reflexões realizadas durante o diálogo com o professor e outros não.

DO TESTE SOBRE SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Questão 1: Observe os números 1458, 509, 5832 e 75. O algarismo 5 tem o mesmo valor em todos os números?
( ) Sim ( ) Não
Justifique a resposta.

Entrevista 1:
P: Leia a questão e responda.
A: Não, porque cada número está numa casa decimal diferente.
P: O que é casa decimal?
A: Não sei, não faço idéia.
P: Não lembra nada?
A: É aquele negócio de dezena, unidade, centena.

Entrevista 2:
P: Leia a questão e responda.
A: Botei que não. Porque eu não sei falar direito, o 5 pode servir como dezena, centena, unidade. Pode ser 5, 55, etc...
Entrevista 3:
P: Leia a questão e depois responda.
A: Não, não tem.
P: Quem não tem? O número, ou o algarismo?
A: Não, o algarismo.
P: Você acha que não, porque?
A: Cinco mil não é a mesma coisa que botar cinco milhões.

Estas entrevistas mostram alunos com o mesmo nível de dificuldade em entender e explicar o que de fato é o valor relativo de um algarismo.

Observando as respostas dos alunos entrevistados, foi possível compreendermos como eles tomaram decisão, o raciocínio que utilizaram para resolver as questões e que más-interpretações os levaram a determinadas conclusões.

O diálogo das entrevistas nos sugere um método de trabalho, baseado em questionamentos e reflexões, em que o professor fique numa situação de orientador e debatedor e, não um simples transmissor de conhecimentos.

IMPLICAÇÕES DESTE TRABALHO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES PRIMÁRIOS.

- A descoberta de que mesmo um trabalho preliminar como este já nos fornece sugestões para a sala de aula. Podemos utilizar, por exemplo, situações como as descritas nas entrevistas para serem discutidas com os alunos e, a partir da análise crítico-reflexiva dos argumentos dados pelos próprios alunos, chegarmos às conclusões corretas.
- A reelaboração dos testes corrigindo as falhas detectadas, tanto a nível de clareza de redação quanto explicitação dos objetivos de cada questão.
- A importância da análise dos erros dos alunos tentando descobrir a origem dos mesmos ou, pelo menos, o que justifica os procedimentos utilizados na resolução da questão.
- A elaboração de propostas alternativas, para o trabalho com estes conteúdos básicos, que levem em conta uma abordagem desafiadora e questionadora e para a correção das más interpretações conceituais observadas.
- Necessidade de pesquisas em Educação Matemática que investiguem as causas das dificuldades em Matemática dos futuros professores primários e apontem sugestões para o trabalho em sala de aula.

CONCLUSÃO

Como conclusão desta fase do trabalho, quero ressaltar a importância de um trabalho realizado em equipe, com alunos de Matemática e professores de Matemática, da universidade e de cursos de formação de professores primários.

Neste trabalho foi possível trocarmos idéias sobre nosso modo de ensinar Matemática e nossas crenças sobre o processo de ensino-aprendizagem, muitas vezes concordando ou não. Estamos crescendo profissionalmente durante este processo que envolve reflexão permanente, elaboração de instrumentos que avaliem o que os alunos estão aprendendo ou não e análise dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução das questões dos·testes e entrevistas.

[1] REFERÊNCIAS

Brasil, Luiz Alberto dos S. – Aplicação da Teoria de Piaget ao ensino de Matemática – Editora Forense Universitária – 1977 (RJ)
Experiências Pedagógicas baseadas na Teoria de Piaget – Editora Forense Universitária – 1979 (RJ).

Carraher, Terezinha N. e outros - Aprender pensando - Vozes Petrópolis - 1986 (RJ).

Charles, C.M. - Piaget ao alcance dos professores - Livro Técnico S.A. - 1975 (RJ).

Hart, Kathleen et alii – Children's Understanding of Mathematics 11 - 16 - the CSMS Mathematics Team - John Murray (Publishers) - 1981 - London.

Kamii, Constance - A criança e o número - Papirus Livraria e editora - 1986 (Campinas).

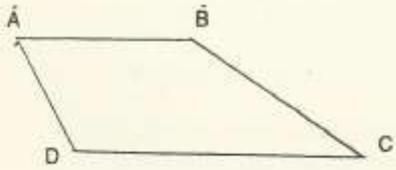
Kamii, Constance e Declark, Georgia - Reiventando a aritmética: Implicações da Teoria de Piaget - Papirus livraria e editora - 1986 (Campinas).

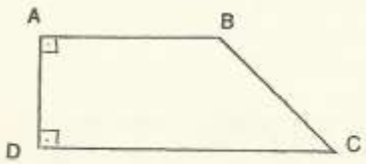
QUESTIONAMENTO DA CONCEITUAÇÃO DOS TRAPÉZIOS ISÓSCELES E ESCALENO

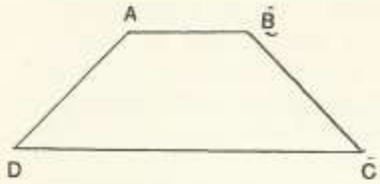
Hideo Kumayama

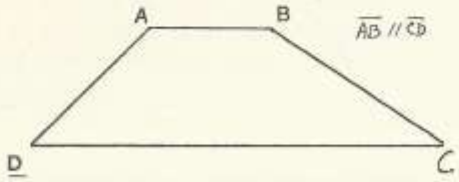
Um grupo significativo de autores nacionais conceituam o **Trapézio** como um quadrilátero convexo que possui **somente** dois lados paralelos. Estes lados paralelos recebem o nome de **bases.**

Exemplos de **trapézios,** segundo esta conceituação:





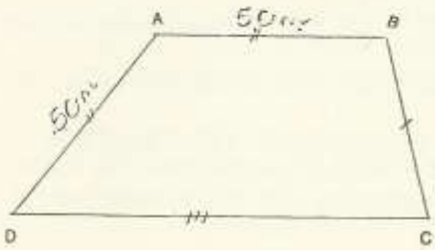




Agora passemos a analisar a conceituação de **Trapézio Isósceles** aceito pela maioria dos autores.

