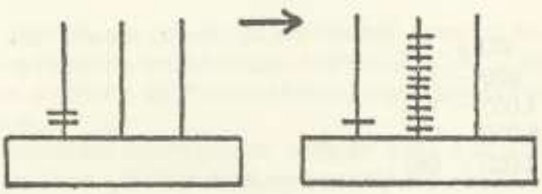
$$\begin{array}{r} 200 \\ 27^{-} \\ \hline \end{array}$$

b) fui resolvendo-a utilizando o ábaco, os dedos e o algoritmo e desenvolvendo, com os educandos, uma conversa semelhante à descrita abaixo:

- Dá para tirar sete da coluna das unidades?
  Não, ela está vazia.
- Para quem a unidade pede emprestado?
  Para a dezena, mas ela também está vazia.
- E para quem a dezena pede emprestado?
  Para a centena.
- Quanto tem na coluna da centena?
  Duas
- Se tirarmos uma das centenas, quantas teremos que colocar nas dezenas?
  Dez.

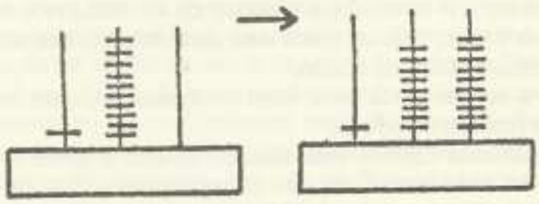
Fiz esse movimento no ábaco e no algoritmo.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;10} \\ \cancel{2}00 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$



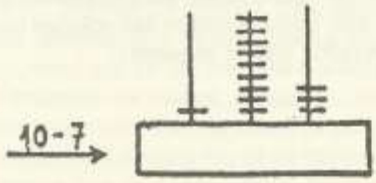
- E agora? A dezena já pode emprestar para a unidade?
  Pode. É só tirar uma dezena e colocar dez bolinhas na coluna das unidades.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 1\;\cancel{10}\;10} \\ \cancel{2}00 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

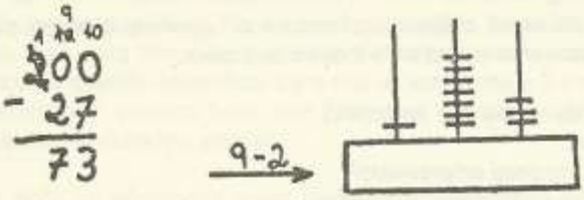


- Tirando sete das unidades, quanto sobra?
  Três.

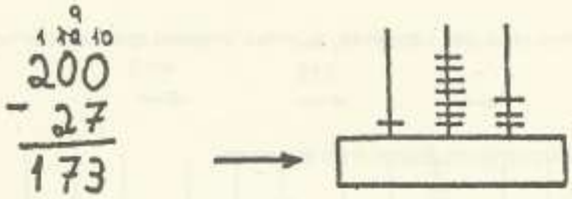
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 1\;\cancel{10}\;10} \\ \cancel{2}00 \\ 27 \\ \hline 3 \end{array}$$



–Quanto temos na coluna das dezenas?
Nove.
–Tirando 2, quanto sobra?
Sete.



–Quanto ficou na coluna das centenas?
Um.



Relaciono algumas das subtrações desse tipo realizadas com os educandos:

1) 300 – 94
2) 600 – 148
3) 4.000 – 136
4) 6.000 – 231
5) 2.000 – 683

Sexto passo: tabuada de adição (memorização dos fatos básicos da adição)

As adições do quinto passo (adições de várias parcelas) mostram que fica mais fácil de se calcular quando se conhece de cor os fatos básicos da adição. O uso dos dedos pode ser um bom recurso para auxiliar nessa memorização, ao contrário do que muitos pensam. À medida que o educando vai adquirindo habilidade no cálculo através do uso dos dedos, isso vai tendo uma certa influência positiva no sentido da memorização dos fatos básicos da adição.

Para auxiliar ainda mais essa memorização, este sexto passo concentra-se no estudo da tabuada da adição.

Inicialmente fizemos esta tabuada usando a forma horizontal de escrita. Especial destaque foi dado tanto à tabuada do zero como ao fato de se iniciar toda tabuada com uma das parcelas sendo zero. Considero isso importante para dar continuidade àquele trabalho iniciado na Primeira Unidade, de levar o educando a superar a dificuldade inicial em trabalhar com o zero.

A seguir a tabuada da adição foi montada em uma tabela. Procurei fazer com que os educandos preenchessem essa tabela aleatoriamente, isto é, preenchendo o resultado de cada quadradinho sem seguir a ordem das colunas ou das linhas. Os dois modelos da tabuada de adição utilizados são os seguintes:

FORMA HORIZONTAL:

$0+0=0 \quad 1+0=1 \;\cdots\; 9+0=9$
$0+1=1 \quad 1+1=2 \;\cdots\; 9+1=10$
$0+2=2 \quad 1+2=3 \;\cdots\; 9+2=11$

$0+9=9 \quad 1+9=10 \;\cdots\; 9+9=18$

TABELA

+	0	1	2	..
0	0	1	2	
1	1	2	3	
2	2	3	4	
⋮				

Analisando alguns pontos

Numa mesa-redonda realizada por ocasião da VIII Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd) (PUC-SP – maio/85) tive a oportunidade de debater o trabalho da Primeira Unidade e uma primeira versão do texto sobre a Segunda Unidade.

Nesse debate foram levantados alguns pontos, entre os quais o de que eu teria trabalhado apenas a compreensão e o domínio da técnica operatória e não teria trabalhado a disponibilidade para as operações, isto é, não teria dado condições ao educando de identificar as situações da vida cotidiana em que essas operações são necessárias e que, em conseqüência disso, o educando seria levado a saber calcular mas não saberia onde e quando utilizar essa ferramenta.

Estas questões estão ligadas à relação entre teoria e prática. Vejamos: na Primeira Unidade deste trabalho, o ábaco e o sistema de numeração surgiram como uma resposta, a nível teórico, a certas necessidades práticas. Esses dois "instrumentos teóricos" (o ábaco e o sistema de numeração) já continham em si os germans de novos "instrumentos teóricos", isto é, os algoritmos de adição e subtração. Isso possibilitou que nessa Segunda Unidade fosse desenvolvido um conhecimento matemático a partir daquele já adquirido anteriormente, sem que fosse necessário fazer, a todo momento, uma ligação direta com necessidades práticas. No processo realizado na Segunda Unidade, idéias foram sendo geradas a partir de outras que, na Primeira Unidade , estavam diretamente ligadas a objetos e situações concretas. Isso ocorre com a Matemática, onde o surgimento de novas teorias muitas vezes se dá movido pelas próprias teorias já existentes, sem a intervenção direta de uma necessidade prática imediata. Como diz Vieira Pinto (1979): "conhecimento das operações entre as idéias adquire interesse pelo rendimento que produz enquanto instrumento, organon ou método, para descobrir novas propriedades dos corpos, novas leis dos fenômenos e sistematizar os seres em forma racional. Este propósito é cumprido a tal ponto que se faz possível a antecipação do pensamento à realidade, representada pela invenção de objetos, máquinas, dispositivos e a previsão dos acontecimentos, o que vem a ser o domínio da natureza pela razão humana. Se por um lado a natureza domina a razão, pois a cria e lhe dá os conteúdos ideativos originais, os dados do saber e as categorias que os sistematizam, por outro lado, deve-se dizer que a razão domina a natureza porque se vale das idéias que representam adequadamente as propriedades das coisas para alterar os processos de interação entre estas, penetrar na profundidade dos fenômenos, produzir objetos e reações artificiais, e sobretudo para violar a dependência que o pensamento de início se encontra da relação estrita de simples apreensão dos dados materiais imediatos, o que tem lugar mediante a criação de novas idéias a partir das já criadas." (p.69, grifos nossos).

