NA SUA OPINIÃO:

1. O que o Professor desta Disciplina poderia fazer para:

   a) aperfeiçoar o Curso

   b) melhorar o desempenho do Aluno

   c) melhorar o desempnho próprio

2. O que você, aluno, poderia fazer para:

   a) melhorar o seu próprio desempenho

   b) colaborar com o desempenho de seus colegas

   c) contribuir para o bom desempenho do Professor

SUGESTÕES PARA DEPOIMENTO DO ALUNO

1. Liste outros aspectos de Avaliação que você, Aluno, gostaria de comentar.

2. Escolha até três aspectos e ofereça ao seu Professor depoimentos honestos, baseados em suas dificuldades reais, visando contribuir para o aperfeiçoamento da Disciplina.

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DO PROFESSOR PELO ALUNO
AUTO-ANÁLISE E AUTOCRÍTICA DO ALUNO

1. Os objetivos da disciplina foram claros para você?

   Sim ——— Não ———

   Por que?

2. A abordagem dada ao conteúdo desta Disciplina atendeu às suas expectativas iniciais?

   Sim ——— Não ———

   Por que?

3. Você poderia citar de um a três exemplos de tópicos (ou unidades) que tenha achado:

a) muito complexos:

   i.

   ii.

   iii.

b) monótonos:

   i.

   ii.

   iii.

c) estimulantes:
   i.
   ii.
   iii.

d) muito úteis:
   i.
   ii.
   iii.

4. Na sua opinião, a abordagem às aulas desta Disciplina tem estimulado o desenvolvimento de: (marque quantas desejar)

a. criatividade	______	e. disciplina consciente*	______
b. autodisciplina	______	f. organização	______
c. precisão	______	g. iniciativa	______
d. espírito de grupo	______	h. outras:	
Positivas		Negativas	

5. Na sua opinião, o que o professor poderia ter feito para melhorar o desempenho dos alunos?

6. O que você poderia ter feito para melhorar o seu próprio desempenho?

7. A atmosfera das aulas desta Disciplina foi: (marque quantas desejar)

a. tranqüila	______	f. participativa	______
b. tumultuada	______	g. rígida	______
c. descontraída	______	h. produtiva	______
d. tensa	______	i. monótona	______
e. amistosa	______	j. estimulante	______

8. Em sua opinião, quais foram os aspectos mais positivos e mais negativos do sistema de avaliação adotado nesta Disciplina?

9. Que assuntos poderiam ter sido tratados, mas não o foram?
   E quais os que poderiam ter sido melhor tratados?

10. Comente o que desejar sobre a parte teórica da Disciplina e as atividades de Laboratório.

Obrigado pela colaboração   Assine se desejar

RESENHA BIBLIOGRÁFICA

João Bosco Pitombeira de Carvalho
Infinite Processes, Background to Analysis
A. Gardiner, Springer NY/82

Onde encontrar o exemplo de Schwartz (veja Courant, R. Differential and Integral Calculus, vol II, PP. 341-342, Interscience, 1970) de que, se tentarmos calcular a área de uma superfície generalizando a idéia que funcionou bem para curvas – a de aproximação por uma poligonal – não chegaremos ao resultado esperado? E que o jogo de Euclides, do qual o algoritmo de Euclides é um caso particular, permite demonstrar que certos pares de segmentos (por ex., o lado e a diagonal do quadrado) não são comensuráveis? Onde encontrar uma exposição sucinta e acessível dos problemas envolvidos com a definição do conceito de função ou uma discussão clara, interessante, e sem pressa de frações com representação decimal infinita? Uma introdução simples às frações contínuas, relacionando-as com o último tópico que mencionamos? Além disso, tudo exigindo a participação efetiva do leitor, por meio de exercícios com sugestões detalhadas, de estudo obrigatório para a plena compreensão do texto e muito bem escolhido? Quem já se deteve para pensar por quê $(-1)^{1/3}$ é diferente de $(-1)^{2/6}$, o que mostra que a regra geralmente aceita para trabalhar com expoentes fracionários tem que ser mais bem compreendida? Tudo isso se encontra no livro agora resenhado!