"O trapézio é isósceles quando os lados não paralelos são congruentes", e outras variações com o mesmo sentido **lógico.**

Agora, analisemos o trapézio abaixo:



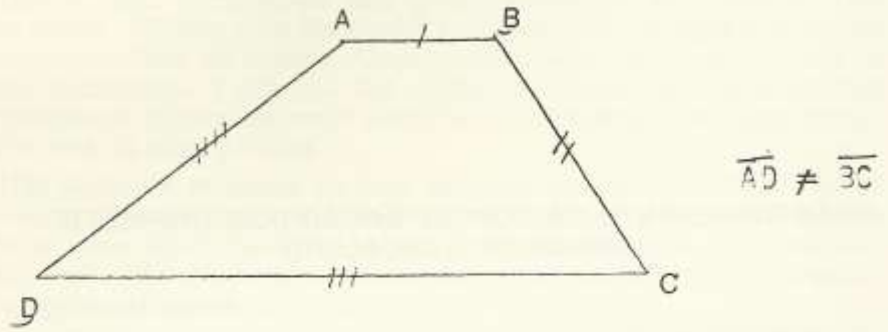
$\overline{AB}$ e $\overline{DA}$ são lados não paralelos e congruentes, porém o trapézio não é isósceles!

Lembremos que as bases são **lados** paralelos do trapézio.

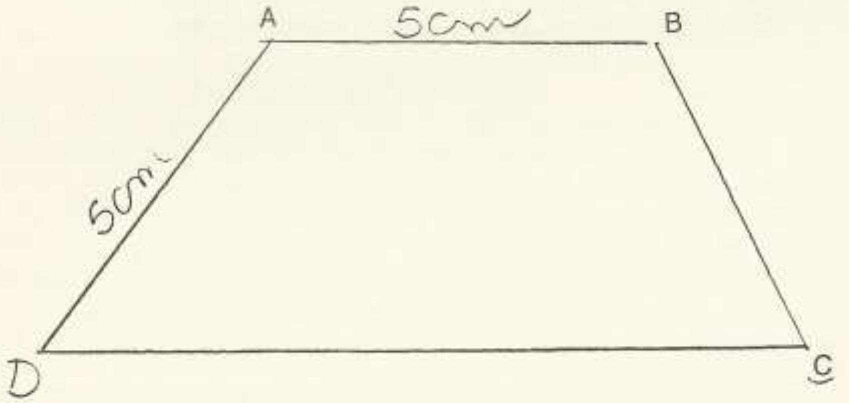
E como fica a conceituação de **trapézio escaleno**, segundo os mesmos autores?

"O trapézio é escaleno quando os lados não paralelos não são congruentes".

Autores desta conceituação apresentam como exemplo:



Agora analisemos este exemplo:



$\overline{AB}$ e $\overline{DA}$ são lados não paralelos do trapézio e são congruentes!

Como sair destas situações?

Uma das saídas que permite uma conceituação mais precisa é a seguinte:

"O Trapézio é isósceles quando os lados não consecutivos e não paralelos forem congruentes".

"O Trapézio é escaleno quando os lados não consecutivos e não paralelos não forem congruentes"

Certamente existem outros modos de conceituar estes trapézios (isósceles e escaleno), porém, esta é a melhor saída para dar maior precisão nas conceituações que normalmente são dadas pelos autores referidos neste texto.

MATEMÁTICA DIVERTIDA: NÚMEROS CRUZADOS

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb

Apresentamos uma atividade que se presta à aplicação de vários conhecimentos adquiridos ao longo dos cursos de 1º e 2º graus.

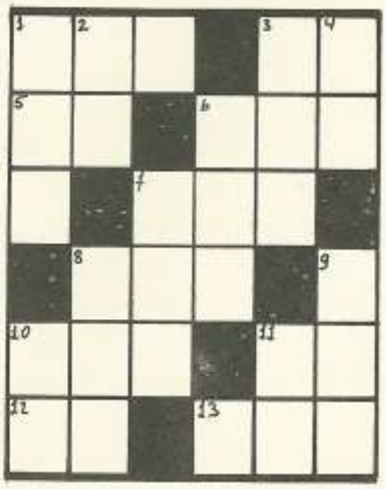
Trata-se de um esquema como o de palavras cruzadas em que se colocam na horizontal ou na vertical números em lugar de palavras. Cada um dos números procurados indicados por "?" completa uma seqüência dada. Descobrindo-se a regra de formação da seqüência encontra-se o número desconhecido.

Temos certeza de que nossos leitores apreciarão aceitar o desafio destes "números cruzados".

Pedimo-lhes que nos enviem suas soluções justificando também as maneiras de encontrar os 20 números procurados.

Publicaremos a solução e as justificativas mais interessantes no Boletim nº 25.