Ou ainda como diz Vazquez (1968): "... as relações entre teoria e prática não podem ser encaradas de maneira simplista e mecânica, isto é, como se toda teoria se baseasse de modo direto e imediato na prática (...) O conhecimento de certa legalidade do objeto permite, com efeito, prever determinadas tendências de seu desenvolvimento e, desse modo, antecipar com um modelo ideal uma fase de seu desenvolvimento ainda não alcançada. Ao produzir este modelo ideal, a teoria evidencia sua relativa autonomia, já que sem esperar que se opere um desenvolvimento real, efetivo, pode propiciar uma prática inexistente ao antecipar-se idealmente a ela. Sem esse desenvolvimento autônomo de seu próprio conteúdo, a teoria seria, no máximo, mera expressão de uma prática existente, e não poderia cumprir, ela mesma, como instrumento teórico, uma função prática." (p. 233 e 238-9, grifos nossos).

É, portanto, necessário que o processo de aprendizagem da Matemática desenvolva essa capacidade de se trabalhar com níveis cada vez maiores de abstração. Evidentemente, é também necessário tomar os devidos cuidados para que não se caia numa distorção própria da concepção que diz que o conhecimento matemático não tem nada a ver com a realidade cotidiana.

Trabalhar com as técnicas operatórias da adição e da subtração num nível mais abstrato, sem necessariamente fazer, a cada pequeno momento, a ligação direta com fatos da realidade cotidiana, não levou os educandos adultos, que participaram dessa experiência, a deixarem de ter a disponibilidade para essas operações. No dia-a-dia desses participantes, essas operações estão tão presentes, que cada conta realizada em sala de aula tinha para eles uma significação muito grande, sem necessidade de que eu os remetesse a uma situação prática. Esses educandos adultos, mesmo antes de dominarem a técnica operatória do cálculo escrito, já sabiam, pela sua própria experiência de vida, para que servem a adição e subtração.

Um outro ponto levantado foi o de que eu teria conduzido os educandos ao domínio das técnicas operatórias de uma forma paternista, dizendo como eles deveriam agir, como deveriam, por exemplo, colocar os ábacos, depois fazendo no meu ábaco, não dando assim chance aos educandos de se depararem com obstáculos cuja superação os levassem a recriar a técnica operatória. Eu estaria entregando a eles um conhecimento pronto e acabado sem que eles fossem sujeitos da sua aprendizagem.

Pretendo, em textos a serem ainda elaborados, explorar minuciosamente essa questão da recriação. Fornecerei aqui apenas alguns dos elementos mais significativos, que já possibilitam uma primeira abordagem.

A recriação precisa ser um processo muito bem dirigido onde sejam fornecidas pelo professor as condições básicas que possibilitem ao educando chegar ao domínio do conhecimento necessário dentro do tempo disponível. Dito de outro modo: para que o educando possa recriar algo no seu processo de aprendizagem, é imprescindível programar condições concretas que viabilizem esse recriar num espaço relativamente reduzido de tempo, que é aquele previsto para as atividades escolares. Deixar o educando "à solta", sem certas condições e procedimentos básicos para um recriar, não possibilita (a não ser em casos excepcionais e por outras razões) a recriação do conhecimento. O educando adulto, pela experiência de vida que tem, intui a necessidade dessas condições e, por vezes, chega a expressá-la. A elaboração e sistematização dessas condições básicas do processo ensino-aprendizagem não pode ser confundida com atos de paternalismo, autoritarismo ou imposição. Essa confusão, no entanto, tem sido feita, freqüentemente, inclusive por educadores que têm se dedicado a desenvolver uma ação pedagógica mais consistente. É preciso compreender que o momento em que o educando se depara com uma dificuldade e reconhece a necessidade de superá-la é um momento importante no processo de recriação do conhecimento humano. Este processo, porém, não se reduz a esse momento. É imprescindível, como foi dito, possibilitar determinadas condições básicas para que o educando não retroceda com a indefinição em Que, de repente, se vê envolvido, e possa concentrar sua atenção naquilo que é essencial, naquele momento, para a recriação do processo de raciocínio que a humanidade criou através dos séculos.

Por exemplo: para que os educandos redescobrissem os vários procedimentos da técnica operatória da adição, solicitei que eles apresentassem um número em cada ábaco; depois colocassem os dois ábacos numa posição tal que as colunas ficassem alinhadas, e, finalmente, juntassem as duas quantidades num ábaco só. Nesse momento, cada um juntava à sua maneira. Vejamos porque eu pedia que eles alinhassem as colunas dos ábacos: não fornecendo esse tipo de condição, os educandos poderiam ver-se prejudicados pela disposição espacial dos ábacos na mesa e isso desviaria sua atenção do principal, naquele momento, que eram os procedimentos operatórios da adição. Isso não é paternalismo, não é autoritarismo, não é imposição, mas é identificar tanto as condições em que o educando se encontra naquele processo quanto discernir o que ele precisa fazer sozinho, bem como no que ele precisa ser orientado. E ainda: o ato de realizar no ábaco grande a operação proposta não é um momento de imposição de modo de fazer do professor. É um momento que leva os educandos a uma reflexão sobre o modo como cada um tinha feito a operação no seu ábaco e sobre os porquês dos erros e dos acertos. Vejamos: eu sempre pedia que algum dos educandos dissesse como se achava que eu deveria fazer no ábaco grande e depois ia questionando as razões de cada procedimento. Esse era, inclusive, o momento de repensar todo o processo que fizeram individualmente nos seus ábacos.

Outro questionamento feito foi o da relação entre o cálculo mental utilizado pelo alfabetizando adulto na sua vida cotidiana e o cálculo escrito ensinado na escola. Eu teria deixado de trabalhar, na Segunda Unidade, o cálculo mental dos educandos, ensinando-lhes técnicas operatórias do cálculo escrito que poderiam ser muito diferentes do modo como aqueles educandos já calculavam mentalmente. E isso estaria significando uma justaposição de um conhecimento a outro.

Pretendo também analisar detalhadamente essa relação entre o cálculo mental e o escrito em outro texto a ser elaborado. Por hora destaco o seguinte: a) ao efetuar uma operação no ábaco, o educando já está manifestando como ele calcula mentalmente e inclusive compreendendo melhor esse seu cálculo mental; b) quando ele compreende que os fundamentos de uma técnica operatória do cálculo escrito são os mesmos fundamentos de uma técnica diferente utilizada no cálculo mental, uma coisa não lhe parece como justaposta à outra; e c) o educando adulto precisa aprender a técnica operatória mais utilizada na sociedade em que ele vive, por uma questão de comunicação. Ele precisa dominar o instrumento vigente na sociedade letrada onde vive. Possibilitar-lhe esse domínio é uma das funções da democratização do saber sistematizado.

Referências bibliográficas

DANTZIG, Tobias. **Número:** a linguagem da ciência. Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

DUARTE, Newton. "O compromisso político do educador no ensino de matemática". ANDE, São Paulo, 5(9): 51-4. 1985b.

—— "O ensino de matemática na alfabetização de adultos". **Cadernos de Educação Popular.** Rio de Janeiro, n.8. 1985c.

—— "Recriando o ábaco e o sistema de numeração". Educação & Sociedade, São Paulo, 7(20): 141-57, jan./abr. 1985a.

HOGBEN, Lancelot. Maravilhas da matemática – influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. Rio de Janeiro, Globo, 1946.

LAMPARELLI, Lídia C. Atividades matemáticas – 1ª série do 1º grau. 2.ed. São Paulo, CENP, 1984.

NICOLAI, Ronaldo. "Alfabetização em matemática". Jornal **Educação Democrática** São Paulo, n4. 1984. p.8-11.

PIAGET, Jean & SZEMINSKA A.A gênese do número na criança. e.ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

PINTO, Álvaro Vieira. Ciência e existência. 2.ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1979.

TAHAN, Malba. As maravilhas da matemática. Rio de Janeiro, Bloch, 1983.