A listagem de todos os problemas acima, aparentemente desconexos, pode fazer supor que o livro é uma colcha de retalhos, um amontoado de resultados avulsos, sem nenhum fio condutor. Nada disso: por trás de tudo que o autor faz, está a intenção de familiarizar o estudante, no início de seus estudos universitários, preferivelmente antes de fazer um curso de cálculo ou ao mesmo tempo em que o segue, com os conceitos básicos da Análise, ou seja, com os processos de limite.

Citemos o autor:

"Como o título sugere, este livro foi concebido como um prólogo ao estudo de Por que o Cálculo funciona... é de fato um re-exame crítico dos processos infinitos que surgem na Matemática Elementar: a parte II re-examina os números racionais e irracionais, a parte III examina nossas idéias de comprimento, área e volume, e a parte IV examina a evolução do conceito moderno de função."

Eis o índice do livro:

Parte III – Geometria

Parte IV – Funções

Na Parte I, segundo o próprio autor, é exposto como em torno de 1800 os matemáticos começaram a perceber que a falta de precisão em sua compreensão e sua manipulação dos processos infinitos envolvidos no Cálculo (infinitesimal) intuitivo era uma fonte de erros e de confusão, que portanto o Cálculo intuitivo necessitava ser reformulado de maneira clara e precisa, que a necessidade de revisar nossa compreensão de uma parte da Matemática, como o Cálculo intuitivo, não nos deveria realmente surpreender; mas que a maneira puramente aritmética em que de fato o Cálculo intuitivo foi reformulado (em torno de 1870), é um pouco surpreendente. O autor apresenta problemas que levaram os matemáticos a se interrogarem sobre o que realmente estavam fazendo, como por exemplo as soluções da equação da corda vibrante, obtidas por D'Alembert e por Bernouilli, e as manipulações puramente simbólicas com séries de potências infinitas. Encontramos aí, como exercício, dado com um roteiro detalhado que o torna factível, a maneira como Euler calculou o valor da série $\sum(1/n^2)$. Vemos aí um dos pontos que considero altamente favoráveis no livro: o autor se recusa a dar as coisas de graça ao leitor, é necessário trabalhar, embora com uma orientação honesta e detalhada.

Em seguida, Gardiner apresenta as noções sobre números inteiros que serão usadas subseqüentemente. Introduz o Teorema de Pitágoras e a noção de máximo divisor comum, e ensina como calculá-lo, usando o jogo de Euclides, que é uma generalização do algoritmo de Euclides. A existência de máximo divisor comum é imediatamente relacionada com a comensurabilidade de dois segmentos de comprimentos inteiros, o que é um exemplo de versão grega do algoritmo de Euclides, o processo de "antanaireses" (veja V. der Waerden, Geometry and Algebra in Ancient Civilizations; Springer, N. York, 1983, pp 138-139 e, do mesmo autor, Science Awakening., Oxford University Press, N. York, 1971, pp. 126-127). Aplica após isso este processo para demonstrar que existem segmentos incomensuráveis (sem usar o teorema de Pitágoras) e mostra, da mesma maneira, que o lado e a diagonal do pentágono regular são incomensuráveis. Compare com as obras citadas de Van der Waerden para um tratamento claro e mais rico do assunto.

Após isso, é feita uma rápida revisão dos sistemas numéricos, explicando o funcionamento de nosso sistema decimal. Ataca então o autor o problema da existência de números cuja representação decimal é infinita. Já tinhamos tido contacto com um processo informal, geométrico, de limite, ao demonstrar que certos segmentos são incomensuráveis. Agora, passamos a estudar mais detalhadamente os processos infinitos, em um contexto aritmético, ao atacar a pergunta: "O que é um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos? Um exercício com a série harmônica alternada faz o leitor trabalhar com sucessões crescentes (e decrescentes) limitadas superiormente (inferiormente).

Como exemplo de outro exercício, temos o Exercício 4, (página 93).