Também teremos muito prazer em publicar experiências que os professores tenham feito junto a seus alunos com problemas deste tipo.



Horizontais:

1. – 42 - 42 - 84 - ? - 1008
3. – 101 - 22 - ? ; 10 - 8 - 5
5. – 32 - 53 - ? - 95 - 116
6. – 15 - 7 - 3; ? - 105 - 52
7. – 118 - ? - 242 - 454 - 766 - 1178
8. – 35 - ? - 339 - 1023 - 3075
10. – 3125 - ? - 125 - 25 - 5
11. – 30 - ? - 34 - 36 - 38
12. – 16 - ? - 36 - 54 - 81
13. – 7 - 35 - 175 - ? - 4375

Verticais:

1. – 135 - 155 - 195 - ? - 425
2. – 45 - ? ; 37 - 73 ; 15 - 51
3. – 11 - 6 - 3 ; 1011 - ? - 11
4. – 29 - 10 ; 62 - ? ; 101 - 34
6. – 123 - 132 - 213 - ? - 312 - 321
7. – 145 - 135 - ? - 85 - 45
8. – 62 - ? - 496 - 2976 - 23808
9. – 550 - ? - 475 - 400 - 300
10. – 63 - 65 - 62 - ? - 61 - 63
11. – 23 - 29 - 31 - ? - 41

CONSEQUÊNCIAS PEDAGÓGICAS DA PESQUISA EM ÁLGEBRA

George Booker
Brisbane College of Advanced Education - Austrália
Trad. de Radiwal Alves Pereira

A Álgebra constitui parte central da Matemática na escola secundária, marcando a mudança de assunto grandemente ligado a aplicações que resolvem problemas particulares, para outro muito ligado a generalizações, as quais resolvem, de uma vez por todas, classes de problemas. O que mais chama a atenção do estudante é o uso dos símbolos, que servem para descobrir e para apressar resultados gerais, símbolos esses que, muitas vezes, apresentam obstáculo à assimilação e ao uso do raciocínio algébrico. Conseqüentemente, muitas pesquisas na maneira como as crianças adquirem idéias algébricas têm sido orientadas para a conceituação que as crianças fazem dos símbolos e dos processos que a sua manipulação representa. Os erros que as crianças cometem em Álgebra resultam de tentativas razoáveis, embora sem êxito, de adaptar conhecimentos já adquiridos a uma situação: ou uma regra conhecida é usada em situação inadequada, ou a regra é adaptada incorretamente para ser aplicada a um problema novo (Matz, 1981). Dessa maneira, os resultados de pesquisa servem para reforçar a observação feita por Thorndike (1928), a qual talvez tenha sido a primeira tentativa de usar estrutura psicológica na organização do ensino de Álgebra:

"Cálculo Algébrico... é, sem dúvida, uma atividade intelectual. Não dá indicação tão grande como dá a de resolver problemas, em parte porque existe apenas o nível inferior de abstração e de raciocínio original e também, em parte, porque somente inclui números, não-números e palavras. É porém o cálculo algébrico muito superior ao que dele se diz - rotina mecânica que pode ser aprendida e executada sem pensar."

Mais recentemente, Pettito (1979) observou precisamente em que consiste essa diferença:

"O uso inteligente de técnicas formais na resolução de problemas algébricos não é apenas modo de aprender a executar muito rápida e mecanicamente sub-processos já sabidos. É um processo de tornar

explícitas relações e operações que já eram conhecidas implicitamente. Prática com esses sub-processos é importante para que o aluno ganhe velocidade e precisão, porém a compreensão das manipulações algébricas apoia-se na sua ligação com o conhecimento do aluno, obtido experimental ou intuitivamente."

Entretanto, mudar a ênfase do ensino de Álgebra como rotina mecânica, capaz de evitar ou de superar erros de cálculo, exige um vínculo entre o novo material algébrico e o conhecimento do estudante. A propósito, Herscovics (1979) assinala que tal vínculo somente pode ser estabelecido começando-se com o novo tópico e transformando-o de modo a atingir o conhecimento do aluno, ou começando com o conhecimento do aluno e transformando-o de modo a atingir o novo tópico. Como até as inovações mais originais e motivadoras para o conteúdo tradicional da Álgebra têm ainda resultado em mal-entendidos (Matz, 1979; Harper, 1980; Booth, 1983; Kierin, 1984), é o segundo modo de estabelecer vínculo, com aproximação construtivista, que a pesquisa sugere seja o mais apropriado (Chalouh e Hercovics, 1984; Filloy e Rojano, 1987; Wagner, 1983).

Assim a primeira conseqüência que pode ser obtida da pesquisa é:

1 - O raciocínio algébrico precisa ser gradual e cuidadosamente desenvolvido por um período considerável, de modo a permitir que generalizações inadequadas sejam corrigidas (na transformação, feita pelos estudantes, quando passam da Aritmética para a Álgebra) e de modo a trazer compreensão dos conceitos e dos processos adequados.

Um segundo aspecto da pesquisa em Álgebra, que tem conseqüências no ensino, é aquele que tem feito uso de análise histórica (Harper, 1987), epistemológica (Filloy e Rojano, 1984) e psicológica (Collis, 1974; Matz, 1981).