VAZQUEZ, A. Sanchez. A filosofia da praxis. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1968.

Recebido em 2 de outubro de 1985

Newton Duarte é pesquisador do Programa de Educação de Adultos do PPGE (Programa de Pós-Graduação do CECH) da Universidade Federal de São Carlos.

N. do A. – Aproveito a oportunidade para fornecer o endereço àqueles leitores que quiserem entrar em contato comigo: Universidade Federal de São Carlos, Programa de Educação de Adultos, Caixa Postal 675, São Carlos, SP, CEP 13560.

SÕBRE UMA PROPRIEDADE MÉTRICA DO PARALELOGRAMO

L.A. Medeiros
Instituto de Matemática - UFRJ
Caixa Postal 68.530 - CEP 21944
Rio de Janeiro - RJ

INTRODUÇÃO

A idéia de escrever o presente artigo, originou-se de uma conferência que o autor teve oportunidade de pronunciar na Universidade Santa Úrsula, no primeiro semestre de 1988. Tal ciclo de conferências vem sendo organizado pela Diretoria do GEPEM. O autor agradece, duplamente, à Professora Estela Kaufman Fainguelernt pelo convite para fazer a mencionada conferência e para escrevê-la em forma de artigo. Ei-lo !

A escolha do tema presente, motivou-se na idéia de analisar um resultado simples da Geometria Euclidiana Plana, com consequências profundas em tópicos mais avançados da Matemática. É evidente que a Geometria de Euclides é rica em conceitos e propriedades, com consequências posteriores notáveis. Entre outras, é esta uma das razões para que seu ensino seja feito com muito cuidado na escola secundária.

O assunto do presente artigo surgiu na década de 30, quando a Análise Matemática teve um grande impulso com os trabalhos de matemáticos europeus, entre eles, menciona-se o livro de Stefan Banach, Teorie des Opérations Linéaires, Hafner Publishing Company - N.Y. 1932. Neste livro, ele introduz a noção de espaço normado completo, hoje conhecida sob a denominada de espaço de Banach, local apropriado ao estudo de vários problemas da Matemática e de suas múltiplas aplicações. Anteriormente eram conhecidos os espaços vetoriais dotados de produto escalar. Restava relacionar os espaços normados, àqueles com produto escalar. A resposta decisiva foi dada por Von Neuman, usando uma propriedade do paralelogramo. O objetivo do presente artigo é descrever a idéia de Von Neuman. No final do artigo há uma coleção de trabalhos relacionados com o presente assunto, para orientação do leitor.

1. MOTIVAÇÃO

Considere-se o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, constituído pelos pares de números reais. Seus objetos serão denotados por $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$, $z = (z_1,z_2)$, etc. Costuma-se denominar o $\mathbb{R}^2$ de plano real. De modo semelhante, o corpo dos números reais é denominado reta real.

Dados dois vetores $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$ do $\mathbb{R}^2$, examina-se a função $(.|.)$ que a cada par de vetores x, y do $\mathbb{R}^2$, associa o número real $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$, isto é:

(1) $\quad (x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$

Examinando (1), conclui-se que a função $(.|.)$ é linear em cada variável ao fixar-se a outra.

Por isto, diz-se que $(.|.)$ é uma FORMA BILINEAR.

Outra propriedade, decorrente da comutatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$, é que $(x|y) = (y|x)$.

Por este motivo, diz-se que a forma bilinear $(.|.)$ definida por (1) é SIMÉTRICA. Quando $x = y$, deduz-se de (1) que:

(2) $\quad (x|x) = x_1^2 + x_2^2$

Portanto, $(x|x) > 0$ sendo $(x|x) = 0$ se e somente x for o vetor nulo. Diz-se, por este motivo, que a forma bilinear, simétrica $(.|.)$, é ESTRITAMENTE POSITIVA.

É fundamental observar-se que $(.|.)$ está definida no produto cartesiato $\mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2$. A diagonal deste espaço vetorial é constituída pelos pares $(x,y), x,y \in \mathbb{R}^2$, tais que $x = y$. Resulta que (2) é a restrição de $(.|.)$ à diagonal do $\mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2$, isto é, a forma quadrática associada à forma bilinear $(.|.)$.

O que foi feito no $\mathbb{R}^2$ com a definição de $(.|.)$ por meio de (1), repete-se "mutatis mutandis" para o $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4 \ldots \mathbb{R}^n$

Estas propriedades da função $(.|.)$ definida no $\mathbb{R}^n$, em geral, dão origem a uma definição geral da noção de PRODUTO ESCALAR.

DEFINIÇÃO 1 - Considere-se um espaço vetorial real E. Denomina-se produto escalar em E, a uma forma $a(.,.)$ definida em $E \times E$ com valores reais, bilinear, simétrica, estritamente positiva.

De modo explícito, $a(.,.)$ satisfaz às condições:

i) BILINEAR

$a(\alpha x + \beta y,z) = \alpha a(x,z) + \beta a(y,z)$

para $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, x,y,z \in E$. Análoga propriedade para a segunda variável da forma:

ii) SIMÉTRICA

$a(x,y) = a(y,x)$ para todo par $x,y \in E$.

iii) ESTRITAMENTE POSITIVA

$a(x,x) > 0$ e $a(x,x) = 0$ se e somente se $a = 0$, sendo 0 o vetor nulo de E.

EXEMPLO 1 - No $\mathbb{R}^2$, considerando-se $a(x,y) = (x|y)$ definida por (1) obtem-se um produto escalar.

EXEMPLO 2 - Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha > 0 \quad \text{e } \alpha\gamma - \beta^2 > 0$$

Define-se a função $a(.,.)$ no $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ do modo seguinte:

(3) $a(x,y) = (Ax|y)$,

sendo:

$$Ax = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\alpha x_1 + \beta x_2 \ , \ \beta x_1 \ + \gamma \ x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Define-se:

$$(Ax|y) = ((\alpha x_1 + \beta x_2 \ , \ \beta x_1 + \gamma x_2) \ | \ (y_1, y_2))$$

Resulta:

(3 bis) $a(x,y) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_1 + \beta x_1 y_1 + \gamma x_2 y_2$

A forma $a(.,.)$ definida por (3), escrita explicitamente por intermédio de (3 bis), satisfaz às condições da Definição 1. Portanto $a(.,.)$ é um produto escalar no $\mathbb{R}^2$.

Conclui-se, que dada uma matriz (a_{ij}), dois por dois, isto é, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, simétrica, $a_{11} > 0$ e ^{ij}determinante positivo, então, por intermédio de (3), ela define um produto escalar no $\mathbb{R}^2$.

Uma questão que surgiria imediatamente é analisar a recíproca desta propriedade. De modo preciso, indagar-se-ia quais as propriedades das matrizes associadas às formas $a(.,.)$ definidas em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, satisfazendo às condições da Definição 1.