Os exercícios 1 (i) e 2 sugerem que o seguinte é verdade: para qualquer valor positivo $x < 1$, as potências x^n,rapidamente se aproximam de zero quando n cresce. Além disso, estas potências x^n diminuem de tal maneira que eventualmente se tornam menores do que 1/N, onde N é qualquer número inteiro positivo escolhido arbitrariamente. O leitor deverá demonstrar agora que isso é verdade. (São dadas em seguida sugestões de como proceder.

É estudado o que quer dizer um número como 0,9999..., e atacado o estudo das frações décimais periódicas, que são cuidadosamente analisadas, resolvendo-se problemas como o seguinte:

Qual a relação exata entre

a fração inicial m/n e:

o comprimento do bloco que se repete em sua representação, e

os algarismo que ocorrem no bloco que se repete?

O que determina o comprimento do bloco que se repete?

O tratamento apresentado não é o mais sucinto ou elegante (compare com o tratamento muito elegante de E. L. Lima no número 10, pp. 23 e seguintes da Revista do Professor de Matemática), mas chama constantemente a atenção para o fato de que estamos lidando com processos infinitos, quando trabalhamos com números decimais infinitos.

O leitor está agora pronto a atacar o capítulo sobre a propriedade fundamental dos números reais, enunciando como segue:

"A qualquer seqüência infinita de números reais que crescem mas que são todos iguais a ou menores do que um certo número real K, sempre corresponde um número real $a \leqslant K$, para o qual a sequência infinita parece estar se dirigindo."

Os termos usados na frase acima recebem então seus significados precisos. Um dos exercícios de aplicação deste princípio é calcular o limite, quando n cresce indefinidamente, de $(1+1/n)^n$.

Há em seguida uma introdução ao estudo das frações contínuas não só com motivação aritmética mas também geométrica, relacionando-as com o que foi feito para demonstrar a não comensurabilidade de lados e diagonais de certos polígonos.

Passamos agora à segunda parte, que estuda Geometria. Em primeiro lugar, o autor se detém sobre a relação entre os números e a Geometria, citando a posição dos pitagóricos e dos matemáticos gregos sobre isso. Em seguida, fala um pouco sobre a importância da intuição geométrica, e os cuidados que se deve ter com ela. Passa então a estudar como comparar áreas, num capítulo muito bem estruturado e importante. Parte dos conceitos intuitivos de área, e mostra pouco a pouco como eles necessitam de ser sofisticados, concluindo, por fim, após discutir os vários problemas envolvidos no conceito de área, quando tentamos definir a área de regiões limitadas por curvas, e os problemas em tentar definir a integral de uma função como sendo a área sob o seu gráfico. Como ele diz, nosso objetivo era simplesmente sugerir algumas das razões para excluir deliberadamente as noções geométricas na reconstrução do Cálculo – uma característica notável da versão do Cálculo adotada em torno de 1870. Faz também ver que a noção de subconjunto do plano é muito mais geral do que se pensa, examinando detalhadamente, no exercício 7, alguns subconjuntos e perguntando quais seriam suas áreas. Neste capítulo é também atacado o problema do que é a tangente a uma curva, em um longo exercício, com várias partes e sugestões, e que também estuda a noção de continuidade de uma função.

Já que o autor se permite desvios de seu objetivo (lidar com processos infinitos) para citar resultados como o terceiro problema de Hilbert, é pena que não tenha sugerido, nos exercícios, como atacar o Teorema de Pick, que permite calcular a área de um polígono com vértices no reticulado do plano. A primeira figura do capítulo dá esperanças de que isso aconteça, mas frustradas!

No capítulo subseqüente, Gardiner ataca o problema de como definir o volume de um sólido, partindo de casos bem simples, e chegando à conclusão de que aí também somos obrigados a introduzir processos infinitos. Compara várias tentativas de definir volumes, citando os resultados de Arquimedes, Cavalieri, etc., e refere-se à teoria de integração de Lebesgue. Isso parece prematuro, mas é, em verdade, bem natural em sua discussão, e não deveria amedrontar o leitor.