Essas diversas perspectivas têm sido dirigidas para a mesma mudança crucial, da concepção de uma letra representando uma determinada incógnita, para o conceito de número simbólico, onde a letra representa quaisquer (ou todos) números. Filloy rotulou essa mudança, que exige do estudante manipular as próprias incógnitas em vez de manipular números para achar a incógnita, de "ponto de reversão didático", enquanto Harpe assinala o papel que "conflito e reflexão" desempenham em acomodar esses novos significados para termos algébricos e para a noção de "incógnita". Para o estudante, essa mudança exige a "aceitação da falta de fechamento" (Collis, 1974); soluções obrigam o estudante a "suspender a operação", em vez de expressar diretamente o resultado (Matz, 1981).

Essa análise das profundas mudanças necessárias no raciocínio das crianças, quando saem do mundo da Aritmética e entram no da Álgebra, indica uma segunda conseqüência do ensino de Álgebra nas escolas:

2 - Tanto crianças como professores devem tomar muito cuidado com os obstáculos para aprendizagem posterior, apresentados pelas mudanças da natureza do conteúdo algébrico e dos processos mentais envolvidos no raciocínio algébrico. Enquanto a manipulação de *números para determinar as incógnitas exige só manipulação aritmética usual, a Álgebra envolve manipulação de abstrações de modo não usual. Debates e discussões devem desempenhar um papel relevante no desenvolvimento da Álgebra.*

Junto com a preocupação da necessidade dos estudantes construírem um significado para a Álgebra, tem-se prestado atenção aos métodos que auxiliam a obter esse entendimento. Tal como em Aritmética, material concreto tem sido sugerido e muitas adaptações de utilidade têm sido encontradas na literatura de pesquisa (Herscovics, 1979; Hercovics e Chalouh, 1988; Filloy e Rojano, 1985; Booth, 1983), assim como as apresentadas em alguns programas de ensino (dignas de notas as de Dienes e dos que levaram as suas idéias mais adiante, além das metáforas de equilíbrio introduzidas pelos algebristas árabes do século X). Extensões recentes, que podem ser usadas para desenvolver idéias algébricas, incluem o uso de tabelas e de dados padronizados (Booker, 1987; Briggs, Demana e Osborne, 1986), calculadoras e computadores. Entretanto, como observa Filloy, o uso de material concreto envolve, tanto a passagem dos objetos e das operações algébricas para situações concretas, quanto a separação ou o destaque das idéias da semântica do modelo concreto. O ensino deve desenvolver esses dois aspectos harmoniosamente, levando o estudante a ignorar os seus aspectos concretos quando se pretende conduzí-lo a uma nova generalização. É necessário que haja um ajustamento preciso entre a representação e os processos e as idéias representadas, e que atenção seja dada às limitações e às noções distorcidas inerentes ao uso de material concreto (Booth, 1987). De outra maneira, a situação poderia ser semelhante à do uso do material de Cuisinaire na aritmética: enquanto o professor pensa que os alunos estão construindo a Aritmética, eles podem apenas estar brincando com blocos coloridos, embora da maneira indicada pelo professor. Uma descoberta específica, que esclarece essa dificuldade com material (Schliemann e Carraher, 1987), é que o uso intensivo de metáforas de equilíbrio pode ser adequado para o desenvolvimento do ensino de equações com uma incógnita, porém pode conduzir a raciocínios inadequados para equações com duas incógnitas.

Essas considerações conduzem à terceira consequência que a pesquisa fez no ensino de Álgebra:

3 - Situações e materiais concretos podem facilitar o desenvolvimento da habilidade e da compreensão em Álgebra, porém muito cuidado deve-se ter para que as idéias sejam generalizadas de modo não-ambíguo, a partir dos materiais e da sua manipulação. Essas idéias devem conduzir a uma expressão geral e concisa dos resultados a obter.

Extensão da idéia de usar situações concretas na representação de situações algébricas, e daí derivar compreensão e processos de manipulação do material concreto usado, é embutir a Álgebra em um ambiente de resolução de problemas (Matz, 1981; Bernard, 1983). De acordo com Booker (1987), a necessidade de extrair o significado das "incógnitas" que as letras representam na Álgebra, acompanha os processos exigidos para resolução de problemas, quando determinado plano é construído, porém usado apenas em tentativas, até que o resultado final confirme a sua eficácia. Muitos problemas apropriados podem ser encontrados nas atividades de "descobrir o padrão", quer sejam elas ligadas a números, a idéias geométricas, a tabelas de valores, ou a calculadoras. Pesquisas (Karplus, Pulos e Stage, 1981) mostram o valor de formas específicas de "Trabalhando para trás" como maneira de evitar métodos formais de cálculo algébrico, e essa idéia tem sido incorporada a vários projetos curriculares. Com terminologia diferente, porém essencialmente com as mesmas idéias, têm aparecido as expressões "caminhando para trás" (Rime, Melbourne, Austrália), "adivinhe e verifique" (Ohio Algebra Project, EE.UU.) e "descubra a regra" (HBJ Mathematics, Austrália). A ênfase na resolução de problemas parece combinar elementos das três primeiras conseqüências e conduzir à quarta forte recomendação:

4 – O ensino da Álgebra deve ser posto em um contexto de resolução de problemas, tanto em termos metodológicos, quanto da relação do assunto com as suas aplicações e com o problema do qual ele se originou.

Esse levantamento revelou que a origem das dificuldades das crianças, na aprendizagem e na aplicação da Álgebra, reside tanto na orientação tomada, quanto nos erros específicos que surgem. De muitas maneiras, nosso conhecimento das dificuldades das crianças nos processos algébricos é semelhante à compreensão que temos de suas dificuldades em cálculos aritméticos. Enquanto as dificuldades de cálculo eram olhadas como provenientes de algoritmos mal feitos, pouco progresso foi obtido para superá-las. Análise mais profunda dessas dificuldades mostrou que elas são grandemente devidas à falta de compreensão de número e de numeração. O conhecimento de número através do processo de contagem constitui base insuficiente para desenvolver habilidade no cálculo. Compreensão mais ampla de grupamentos e de valor de posição, com uso de material concreto, torna-se necessária para domínio de técnicas de cálculo.