De fato, considere uma base (e_1, e_2) do $\mathbb{R}^2$, de modo que

$$x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 \ , y = (y_1, y_2) = y_1 e_1 + y_2 e_2 .$$

Daí, obtem-se:

(5) $a(x,y) = a(x_1e_1 + x_2e_2 + y_2e_2)$

Da condição (i) da Definição 1, resulta:

(6) $a(x,y) = a(e_1,e_1)x_1y_1 + a(e_1,e_2)x_1y_2 + a(e_1,e_2)x_2y_2 + a(e_2,e_2)y_2y_2$

Da condição (ii) da Definição 1, obtem-se:

(7) $a(e_1,e_2) = a(e_2,e_1)$

Portanto,

(6 bis) $a(x,y) = a(e_1,e_1)x_1y_1 + a(e_1,e_2)x_1y_2 + a(e_1,e_2)x_2y_1 + a(e_2,e_2)y_2y_2$

Com o objetivo de tomar menos pesada a notação, convenciona-se usar:

$a(e_i,e_j) = a_{ij}$, para $1 \leqslant i,j \leqslant 2$. Portanto (6 bis) toma a forma:

(7) $a(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{12}x_2y_1 + a_{22}y_2y_2$

Daí, deduz-se que associada à forma $a(.,.)$ definida no $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, satisfazendo às condições da Definiçao 1, encontra-se a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{sendo} \quad a(x,y) = (Ax|y)$$

Resta examinar a condição (iii) da Definição 1. De fato, tem-se de (7):

(8) $a(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

A condição (iii) exige que $a(x,x) > 0$ se $x \neq 0$. Logo

(9) $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 > 0$

para todo vetor $x \neq 0$. Como $x \neq 0$, suponha-se $x_2 \neq 0$. Dividindo-se ambos os membros de (9) por x_2, fazendo-se $\xi = \dfrac{x_1}{x_2}$ obtem-se, de (9),

(10) $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\,\xi + a_{22} > 0$,

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Sabe-se, do estudo do trinômio do segundo grau, que (10) é verdadeiro quando

$a_{11} > 0$ e $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, ou

(ii) $a_{11} > 0$ e $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Conclui-se que $a(.,.)$ é uma função produto escalar no $\mathbb{R}^2$, se e somente se a matriz A, associada a $a(.,.)$, for simétrica, $a_{11} > 0$ e $\det A > 0$.

É oportuno observar que o produto escalar do Exemplo 1 é obtido quando A for a matriz identidade, isto é:

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j, \ a_{ij} = 1 \text{ se } i = j.$$

O resultado dos Exemplos 1 e 2, vale para o caso em que $E = \mathbb{R}^n$ com as modificações necessárias.

Retorne-se a (2) dada por $(x|x) = x_1^2 + x_2^2$. Fazendo-se uma figura no plano, $\mathbb{R}^2$, deduz-se do teorema de Pitágoras que $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ é o comprimento do vetor x do $\mathbb{R}^2$. Note-se que ele é exatamente $\sqrt{(x|x)}$. O comprimento do vetor x, que se representa por $\|x\|$, é denominado, também, a norma de x, dada por:

(12) $\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$

Sabe-se que a norma definida por (12) no $\mathbb{R}^2$, por meio do produto escalar $(x|y) = x_1y + x_2y_2$, possui as propriedades, decorrentes das propriedades de $(x|y)$:

- $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$, vetor nulo do $\mathbb{R}^2$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Estas propriedades, motivam a seguinte definição geral:

DEFINIÇÃO 2 - Seja E um espaço vetorial real. Denomina-se uma norma em E, uma função $\|.\|$ definida em E com valores reais; satisfazendo às seguintes condições:

i) $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$, sendo 0 o vetor nulo de E.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, para todo par $x,y \in E$.

Observe-se que se um espaço vetorial E for dotado de um produto escalar $a(x,y)$, então ele induz em E uma norma definida por:

$$\|x\| = \sqrt{a(x,x)}.$$

Uma norma em um espaço vetorial E não induz, em geral, um produto escalar em E. O problema a resolver, seria encontrar um axioma a ser incorporado aos da Definição 2, para que uma norma induzisse um produto escalar. O § a seguir é dedicado a este problema.

2. IDENTIDADE DO PARALELOGRAMO - Seja E um espaço vetorial real, dotado de produto escalar $a(x,y)$. É suficiente raciocinar nos subespaços de dimensão dois de E. Considere-se $x,y \in E$. Tem-se, por definição:

$$\|x + y\|^2 = a(x + y, x + y) \;;\; \|x - y\|^2 = a(x - y, x - y)$$

Efetuando-se os cálculos, obtem-se:

$$(1) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \, \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Conclui-se que um espaço vetorial E foi dotado de produto escalar $a(x,y)$, então a norma $\|x\| = \quad a(x|x)$, por ele introduzida, satisfaz a identidade (1), denominada IDENTIDADE DO PARALELOGRAMO. Geometricamente ela afirma que em um paralelogramo, a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de seus lados.

EXEMPLO 1 - Considere um subespaço de dimensão dois de E, o qual identifica-se ao $\mathbb{R}^2$. Considera a norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Por um cálculo simples, conclui-se que ela satisfaz à identidade (1).

EXEMPLO 2 - Ainda no mesmo espaço do EXEMPLO 1, considere-se norma:

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

Trata-se de uma norma, porém não é válida a identidade (1).

As normas anteriores são casos particulares da norma:

$$\|x\|^p = |x_1|^p + |x_2|^p \quad , \quad 1 \leq p < +\infty$$

A do Exemplo 1 é o caso $p = 2$ e do Exemplo 2 é o caso $p = 1$. Apenas o caso $p = 2$ satisfaz a identidade do paralelogramo. Consulte-se observações no final deste artigo.

Seja E dotado de produto escalar $a(x,y)$ e $\|x\|^2 = a(x,y)$. Um cálculo simples, prova que:

(2) $4a(x,y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

Será demonstrado, a seguir, que em um espaço vetorial real E, a(x,y) definida por (2) é uma boa definição do produto escalar, se a norma de E satisfaz à identidade do paralelogramo.

PROPOSIÇÃO 1 (Fréchet - Von Neuman) - Seja E um espaço vetorial real dotado de uma norma $\|.\|$, satisfazendo à identidade do paralelogramo. Então:

(3) $a(x,y) = \frac{1}{4} [\ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$

é um produto escalar em E.

DEMONSTRAÇÃO

É suficiente verificar-se que a função a(.,.) definida por (3) satisfaz às condições da definição de propriedade escalar, Definição 1, § 1.
De fato, a(x,y) = a(y,x) facilmente constatada da definição (3). Conclui-se que a(x,y) é simétrica.
Tem-se $a(x,x) = \frac{1}{4} \|2x\|^2 = \|x\|^2$ pela propriedade (ii) da definição de norma, cf. Definição 2, § 1. Logo, a(x,y) é estritamente positiva. Sendo a(x,y) simétrica, para completar a demonstração é suficiente provar que ela é linear na primeira coordenada.

Realmente, pela identidade do paralelogramo, tem-se:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Substituindo-se membro a membro, vem:

$$\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 = 2(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2)$$

Da definição (3) e desta última identidade, vem:

$$4a(x + y,z) + 4a(x - y,z) = 8a(x,z) \quad \text{ou}$$

(4) $a(x + y,z) + a(x - y,z) = 2a(x,y)$

Note-se que $a(0,z) = \|z\|^2 - \|z\|^2 = 0$, por (3) e pela (ii) da Definição 2, § 1.

Logo, fazendo-se x = y em (4), obtem-se:

$$a(2x,z) = 2\,a(x,z)$$

Retomando-se a (4), obtem-se:

$$a(x + y,z) + a(x - y,z) = a(2x,z)$$

Tomando-se $x + y = x$, $x - y = y$ resulta $2x = x + y$, logo:

$$a(x,z) + a(y,z) = a(x + y,z)$$

provando que $a(x,y)$ é aditiva na primeira coordenada.

Sendo simétrica, implica ser a forma aditiva na segunda coordenada.

Resta apenas, demonstrar a homogeneidade na primeira coordenada, isto é, $a(\lambda x,z)=\lambda a(x,y)$ para todo número real λ.