O capítulo seguinte estuda as analogias, relações e diferenças entre os conceitos de curva e de superfície; apresentando como exercício o resultado de que se aproximarmos a área de um cilindro por uma superfície formada por poliedros convenientes, teremos resultados diferentes conforme a escolha das faces do poliedros.

A última parte traça o desenvolvimento gradual do conceito de função desde suas origens em problemas puramente geométricos e físicos do início do século dezessete até a emergência eventual do conceito moderno de função no século dezenove. Distingüimos a idéia geométrica e a idéia algébrica de uma função, e examinaremos suas respectivas fraquezas e qualidades e veremos como a interação frutífera entre elas resolve os problemas de seus defeitos individuais, dando origem ao conceito moderno de função. Terminaremos com uma discussão detalhada de uma classe particular de funções – as funções exponenciais.

O autor mostra como o conceito de função evoluiu lentamente, e como os problemas geométricos sobre curvas (calcular tangentes e áreas limitadas pelas curvas) evoluíram, graças à Geometria Analítica, transformando-se em relações algébricas entre as coordenadas variáveis x e y. Mostra também o relacionamento entre as idéias de uma curva geométrica ou gráfico e a idéia de uma relação algébrica, fórmula, ou expressão ligando duas ou mais variáveis. Discute o momento decisivo quando as dificuldades encontradas no estudo das séries de Fourier forçaram os matemáticos a uma análise mais cuidadosa do conceito de função e apresenta exemplos não intuitivos de funções de que é impossível traçar o gráfico, ou que não têm derivada em nenhum ponto.

O último capítulo trata das funções exponenciais, e parte da definição comumente dada para a exponencial com expoente fracionário, mostrando o que pode acontecer, que restrições temos é necessidade de impor à base, até chegar ao conceito geral da função exponencial x^y. O estudo é bem pausado, mostrando como variam os gráficos das funções quando mudamos os expoentes, mesmo mantendo-os racionais. No entanto, parece-nos ser um dos capítulos menos satisfatórios do livro, talvez por pretender ser muito ambicioso, tentando fazer o leitor compreender até a existência de logaritmos de números negativos. Segundo o autor, uma carta de um professor comentando as dificuldades do conceito de exponencial foi a motivação inicial para o livro. No entanto, este capítulo dá a impressão nítida de último capítulo, escrito já sem paciência, quando a única motivação do autor é ver-se livre da tarefa de escrever.

Por que usar este livro?

Freqüentemente, no primeiro curso de Cálculo, deparamo-nos com alunos que nunca tiveram o menor contacto com o conceito de limite, com qualquer processo infinito (a única exceção é a 'regra' bem conhecida, não compreendida, de como achar a soma dos termos de uma progressão geométrica (infinita com razão menor do que 1). É totalmente inútil apresentar a estes alunos os conceitos sutis do Cálculo, pois eles não têm nenhuma vivência que lhes permita assimilá-los. O Cálculo se torna para eles mais um conjunto de regras a memorizar, como já fizeram tantas vezes na Escola Secundária.

A motivação de Gardiner não é estudar os processos infinitos por eles mesmos, mas sim usá-los para ilustrar a sutileza e a significância do salto dos processos finitos para os infinitos e a maneira como processos infinitos podem ser tratados matematicamente de maneira segura.

Boas, em sua resenha deste livro (American Mathematical Montlhy 90-2, 1983), discorda da apresentação histórica dos conceitos, dizendo que normalmente percebemos a significância de conceitos matemáticos relacionando-os com outros, e não mostrando sua evolução histórica.