Transformação semelhante é necessária para a base na qual idéias e processos algébricos devem ser construídos. Enquanto as dificuldades com a Álgebra revelam aos estudantes o uso de símbolos e regras que governam o seu uso, é a falta de aceitação dos símbolos como entidades matemáticas legítimas primordiais que constitui o problema fundamental (Davis, 1985; Booker, 1987).

As dificuldades expostas podem ser grupadas e explicitadas no esquema:

ARITMÉTICA	ÁLGEBRA
Compreensão inadequada de número	Incapacidade de aceitar as noções de Álgebra
Materiais Linguagem significatica Desenvolvimento consistente	Expressões orais concisas Descrição de resultados Verificações
Dificuldade de Cálculo e Padrões de erros	Dificuldades processuais e Conflitos conceituais

Situações-problemas

O conhecimento que se tem das dificuldades dos processos algébricos permitiria criar meios para evitá-las ou superá-las; mas como o uso de símbolos tem pouco ou nenhum significado para os estudantes que os devem manipular, então não há base para ultrapassar as dificuldades. Tudo isto nos conduz à quinta e última conseqüência que será tirada deste trabalho:

5 – A necessidade primordial em um programa introdutório de Álgebra é estabelecer a utilidade do simbolismo algébrico para exprimir relações e, finalmente, achar e verificar os padrões nos quais essas resoluções estão baseadas.

Quando se aceita a necessidade dos entes da Álgebra, tanto estudantes quanto professores trabalharão em conjunto para evitar e superar as dificuldades processuais, as quais obviamente constituem o problema de domínio da Álgebra, pois a necessidade de manipular símbolos não será mais questionada. A queixa dos estudantes não mais fará eco com a de Bertrand Russel (1927):

"Quando se chega à Álgebra e se tem que operar com x e y, há um desejo natural de saber o que x e y realmente são. Pelo menos, isto é o meu modo de sentir. Sempre senti que o professor o sabia, mas não o me queria dizer".

Parece que os alunos aceitarão não saber o significado dessas incógnitas, até que um valor específico lhes seja exigido, caso seja efetivamente adequado.

REFERÊNCIAS:

Bernard, (1983) "signs of progress solving elementary algebraic equations" Proceedings of the Fifth annual Conference for the Psychology of Mathematics Education – North America, 144 - 152.

Booker, G. (1987) "Conceptual obstacles to the development of algebraic thinking" Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 275 - 281.

Briggs, J, Demana F and Osborne, A. (1986). "Moving into Algebra: developing the concepts of variable and function". The Australian Mathematics Teacher, 5 - 8, September, 1986.

Booth, L. (1983) "A Diagnostic teaching program in elementary algebra; Results and implications" Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Educations, 307 - 312.

Booth, L. (1987) "Equations revisited" Proceedings of the Elevent International Conference for the Pychology of Mathematics Education, 282 - 288.

Chalouh, L. and Herscovics, N. (1988) "Teaching algebraic expressions in a meaningful way" In a Coxford (Ed) The Ideas of Algebra, K - 12, 1988 Yearbook, 33 - 42. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Collis, K. (1974) "Cognitive development and mathematics learning"

Paper presented at the Psychology of Mathematics Education Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.
Davis, R. (1985) ICME 5 Report: "Algebraic thinking in the early grades" Journal of Mathematical Behaviour, 4, 195 - 208.
Fillow, E. and Rojano, T (1984) "From an arithmetical to an algebraic thought". Proceedings of the Sixth Conference for the Psychology of Mathematics Education - North America, 51 - 56.
Filloy, E and Rojano, T. (1985) "Operating on the unknown and models of teaching". Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 154 - 158.
Filloy, E (1987) "Modelling and the teaching of Algebra" Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 295 - 300.
Harper, E (1980) "The boundary between Arithmetic and Algebra: Conceptual Understandings in two language systems", International Journal of Mathematics Educations, Science and Technology,·Volume 11, Number 2, 237 - 243.
Harper, E. (1987) "Ghosts of Diophantus" Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, 75 - 90.
Herscovics, N (1979) "The understanding of some algebraic concepts at the secondary level" Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 92 - 107.
Karplus, R. Pulos, S. and Stage, E (1981) "Eraly adolescents" reasoning with unknowns" Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Educations, 147 - 152.
Kierin, C. (1984) "A comparison between novice and more expert algebra students on tasks dealing with equivalence of equations" Proceendings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA, 83-91.
Matz, M. "Towards a computacional theory of algebraic competence" Journal of Children's Mathematical Behavior, Volume 3, Number 1, 93 - 167, 1981.
Osborne, A (19850
Pettito, A. (1979) "The role of formal and non-formal thinking in doing algebra" Journal of Children's Mathematical Behavior, Volume 2, Number 2, 69-82.
Russel, B. (1927). An Outline of Philosophy, 9th imp ession (1970). London: Allien and Unwin.
Schliemann, A. and Carraher, T. (1987) "Manipulating equivalences in the market and in maths" Proceedings of the Eleventh International Conference: or the Psychology of Mathematics Educations, 289 - 294.
Thorndike, E.L.; Cobb, M.; Orleans, J.; Symands, P.; Wald, E. and Woodyard, E (1928) "The Psychology of Algebra". New York: MacMillan.