Considere-se o conjunto S definido por:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; a(\lambda x,y) = \lambda a(x,y)\}$$

É suficiente provar que $S = \mathbb{R}$. Tem-se $S \subset \mathbb{R}$. Portanto, devemos provar que $\mathbb{R} \subset S$. Tem-se que $0 \in S$. De $a(0,y) = 0$, vem $a(x + (-x),y) = 0$, logo $a(-x,y) = -a(x,y)$, provando que $-1 \in S$. Sendo $a(x,y)$ aditiva $\lambda,\mu \in S$, $\lambda \pm \mu \in S$ resultando que $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, os inteiros, pertencem a S. Considere-se $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}, \mu \neq 0$. Obtem-se $a(\frac{\lambda}{\mu} x,y) = \lambda a(\frac{x}{\mu},y)$. Sendo $\mathbb{Z} \subset S$, obtem-se, multiplicando-se ambos os membros por μ, vem $a(\frac{\lambda}{\mu} x,y) = \frac{\lambda}{\mu} a(x,y)$, provando que S contém os racionais $\mathbb{Q}$. Para provar que S contém os irracionais, note-se que as funções $\alpha \longrightarrow \|\alpha x + y\|$, $\alpha \longrightarrow \|\alpha x - y\|$ são contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, fixados $x,y \in E$. Seja λ irracional e $(\lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de racionais convergindo, em $\mathbb{R}$, para λ. Obtem-se:

$$a(\lambda x,y) = a(\lim\lambda_n x,y) = \lim a(\lambda_n x,y) =$$

$$= \lim\lambda_n a(x,y) = \lambda a(x,y)$$

Portanto S contém os números reais, concluindo-se que $a(x,y)$ é homogênea. Logo, $a(x,y)$ definida por (3) é um produto escalar.

Q.E.D.

OBSERVAÇÕES

1. Com apropriadas mudanças, o que foi dito acima vale para o caso de espaços vetoriais com escalares complexos.

2. Há várias outras propriedades métricas do plano que implicam na existência do produto escalar associado a uma norma. Por exemplo, há uma condição motivada pelo teorema de Pitolomeu sobre quadriláteros. De modo análogo há outra usando propriedades do triângulo isósceles. Outro aspecto geométrico associado às normas que induzem produto escalar, é a regularidade à superfície da esfera unitária. Como é sabido, dada uma norma $\|.\|$ em E, a esfera unitária é $\{x \in E ; \|x\| < 1\}$ e sua superfície, ou sua fronteira, é $\{x \in E ; \|x\| = 1\}$. É útil consultar Schoenberg [8]. Seria educativo fazer os gráficos das esferas unitárias no $\mathbb{R}^2$, relativas às normas dos Exemplos 1 e 2.

3. No Exemplo 2, as normas aí definidas, dependiam de p em $[0, +\infty[$. Que acontece quando $p = +\infty$? Demonstra-se que

$$\lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} = \text{máx} (|x_1| , |x_2|),$$

para todo $x = (x_1, x_2)$.

De fato, suponha-se que máx $(|x_1|, |x_2|) = M$

Note-se que M será $|x_1|$ ou $|x_2|$. Tem-se $|x_1| \leqslant M$ e $|x_2| \leqslant M$. Logo $|x_1|^p + |x_2|^p \leqslant 2M^p$. Portanto:

$$(5) \quad \lim_{p \to \infty} p \quad (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \leqslant M$$

Para fixar idéia, suponha-se que $M = |x_1|$. Semelhante argumento vale quando $M = |x_2|$. Para cada $\varepsilon > 0$, tem-se $M - \varepsilon < |x_1|$, isto é, $(M - \varepsilon)^p < |x_1|$ e com mais forte razão $(M - \varepsilon)^p < |x_1|^p + |x_2|^p$. Daí conclui-se que:

$$M - \varepsilon \leqslant \lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$$

Válido para todo $\varepsilon > 0$. Resulta que:

$$(6) \quad M \leqslant \lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$$

De (5) e (6) conclui-se que:

$$\lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} = M = \text{máx} (|x_1|, |x_2|)$$

Tem-se uma nova norma no $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\ (|x_1|, |x_2|)$$

Q.E.D.

Seria educativo fazer o gráfico das esferas unitárias das normas do Exemplo 2, com $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brezis, Haim - Analyse Fonctionale - Masson Paris, France 1953.

[2] Day, M.M. - Some characterizations of inner product spaces - Trans.Amer.Math.Society, 62(1-147) 320-337.

[3] Fichin, F.A. - Note on the existence of escalar products in normed linear spaces - Ann. of Math. (2) 45 (1944) 362-366.

[4] Fréchet, M - Sur la definition axiomatique d'une classe d'espaces véctoriels distancés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert Ann. of Math. (2) 36(1935) 705-718.

[5] Jordan, P. and Von Neuman J. - On inner products in linear metric spaces. Ann. of Math.(2) 36 (1935) 719-723.

[6] Kakutani, S. - Some characterization of Euclidian space, Jap. J. Math. 16(1939) 93-97.

[7] Lorch, E.R. - On some implications which characterize H. spaces - Ann.of Math. 49 (1948) 523-532.

[8] Schoenberg I.J. - Aremark in N.N. Dky characterization of inner product spaces, and a conjecture of L.M. Blumental, Proc. Anner Math. Soc. 3 (1952) 961-964.

PROBLEMAS, IDÉIAS E SUGESTÕES

Cristina Loureiro e Leonor Moreira

Transcrito da Revista Educação e Matemática, Ano I, nº 1, Jan/87, da Associação de Professores de Matemática de Portugal

MANDARIM TAMBÉM TEM EXAME

No ano 855 da nossa era, vivia, na China, o imperador Yang Souen. Tendo vagado um lugar importante e havendo dois mandarins interessados no cargo, o imperador decidiu que ocuparia o lugar o mandarim que resolvesse o seguinte problema.

O chefe de uma quadrilha de ladrões dizia para os seus homens:

– Se cada um de nós ficar com quatro das peças de tecido que roubamos, sobram duas peças.

Mas se cada um de nós quiser ficar com cinco, faltam quatro peças.

Quantos eram os ladrões?

Nível de Escolaridade – Básico

Notas Metodológicas – Os alunos do Ensino Básico só podem chegar à solução por tentativas.

- Sugere-se o trabalho em grupo, seguido de discussão alargada ao grupo/turma.
- Se as crianças não esboçarem qualquer estratégia de abordagem, certifique-se de que compreenderam o enunciado do problema. Em caso afirmativo, sugira que experimentem com um número qualquer de ladrões e que calculem o número de peças de tecido que satisfaz cada uma das condições do problema.
- Sugira que organizem os resultados das diferentes tentativas.
- Aos grupos que derem o trabalho por acabado, sugira, primeiro, que testem a "solução" e, depois, proponha-lhes o problema de desenvolvimento.
- Na discussão alargada, proponha a seguinte apresentação.

Nº de ladrões	1	2	3	4	5	**6**	7
Nº de peças no primeiro caso	6	10	14	18	22	**26**	30
Nº de peças no segundo caso	1	6	11	16	21	**26**	31

- Ponha à discussão a existência de outras soluções. Para os alunos deste nível de escolaridade, a convicção de que a solução é única pode surgir da análise do quadro de valores obtidos. Veja-se que: – o número de peças de tecido aumenta com o núme-

ro de ladrões, em qualquer dos casos;
– entre 1 e 5 ladrões, a diferença entre o número de peças, num e noutro caso, decresce até acabar por se anular no ponto crítico 6 (solução);
– a partir de 6 ladrões, a diferença entre o número de peças começa a aumentar e pode-se prever que será cada vez maior.

Desenvolvimento – Inventar um problema com estrutura idêntica pode ser uma tarefa interessante. Sugira aos alunos que, partindo de um dado número de ladrões, construam um problema semelhante.

ARRUMAÇÕES DIFÍCEIS

Dispomos de uma colecção de objectos. Se os colocarmos em filas de 4 sobram 2; se os colocarmos em filas de 5 sobram 3. Por quantos objectos é formada a colecção?

Nível de Escolaridade – Secundário

Notas Metodológicas – Algumas soluções deste problema poderão ser obtidas por tentativas, utilizando uma certa quantidade de objectos ou através de representação no papel. No entanto, um problema com mais de uma solução tem a vantagem de criar a necessidade de organizar e relacionar os dados de forma a que se consigam obter todas as soluções possíveis. Assim, a resolução lógica e organizada, com a conseqüente utilização de um ou mais algoritmos, apresenta-se como altamente vantajosa em relação à resolução por tentativas que, quando muito, poderá fornecer algumas soluções.