No entanto, estas duas maneiras de encarar os conceitos matemáticos não são contraditórias. Ao contrário, são complementares e se enriquecem mutuamente. A percepção da evolução histórica de uma parte da Matemática não é obstáculo à sua compreensão e utilização. Ao contrário, o aluno que está tendo dificuldades para compreender certos conceitos usados no Cálculo talvez se sinta menos preocupado ao saber que eles são fruto de muitos anos de trabalho, que evoluiram lentamente até chegar à sua forma atual, e que quase certamente não serão a última palavra sobre o assunto. Um belo exemplo de como fazer isso, colocando os conceitos do Cálculo dentro de sua evolução histórica, é o livro de Otto Toeplitz, The Calculus, A Genetic Approach, The University of Chicago Press, 1963. Como dito no prefácio de Kothe, Toeplitz tenta apresentar as grandes descobertas com sua dramaticidade, preservar as origens dos problemas, conceitos e fatos. Mas não deseja que seu método seja chamado 'histórico'. O historiador... tem que registrar tudo o que aconteceu, bom ou ruim. Eu, ao contrário, desejo selecionar e utilizar da história da Matemática, somente as origens das idéias que demonstraram ser boas. Nada está mais afastado de meu desejo do que dar uma história do Cálculo Infinitesimal. Eu próprio, quando aluno, fugi correndo de um tal curso. Não estou interessado na História por ele mesmo, mas na gênese, em seus pontos notáveis, de problemas, fatos de demonstrações".

Concordo integralmente com a opinião de Toeplitz, embora achando que um curso de História do Cálculo pode ser interessante (veja, por Exemplo, os livros de C. H. Edwards Jr., The Historical Development of the Calculus, Springer, N. York, 1979; e de M. Baron, Origins of the Infinitesimal Calculus, Oxford: Pergamon Press, 1969). O que Gardiner faz neste livro é Matemática genuína. Não se trata de um destes livros que se apregoam para "liberal arts students", e dão algumas pinceladas de Matemática de mistura com história (veja, por exemplo, Morris Kline, Mathematics in Western Culture, aliás um excelente livro, embora exagerado, como todos os livros de divulgação de Kline), mas se trata de um livro de Matemática. Ela será ou utilizada pelo estudante em seus estudos de Cálculo e de Análise, ou lhe dará experiência em trabalhar com conceitos sutis e delicados, aumentando consideravelmente sua maturidade matemática.

Uma comparação com o livro de Teoplitz citado acima mostra também alguns dos problemas do livro de Gardiner. Toeplitz pode facilmente ser usado como esqueleto para um curso, pois é de fato um curso de Cálculo. Já o livro de Gardiner dificilmente serviria para isso. Por um lado, a abertura do livro só faz sentido para quem já tiver sentido um pouco as dificuldades do Cálculo. Omiti-la tiraria a motivação para a parte mais elementar, sem Cálculo, que vem depois. Além disso, pelo menos parte do tratamento de certos problemas mais sérios levantados posteriormente (comprimento de curvas, áreas de regiões do plano, etc.) também só farão sentido, para quem já estudou Cálculo. Em particular, o último capítulo, sobre funções exponenciais, fica muito prejudicado para quem não conhece a possibilidade das definições "eficientes" que se baseiam na definição da função logaritmo pela integral.

Assim, embora o livro seja muito interessante, de muito bom gosto, e exigindo trabalho produtivo por parte do leitor, não se presta para texto de um curso de Cálculo. Como usá-lo, então?

O livro é excelente como leitura paralela em um curso de Cálculo. Ao longo do curso, poderão ser selecionados capítulos, parágrafos ou problemas que ilustrem bem os problemas nas noções que estiveram sendo tratadas nas aulas segundo o livro texto. Desta maneira, julgo que o livro de Gardiner é muito bom, e pode contribuir muito para melhorar a compreensão dos conceitos do Cálculo e da Análise.

Em particular, julgo tratar-se de um livro particularmente recomendado para uso em um curso de licenciatura em Matemática, onde os alunos não se aprofundarão em Análise, mas deveriam receber uma boa introdução ao Cálculo, uma das ferramentas mais poderosas do arsenal da Matemática.

Principalmente porque Gardiner usa conceitos e noções elementares, de Matemática de primeiro e segundo grau, para motivar a introdução dos conceitos de limite que encontramos no Cálculo e na Análise e para preparar o aluno, tanto conceitual como tecnicamente, para lidar com eles. A maior parte dos licenciandos, em suas atividades como professores, após terminar seus estudos universitários, demonstra total incapacidade de relacionar a Matemática elementar, que usarão em suas aulas, com a mais avançada a que foram expostos na Universidade. Esta última fica em um compartimento estanque, e nada contribui para melhorar sua atuação como professores. Este livro muito poderia contribuir para derrubar esta separação, e mesmo para fazer com que o futuro professor perceba a sutileza e as dificuldades inerentes a certos conceitos que usará constantemente comprimento de arco, áreas de regiões do plano, o conceito de número real, etc.