PROBLEMA NÃO É PROBLEMA

Inauguramos esta seção com duas interessantes questões, uma delas com a solução e deixando a outra como um desafio. Envie-nos sua solução, caro leitor.

APENAS TRÊS "DOIS"

de Álgebra Recreativa - I. Perelman
Contribuição de Wilson Belmonte

É um engenhoso quebra-cabeça algébrico com que se distraíram os delegados a um congresso de Física celebrado em Odessa.

Propomos o seguinte problema:

– Exprimir qualquer nº, inteiro e positivo, mediante 3 algarismos "2" e sinais algébricos.

Solução: – Mostremos num exemplo a solução deste problema. Suponhamos que o nº dado seja 3. Neste caso, o problema se resolve assim:

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

É fácil convencermo-nos da veracidade desta igualdade. Com efeito:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{1/2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} = 2^{1/2^3} = 2^{(2^{-3})}$$

$$\log_2 2^{(2^{-3})} = 2^{-3} \text{ e } \log_2 2^{-3} = -3 \text{ e } -\log_2 2^{-3} = 3$$

Se o número dado fosse 5, resolveríamos o problema pelo mesmo processo.

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

Leve-se em conta que o índice da raiz é omitido por ser ela quadrada.

A solução geral do problema é a seguinte:

Se o nº dado for N, então

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{\text{n radicais}}$$

O nº de radicais é igual ao de unidades contidas no nº dado.

Obs.: Não há necessidade de o nº ser inteiro e positivo. O quebra cabeça é válido para os inteiros negativos. Se usarmos

$$N = \pm \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{\text{n radicais}} \quad ,$$

o sinal a usar será o do oposto do nº desejado.

Podemos também obter o zero fazendo

$$0 = \log_2 \log_2 2$$

POR QUE A FÓRMULA?

Contribuição de
José Carlos de Mello e Souza

No livro "O Homem que Calculava", de Malba Tahan, há uma história que assim podemos resumir:

"Três marinheiros ganharam um certo número de moedas, entre 200 e 300, que deviam ser repartidas entre eles em quotas iguais e deixaram a divisão para ser feita no dia seguinte.

Durante a noite um dos marinheiros foi ao local em que as moedas estavam guardadas e, tentando dividí-las em três partes iguais, notou que sobrava uma. Jogou-a ao mar para evitar dificuldades futuras e retirou-se, levando a terça parte do restante.

Outro marinheiro, a seguir, ignorando o que fizera seu companheiro, procurou as moedas e, ao tentar repartí-las em três partes iguais, verificou que sobrava uma; jogou-a ao mar e retirou-se, levando também a terça parte do que ficara.

O terceiro marinheiro, que ignorava as manobras de seus dois companheiros, procurou por sua vez as moedas e, ao dividí-las em três partes iguais, viu que uma estava sobrando. Jogou-a ao mar, guardou para si a terça parte do que restara e voltou para seu beliche.

No dia seguinte o comandante contou as moedas existentes, procurou repartí-las em três partes iguais e como sobrasse uma, guardou-a para si, entregando a cada um dos marinheiros a terça parte que lhe cabia.

Pergunta-se quantas moedas havia e quantas cada marinheiro levou no final de tão controvertidas repartições."

A solução do problema proposto na história é:

Havia 241 moedas, sendo que:

o 1º marinheiro ficou com	103 moedas,
o 2º marinheiro ficou com	76 moedas,
o 3º marinheiro ficou com	58 moedas,
o capitão ficou com	1 moeda e
foram jogadas ao mar	3 moedas.
Total:	241 moedas.

Ocorre entretanto, que uma editora que pretende lançar o livro, vertido para o alemão, na preocupação de esclarecer devidamente seus leitores, pediu ao detentor dos direitos autorais do livro que justificasse a fórmula dada no volume:

$$n = 81t - 2$$

em que n é o número de moedas e t um parâmetro livre ($t \in \mathbb{N}^*$), sendo que no caso do problema formulado, $t = 3$, posto que segundo o enunciado

$$200 < n < 300.$$

A fórmula não foi justificada pelo autor.

Procure o leitor estabelecê-la, para elucidar o exigente editor alemão.

GEPEM NOTÍCIAS

CURSOS

As inscrições para a seleção da 2ª Turma de Mestrado em Educação Matemática estarão abertas de 1/10/89 a 20/12/89.

O Curso de Pós-Graduação Lato-Sensu (Especialização) em Educação Matemática recebe inscrições a cada semestre. Para o 2º Sem./89 o período de inscrições foi de 3/7 a 4/8/89.

Para maiores informações sobre os cursos (documentos necessários, taxas, etc.) os interessados devem procurar o GEPEM:
Univ. Sta. Úrsula.
R. Fernando Ferrari, 75 - Pr. VI - s. 405 A
Tel. 551-5542 R. 185

NOVAS MODALIDADES DE SÓCIO

O GEPEM conta com inúmeros amigos que não residem no Grande Rio e que por isto não podem participar das atividades do Grupo, como assistir conferências e cursos ou participar de grupos de estudo.

No intuito de não perdermos contato com estes amigos, criamos a categoria de "Sócio Correspondente" ou seja de sócios que se comunicam conosco por correspondência.

Esses sócios correspondentes, mediante pagamento da anuidade de NCz$ 10,00, receberiam os Boletins que forem publicados durante o ano de 1989.