A utilização de três incógnitas, das relações entre elas e a organização de dados em tabela são outros aspectos positivos do interesse formativo deste problema.

Proposta de Resolução

Nº de objetos: n
Nº de filas de 4: x
Nº de filas de 5: y

$4x + 2 = n$ $\qquad x = \dfrac{5y + 1}{4}$

$5y + 3 = n$

Para obter os pares de soluções inteiras de equação deve atender-se a que $5y+1$ seja múltiplo de 4.

y	5y + 1	x
1	6	
2	11	
3	16	4 – – –> n= 18
4	21	
5	26	
6	31	
7	36	9 – – –> n= 38

Qualquer solução do problema poderá ser obtida a partir da expressão $n = 18 + 20K, k \in \mathbb{N}$. A razão de ser do factor 20 tem que ver com o facto deste ser m.m.c. (4,5).

UMA DOSE DE HUMOR EM SUA REFLEXÃO

Valderez F. Fraga, Ma.

Coordenadora de Educação e Desenvolvimento Humano
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Este instrumento é parte de um módulo de Avaliação de Desempenho do Professor pelo Aluno, dedicado especialmente a professores de 3º grau, da área de Tecnologia. Um significativo grupo desses professores, com os quais tive a satisfação de trabalhar, incentivou-me a desenvolver uma sistemática de avaliação que permitisse tanto ao aluno realizar auto-análise e autocrítica, quanto oferecesse ao professor dados e percepções que o levassem a refletir sobre seu próprio desempenho docente, qualidade de planejamento e de apresentação de sua disciplina, bem como de suas atitudes pedagógicas.

Para isto, a fundamentação dos instrumentos assentou-se em Objetivos Afetivos e Micro Ensino, o que gerou interesse na participação por parte do aluno, facilitando respostas ou colocações sinceras e úteis ao professor envolvido no processo, incentivou o respeito recíprocro professor/aluno, o diálogo franco e ético e, ainda, o interesse dos demais professores pela problemática ensino X aprendizagem como um todo, a partir das verificações obtidas.

Este instrumento, em específico, embora algumas peculiaridades do contexto para o qual foi elaborado (por exemplo, uma escola de Engenharia que mantém tradicionalmente um sistema de orientação acadêmica e humana, o Sistema de Aconselhamento), poderá ser utilizado por qualquer grupo de professores.

Professores da área de Tecnologia, em geral, costumam ressentir-se da escassez de instrumentos disponíveis e úteis à sua realidade e necessidades, o que aparece menos freqüentemente entre os professores da área de Ciências Humanas.

Os demais instrumentos que integram o conjunto citado representam necessariamente o resultado de encontros de grupos de professores que participaram de sua elaboração. Não se trata, pois, de um módulo de instrumentos de avaliação elaborado a priori, mas originado em cada contexto, procurando respeitar diferenças individuais, interesses e necessidades de cada realidade a ser tratada.

A razão pela qual o instrumento "Uma Dose de Humor em sua Reflexão" foi selecionado para divulgação mais ampla deve-se a características especiais que permitem seu emprego isoladamente, como incentivo à análise e à reflexão dos professores sobre o que cada um faz ou desejaria fazer, visando o aperfeiçoamento de suas atividades docentes.

Este instrumento emprega duas estratégias que precisam ser bem compreendidas:

1. as respostas restritas às alternativas Falso e Verdadeiro são intencionais. Visam desenvolver um nível ótimo de necessidade de:
   a) discutir as questões propostas com seus pares;
   b) levantar as percepções dos alunos, a fim de checar com a auto-análise e a autocrítica própria de cada professor.

2. O conteúdo pedagógico do Instrumento cobre os assuntos: aula, conteúdo, interação, planejamento, avaliação, objetivos.

Alguns ítens correspondentes a uma das categorias acima foram intencionalmente colocados no contexto de categoria diversa. Essa abordagem é fundamentada em Administração de Conflitos, a partir de Eventos Críticos. Essa abordagem apresenta a vantagem de facilitar o tratamento de cada problemática dentro do contexto em que normalmente ocorre. Ex.: Item 4-1 Aula refere-se a VI Objetivos, questionando se os **objetivos** de sua Disciplina estariam claros para os alunos, pelo fato de ser **a situação aula** fácil de identificar algum problema e a mais adequada para tratar do assunto.

Encaminhar a:

Profª Valderez F. Fraga
CTA – ITA – IDV – CEDH
12225 – São José dos Campos – SP

INTRODUÇÃO

Não é fácil a vida de professor. Todo mundo tem um número incrível de expectativas em cima de sua atuação, inclusive você.

Nossa proposição é a de que você deva brindar-se com uma **Auto-análise bem humorada**, já que você vive se colocando na berlinda.

Este questionário é só seu; digamos que represente a **Voz da Consciência do Professor.** Que diálogo você teria com ela?

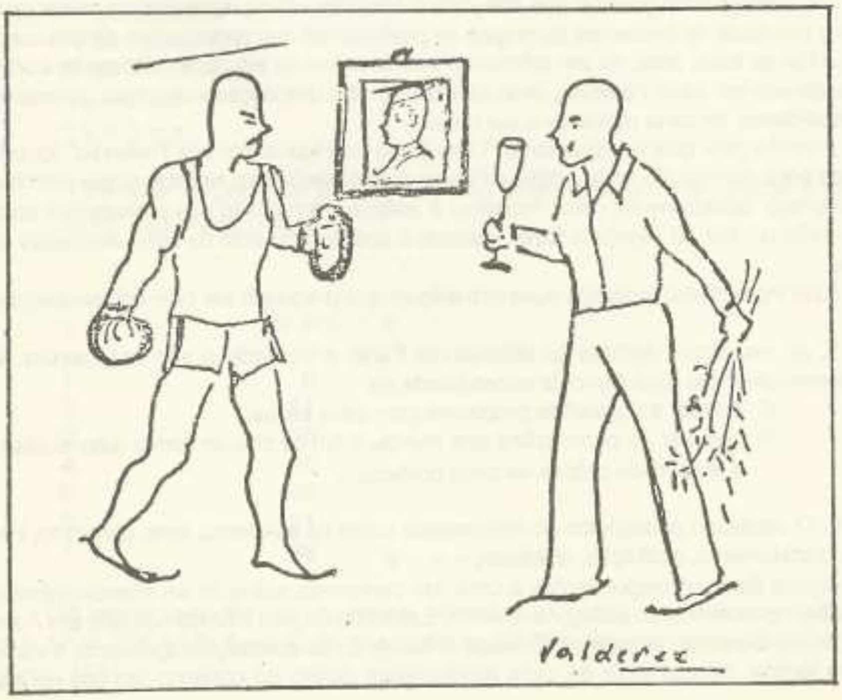
Vejamos: Seis tópicos são apresentados a você sobre sua Disciplina.

I – Aula	IV – Planejamento
II – Conteúdo	V – Avaliação
III – Interação	VI – Objetivos

Marque os que revelarem a sua realidade e, após cada tópico, analise-se de acordo com as instruções.

Mentirinhas não valem, heim?

... Mas trate-se com cordialidade. Por ser um professor, pelo menos isto você merece.