De qualquer maneira, mesmo que o professor decida não usar este livro em seu curso, como leitura para os alunos, certamente suas aulas muito lucrarão se ele ler o livro. Isso só poderá melhorar suas aulas, enriquecendo-as com exemplos, motivações e uma visão mais ampla do Cálculo, de seus conceitos e de sua evolução.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE NÚMEROS CRUZADOS DO BOLETIM 22

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb

[1] 2	[2] 5	2		[3] 1	[4] 2
[5] 7	4		[6] 2	1	1
5		[7] 1	3	0	
	[8] 1	1	1		[9] 5
[10] 6	2	5		[11] 3	2
[12] 2	4		[13] 8	7	5

Horizontais

1) $42 \xrightarrow{.1} 42 \xrightarrow{.2} 84 \xrightarrow{.3} \boxed{252} \xrightarrow{.4} 1008$

3) 10 - 8 - 5; 101 - 22 - 12

$$\left\{ \begin{array}{l} (10)_{10} = (101)_3 \\ (5)_{10} = (12)_3 \end{array} \right. \quad (8)_{10} = (22)_3$$

5) $32 \xrightarrow{+21} 53 \xrightarrow{+21} \boxed{74} \xrightarrow{+21} 95 \xrightarrow{+21} 116$

6) 15 - 7 -3; $\boxed{211}$ - 105 - 52

$$\begin{cases} 15 = 7.2 + 1 & 211 = 105.2 + 1 \\ 7 = 3.2 + 1 & 105 = 52.2 + 1 \end{cases}$$

7) 118 - $\boxed{130}$ - 242 - 454 - 766 - 1178

+ 12 + 112 + 212 + 312 + 412

8) 35 - $\boxed{111}$ - 339 - 1023 - 3075 $\{ a_n = 3\,(a_{n-1} + 2)$

10) 3125 - $\boxed{625}$ - 125 - 25 - 5

:5 :5 :5 :5

11) 30 - $\boxed{32}$ - 34 - 36 - 38

+ 2 + 2 + 2

12) 16 - $\boxed{24}$ - 36 - 54 - 81 $\left\{ an = \frac{3a_{n-1}}{2} \right.$

13) 7 - 35 - 175 - $\boxed{875}$ - 4375

.5 .5 .5

Verticais

1) 135 - 155 - 195 - $\boxed{275}$ - 425

+ 20 + 40 + 80 + 160

2) 45 - $\boxed{54}$; 37 - 73; 15 - 51

$$\begin{cases} a_n = 10\,x + y \\ a_{n+1} = 10\,y + x \end{cases}$$

3) 11 - 6 - 3; 1011 - $\boxed{110}$ - 11 $\begin{cases} (11)_{10} = (1011)_2 \quad (6)_{10} = (110)_2 \\ (3)_{10} = (11)_2 \end{cases}$

4) 29 - 10; 62 - $\boxed{21}$; 101-34

$$10 = \frac{29 + 1}{3}$$

$$34 = \frac{101 + 1}{3}$$

6) 123 - 132 - 213 - $\boxed{231}$ - 312 - 321

{ Cada número é formado por uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3

7) 145 - 135 - $\boxed{115}$ - 85 - 45

- 10 - 20 - 30 - 40

8) $62 - \boxed{124} - 496 - 2976 - 23.808$

$.2 \quad .4 \quad .6 \quad .8$

9) $550 - \boxed{525} - 475 - 400 - 300$

$-25 \quad -50 \quad -75 \quad -100$

10) $63 - 65 - 62 - \boxed{64} - 61 - 63$

$+2 \quad -3 \quad +2 \quad -3 \quad +2$

11) $23 - 29 - 31 - \boxed{37} - 41$ { números primos