Foi criada também a categoria de "Sócio Institucional", para instituições como Colégios, Bibliotecas, Grupos de Estudos, etc, com anuidade/89 de NCz$ 45,00 e direito a três exemplares de cada nº do Boletim do período mais as comunicações que os sócios plenos recebem.

Continua existindo a categoria de "Sócio Pleno", que mediante a anuidade de NCz$ 25,00 em 1989, recebe os Boletins, os avisos de encontros, as notícias sobre o movimento das pesquisas em Educação Matemática de que tenhamos conhecimento.

Números avulsos do Boletim estão a NCz$ 5,00.

III ENCONTRO BAHIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Aconteceu na última semana de Julho, 1989, em Salvador, Bahia, o III EBEM, que movimentou a comunidade de educadores e interessados na área da Educação Matemática com seus mini-cursos, conferências, comunicações e outras atividades.

O GEPEM esteve presente nas pessoas da Vice-Presidente, Estela Kaufman Faiguelernt, que comunicou a implantação do Mestrado em Educação Matemática GEPEM/USU e da Diretora Cultural Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, que participou da mesa de abertura do encontro.

OLIMPÍADAS

Os jovens brasileiros Carlos Gustavo Tamm Moreira e Marcus André de Carvalho Torres obtiveram medalhas de ouro na III Olimpíada Íbero Americana de Matemática, realizada em abril/89, Havana, Cuba.

Há 10 anos a Sociedade Brasileira de Matemática realiza as Olimpíadas Brasileiras de Matemática, organiza e prepara as equipes que representam o Brasil nas Olimpíadas Internacionais de Matemática e nas Olimpíadas Íbero Americanas de Matemática.

O programa de Olimpíadas da SBM vem sendo mantido, desde 1985, pelo SPEC da CAPES/PADCT. Tem também recebido apoio do CNPq e FINEP.

Publicamos a seguir as questões da prova de 1988.

1) Qual é o menor denominador para a soma 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7?

A) 70 B) 140 C) 420 D) 2520 E) 5040

2) Ana, Bia, Carla, Diana estão sentadas numa fila de 4 cadeiras. José faz as seguintes afirmações:
i) Bia sestá ao lado de Carla.
ii) Ana está entre Bia e Carla.

Uma das afirmações acima está errada, na verdade Bia está na cadeira nº 3. Quem está na cadeira nº 2?

A) Ana B) Bia C) Carla D) Diana E) Faltam dados

3) Na figura abaixo ABCD é um retângulo, D é centro do círculo e B está sobre o círculo. Se AD=4 e DC=3 a área hachurada está entre:

A) 4 e 5
B) 5 e 6
C) 6 e 7
D) 7 e 8
E) 8 e 9

4) Um exame consta de 25 questões. Neste exame são atribuídos + 5 pontos para cada resposta correta, −2 pontos para cada resposta errada e 0 pontos para pergunta sem resposta. Se um aluno obteve 48 pontos no exame, qual é o maior número de perguntas respondidas corretamente?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

5) Para todo inteiro positivo k define-se $f_1(k)$ como sendo a soma dos quadrados dos dígitos de k. Para n maior ou igual a dois define-se $f_n(k) = f_1(f_{n-1}(k))$. O valor de $f_{1988}(11)$ vale:

A) 4 B) 16 C) 37 D) 58 E) 245

6) Se no pentágono da figura tivermos AD=AB e $B\hat{C}D=100^o$ então a medida de $A\hat{D}D$ é:

A) 80^o
B) 90^o
C) 100^o
D) 130^o
E) 150^o

7) O número de homens cresceu, do ano passado para este, de 20%, enquanto que o número de mulheres decresceu de 10%. Sabendo-se que o número tota de pessoas cresceu de 5%, quanto é a razão entre o número de homens e número de mulheres neste ano?

A) 1 B) 5/8 C) 4/3 D) 15/13 E) 13/15

8) Quanto vale a soma dos ângulos indicados na figura?

A) 180^o
B) 360^o
C) 540^o
D) 720^o
E) 900^o

9) Possuo 3 tipos de carés A, B e C cujos preços por quilo são respectivamente Cz\$ 5,00, Cz\$ 8,00 e Cz\$ 6,00. Se misturarmos 100 kg de A, 60 kg de B e 40 kg de C, o custo por quilograma de mistura em cruzados é:

A) 2,40 B) 3,60 C) 6,10 D) 7,40 E) 9,40

10) Se $X.Y = a$ e $1/X^2 + 1/Y^2 = b$ então $(X+Y)^2$ vale:

A) $a^2.b+2.a$ B) $a^2.b$ C) $a.b^2+a$ D) $a.b+b$ E) $a^2.b^2$

11) Define-se $n^* = 1/n$ para todo n inteiro diferente de zero. Quantas afirmações abaixo são corretas?

1) $3^*+6^*=9^*$
2) $5^*-2^*=3^*$
3) $2^*x3^*=6^*$
4) $10^*-2^*=5$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12) Um homem se encontra no 1º degrau de uma escada. Em um dia ele sobe 2 degraus e no dia seguinte desce 1. Quantos dias ele leva para chegar ao 5º degrau.