I – AULA

1. Tenho procurado conversar com meus alunos sobre a necessidade desta disciplina para a formação dos mesmos. F V

2. Tenho procurado incentivar discussões sobre o conteúdo desta disciplina em classe. F V

3. Tenho administrado eficientemente cada hora/aula desta disciplina. F V

4. Meus alunos já me disseram que deixo claro os objetivos desta disciplina. F V

5. Os levantamentos junto aos meus alunos têm por objetivos:
   - facilitar a auto-análise e a autocrítica do aluno F V
   - desenvolver a disciplina consciente F V
   - inteirar-me sobre as dificuldades dos alunos F V
   - checar a atmosfera em que se desenvolvem as minhas aulas F V
   - traçar correlações entre o desempenho acadêmico da turma e suas percepções sobre esta disciplina. F V
   - receber "feedback" sobre o meu desempenho F V
   - aprimorar a disciplina e o meu desempenho F V
   - ajudar o aluno a obter sucesso em suas atividades acadêmicas F V
   - melhorar o relacionamento em sala F V

6. Os alunos podem encontrar oportunidades para criatividade nesta disciplina. F V

7. Procuro variar as situações de ensino em sala. F V

8. Tenho criado situações para que o aluno desenvolva:
   - criatividade F V
   - iniciativa F V
   - rapidez F V
   - precisão F V
   - liderança F V
   - auto-disciplina F V
   - sistemática de trabalho F V
   - espírito de equipe F V

9. Identifico tópicos e unidades desta disciplina, considerados pelos alunos como:
   - difíceis F V
   - fáceis F V
   - estimulantes F V
   - cansativos F V
   - monótonos F V
   - superficiais F V
   - aprofundados F V
   - irrelevantes F V

10. Tenho trabalhado sobre estas verificações F V

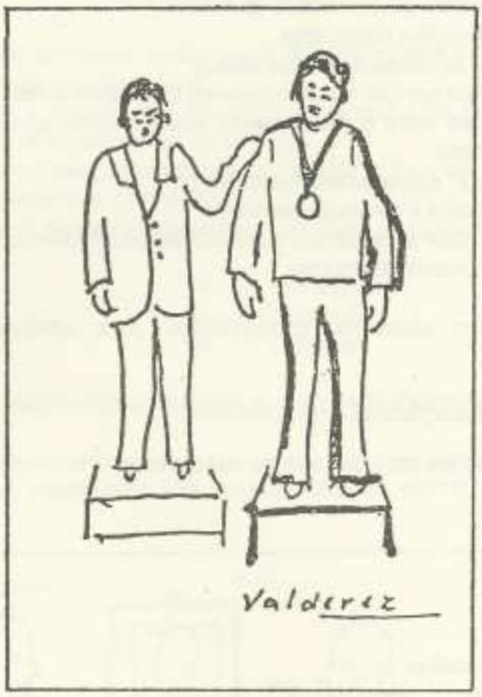
11. Os exemplos que apresento em aula são:
    - atualizados F V
    - significativos ao contexto e ao conteúdo F V
    - esclarecedores F V

12. A atmosfera em minhas aulas é saudável, pois os meus alunos me confirmaram isto:
    - ambiente tranqüilo F V

– estimulante – não tumultuado F V
– descontraído – sem excesso F V
– participativo – sem monopólios F V
– integrador – sem acomodação F V

AULA – INSTRUÇÕES

Se você obteve entre 33 e 39 pontos, somando todos os "V" de questões e itens, você é um verdadeiro campeão. Resta desejar que seus alunos o mereçam.



Se você obteve 20 pontos, sua aula deve estar entre as muito significativas na instituição. Regozije-se.

Se você obteve 15 pontos e incluiu as questões 2, 3, 4, 6, 7 e 10, sua aula deve ser bastante boa. Vá em frente.

Se você não marcou nem 4 das questões citadas acima, analise com cuidado os aspectos em que coloca mais ênfase no seu trabalho, pois ele poderá necessitar de um redirecionamento.

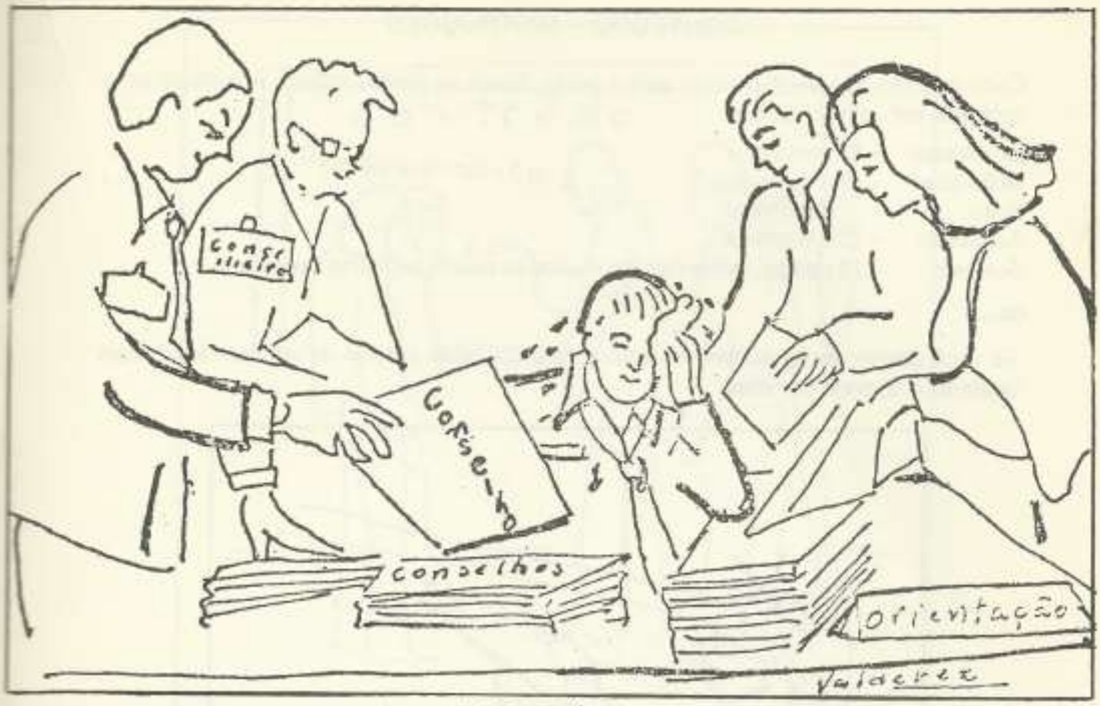
MAS...

Não desanime. Observe esta chance.

Se você somou pelo menos 5 pontos nos itens das questões 8 e 9, sorria, você promete.

E se você somou pelo menos 5 pontos nos itens da questão 5, então você é "aquele exemplo" que os seus colegas estão esperando.

Se você não obteve nada disto, entre na lista dos ACONSELHADOS, sua aula merece.



II CONTEÚDO

1. O conteúdo selecionado para esta disciplina é coerente com os objetivos da mesma. F V
2. Esta disciplina como **um todo** – conteúdo programático, abordagem teórico, prática, participação do aluno e do professor está em consonância com o curso em que está inserida. F V
3. A forma como esta disciplina está sendo oferecida permite sua integração ao currículo proposto. F V
4. O grau de dificuldade das unidades que compõem esta disciplina é adequado ao nível de graduação desta escola. F V
5. Há seqüência lógica nos conteúdos apresentados nesta disciplina. F V
6. Os pré-requisitos para esta disciplina foram cumpridos pelo menos em nível aceitável. F V
7. A quantidade de conteúdo e as atividades propostas nesta disciplina são adequadas ao tempo disponível. F V
8. A quantidade de unidades e os tópicos propostos não interferem na adequação quanto ao aprofundamento dos mesmos. F V
9. Tenho procurado manter-me alerta quanto á obsolescência de conteúdos. F V
10. Tenho oferecido oportunidades para que meus alunos trabalhem o conteúdo desta disciplina em sala. F V
11. Conheço as principais dificuldades encontradas por meus ex-alunos nesta disciplina. F V

CONTEÚDO – INSTRUÇÕES

Cada questão que você marcou vale 1 ponto. Some os pontos obtidos e verifique se o conteúdo est⅃ em condições:

Excelentes	– 11 pontos
Muito boas	– 9 a 10 pontos
Boas	– 7 a 8 pontos
Aceitáveis	– 5 a 6 pontos
Sofríveis	– 5 pontos, incluindo pelo menos as quatro primeiras questões;

ou...