A) 7 B) 6 C) 10 D) 8 E) 9

13) Se $6 < p \leq 10$ e $1 \leq q \leq 8$ então:

A) $3/4 < p/q \leq 10$
B) $1/6 \leq p/q \leq 4/3$
C) $4/3 \leq p/q < 5$
D) $1/3 < p/q \leq 8$
E) $5/4 < p/q < 6$

14) Na figura abaixo BD/CD = 1/2 e AE/ED = 1/3. A razão entre as áreas do triângulo EDC e triângulo ABC vale:

A) 1/2 B) 1/2 C) 2/5 D) 2/3 E) 3/4

15) O preço de cada maçã é de Cz$ 5,00 e da laranja é de Cz$ 2,00. Deseja-se comprar 15 frutas gastando no máximo Cz$ 50,00. O número máximo de maçãs que posso comprar é:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16) A expressão $\sqrt{3 + 2.\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2.\sqrt{2}}$ vale:

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{6}$

17) O melhor relógio é o que marca a hora correta com maior freqüência. Se alguém possui um relógio que não funciona e outro que atrasa um minuto por hora, qual o melhor relógio?

A) Nenhum dos dois
B) O que atrasa um minuto por hora
C) O que não funciona
D) Os dois
E) É impossível determinar

18) Ernesto sai de férias e constata que:

1) Choveu 7 vezes de manhã ou de tarde.
2) Quando chovia de tarde fazia sol de manhã.
3) Houve 5 tardes de sol.
4) Houve 6 manhãs de sol.

Quantos dias ernesto saiu de férias?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

19) A distância entre uma cidade A e cidade B é 30 Km. De B até C é de 80 Km, de C até D é de 236 Km, de D até E é de 86 Km e de E até A é de 40 Km. A distância de C até E é de:

A) 150 KM B) 200 Km C) 322 Km D)216 km E) Impossível determinar
Obs.: As cidades estão alinhadas

20) Suponha uma corda estendida sobre a superfície da Terra formando uma circunferência de raio igual a do nosso planeta. Se aumentarmos de 1 metro o seu comprimento e dispusermos novamente em forma de circunferência, qual a ordem de grandeza, em centímetros, da diferença entre o novo raio e o raio antigo, sabendo que o raio da Terra é 6.400 km?

A) 10^{-3} B) 10^{-2} C) 10^{-10} D)10^{0} E) 10^{1}

QUESTÕES SOMENTE PARA 1ª SÉRIE

21) Se 10 gatos comem 10 ratos em 10 minutos, quantos minutos serão necessários para que 100 gatos comam 100 ratos?

A) 1 B) 10 C) 100 D) 1000 E) 10000

22) Se as raízes da equação $X^2 + b_1.X + c_1 + 0$ são y e y_1, as raízes da equação $x^2 + b_2.X + c_2 = O$ são y e y_2, e $b_1 \neq b_2$, $c_1 \neq c_2$ então:

A) $y_2 - y_1 = b_2 - d_1$
B) $y_1.c_1 = y_2.c_2$
C) $y = \dfrac{c_2 - c\ 1}{b_2 - b_1}$
D) $b_1.c_1 = b_2.c_2$
E) $b_1.c_2 = b_2.c_1$

23) O preço de um produto sofre um aumento de 20 porcentos. De quantos porcentos deve ser diminuído o seu preço a fim de voltar ao seu preço antes do referido aumento?

A) 10 B) 15,5 C) 16,7 D) 20 E) 25

24) Se k é um inteiro qualquer a expressão $\dfrac{k+4}{(k+1)^2+1} + 2.k - 2$

é necessariamente:

A) Não inteiro
B) Inteiro sem ser quadrado perfeito
C) Quadrado perfeito
D) Inteiro par
E) Nada se pode afirmar

25) Uma obra é completada em 18 dias se A e B trabalham juntos, em 30 dias se B e C trabalham juntos e em 22,5 dias se A e C trabalham juntos. Quantos dias serão necessários para completar a obra se os três trabalham juntos?

A) 23,5 B) 12 C) 7,5 D) 15 E) 9

QUESTÕES SOMENTE PARA 2ª SÉRIE

21) O conjuntos de todas as soluções da equação Sen (X) = Sen (2.X) no intervalo $[0, \pi]$ é:

A) O ou π
B) $\dfrac{2.\pi}{3}$ ou $\dfrac{4.\pi}{5}$
C) $k.\pi$ ou $\dfrac{k.\pi}{3}$, k= 0 ou 1
D) $2.k\,\pi + (-1)^k.\dfrac{\pi}{3}$, k = 1 ou 2
E) $\dfrac{\pi}{2}$

22) A imagem da função $y = \text{arctg}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

A) Todos os reais
B) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
C) $\left[(0, \frac{\pi}{2})\right]$
D) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
E) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

23) Um prédio possui 4 andares com 3 apartamentos por andar. Se apenas 4 apartamentos são ocupados, qual a chance de que cada andar tenha apenas um apartamento ocupado?

A) 1/4 B) 3/7 C) 4/15 D) 5/8 E) 9/55

24) Num triângulo ABC, Tg(CÂB) = 1 e a altura de A divide o lado BC em segmentos de comprimento 2 e 3. A área do triângulo ABC vale:

A) 15 B) 10 C) 27 D) 36 E) 30

25) A função f é definida no conjunto dos pares ordenados de números inteiros posisitivos e possui as seguintes propriedades:

1) $f(x, x) = x$
2) $f(x, y) = f(y, x)$
3) $(x + y).f(x, y) = y.f(x, x + y)$

Os valores de f(2,4) e f(4,10) são respectivamente:

A) 2 e 70
B) 4 e 12
C) 4 e 20
D) 2 e 12
E) 4 e 70