Se você obteve menor número de pontos, seu conteúdo precisa de um "salvador", com urgência e só pode ser você.

... Mas, dê uma olhadinha por aí, garanto que você vai encontrar alguns colegas que também já descobriram isto e, então, a comissão curricular de seus sonhos poderá vir a realizar-se: imagine-se cercado de professores motivados e sorridentes, oferecendo-se para ajudá-lo a fazer uma operação plástica no seu "conteúdo", tornando-o belo, flexível e coerente, sem dor.

III – INTERAÇÃO

1. Devido à escassez de tempo para conversar com meus alunos, tenho procurado aplicar instrumentos de levantamento de dados junto a eles.
2. Tenho procurado conversar informalmente com meus alunos nesta disciplina, com os objetivos de:
   - conhecê-los melhor
   - obter "feedback" sobre o meu desempenho
   - perceber diferenças individuais
   - inteirar-me sobre necessidades, dificuldades e aspirações quanto a esta disciplina.
3. Tenho sido aberto ao questionamento dos alunos em sala de aula.
4. Tenho estado disponível para atender a consultas acadêmicas de meus alunos.
5. Tenho estado disponível para conversar com meus Aconselhados.
6. Ofereço oportunidades para que o aluno exercite sua responsabilidade.

INTERAÇÃO – INSTRUÇÕES

Compute um ponto para cada questão, exceto a questão 2 cujos itens valerão um ponto cada.

Se você obteve 9 pontos, quando resolver mudar de atividade profissional pense no ITAMARATI. Será um sucesso.

Se você obteve 8 pontos, certamente você tem um verdadeiro fã clube de alunos à sua volta.

Se você obteve 6 pontos, incluindo alguns itens das questões 2, 3, 4, 5 e 6, sua seriedade diante da função de educar merece respeito.

Se você marcou alguns pontinhos, mais a questão 1, você está no bom caminho para conhecer melhor os seus alunos e dar-se uma chance para elevar seu moral.

Mas se você não fez nada disto, tem só um pontinho aqui, outro ali..., então...

IV – PLANEJAMENTO

1. Planejo minha disciplina tendo em mente o restante do curso quanto a:
   - integração com as demais disciplinas F V
   - tempo disponível do aluno para atender a solicitações e compromissos com esta disciplina e com as demais F V
   - grau de relevância desta disciplina para o curso como um todo, de acordo com a proposição do mesmo. F V

2. Planejo minha disciplina discutindo o planejamento preliminar:
   - com os meus colegas na mesma discipina F V
   - com os colegas que ministram discipinas afins em meu Departamento F V
   - nas reuniões de ensino dos departamentos, quando a disciplina é ministrada em outra divisão. F V

3. Ao planejar esta disciplina, tenho utilizado a memória de meu curso do semestre anterior, a fim de aperfeiçoar abordagens, estratégias, técnicas, etc. F V

4. Meu plano inclui um Roteiro de curso para distribuir aos meus alunos. F V

PLANEJAMENTO – INSTRUÇÕES

Compute um ponto para cada item das questões 1 e 2 e um ponto para cada uma das restantes.

Você é recordista dos 8 pontos ou só não o é por não aplicar-se a você o terceiro item da questão 2?

Se você marcou 6 pontos, incluindo as questões 3 e 4, você é um pioneiro. Acredite no seu futuro.

Se você fez menos de 3 pontos, você merece mais consideração de sua parte. Você teria que ser um gênio de criatividade para poder conseguir uma boa aula sem a fase anterior. Não se trate desta maneira, é masoquismo.

V – AVALIAÇÃO

1. O conteúdo das avaliações é coerente com o conteúdo oferecido nesta disciplina. F V

2. A abordagem do conteúdo nas avaliações é, em pelo menos 70%, muito familiar aos alunos. F V

3. O número de avaliações permite bom grau de confiabilidade quanto ao aproveitamento do aluno. F V

4. As questões das avaliações oferecem diversificações suficientes de abordagens pa-

ra atender, em grau aceitável, as diferenças individuais dos alunos. F V

5. O conhecimento adquirido pode ser medido nas avaliações propostas para esta disciplina. F V

6. A abordagem das avaliações, nesta disciplina, não irá surpreender os alunos. F V

7. O raciocínio do aluno diante do conteúdo desta disciplina pode ser checado nas avaliações da mesma. F V

8. Ao elaborar os instrumentos de avaliação desta disciplina, tenho sempre em mente objetivos e metas da mesma, bem como o balanceamento dos conteúdos oferecidos. F V

9. Discuto, freqüentemente, as avaliações com meus alunos. F V

10. Os instrumentos de avaliação desta disciplina vêm representando um desafio incentivador para os alunos. F V

AVALIAÇÃO – INSTRUÇÕES

Você marcou os 10 pontos?... E além disto ainda leva a sério prazos para notas e boletins? Então você é a encarnação do **espírito** de Avaliação. Seria uma honra conhecê-lo.

Se você obteve 8 pontos, você pode candidatar-se a oferecer uma palestra sobre sua metodologia de trabalho docente, e a palestra será muito boa, acredite.

Se você obteve 6 pontos, e dentre eles as questões 1, 2, 3, 6 e 9, sem dúvida seus alunos o consideram um professor confiável.

Se você marcou "V" às questões 4, 7 e 10, você é um renovador. Aproveite seu idealismo e trabalho. Suas aspirações merecem sua atenção.

Se você percebeu, porém, que não seria muito honesto de sua parte marcar as questões 1, 3 e 5, **ainda bem que você é honesto.**

VI – O B J E T I V O S

1. Os Objetivos Gerais formulados para esta disciplina são claros e esclarecedores, pois já os discuti com meus colegas e/ou alunos. F V

2. Os Objetivos Específicos formulados para esta disciplina esclarecem aos alunos **o que é esperado deles** e o **que será oferecido a eles**, durante o semestre. F V

3. Junto aos objetivos, o Roteiro de Curso para os meus alunos contém uma Tentativa de Cronograma. F V

4. O conjunto de objetivos e conteúdo programático desta disciplina é coerente com a Ementa, pois já discuti este ponto no Departamento. F V

5. Os objetivos desta disciplina vão além do conteúdo, cobrindo o desenvolvimento de atitudes coerentes com a tradição de Disciplina Consciente desta Escola. F V

O B J E T I V O S – INSTRUÇÕES

Digamos que você tenha obtido os cinco pontos. Esteja certo de que todas as instituições de ensino apoiariam a multiplicação de professores da sua qualidade.

E se marcou as questões 1, 2 e 4, você é o professor que você próprio desejaria ter.

Se você marcou a 3, você, além de aspirar a organização de seu próprio trabalho, é colaborador com seu aluno e aprecia jogo limpo.

Se você não está muito afinado com estas questões, um diapasão poderá ajudá-lo.

É claro que o ensino precisa funcionar como uma orquestra. O difícil é que o maestro do grande grupo será a consciência de cada um.

A N E X O S

A abordagem dos instrumentos a seguir visa estimular:

a Avaliação do Desempenho do Professor e
da Disciplina pelo Aluno

Através da auto-análise e da autocrítica do
próprio Aluno e

do exercício da análise crítica do Aluno e do Professor, sobre as situações de Ensino/Aprendizagem em que ambos estiveram envolvidos.

ANÁLISE DE PROCEDIMENTOS E ATITUDES DO PROFESSOR – PELO ALUNO

MARQUE CADA ITEM ABAIXO PARA INDICAR:

P – algo que o Professor faz e que o ajuda
D – o que o Professor deveria fazer para ajudá-lo
N – algo que o Professor faz e que o atrapalha

Disciplina ....

Data ....

Se desejar, assine ....

Nº	QUESTÕES	CONCEITOS		
		P	D	N
01	Citar o assunto da aula e explicar do que se trata			
02	Dar exemplos			
03	Repetir as explicações com outras palavras			
04	Fazer perguntas em sala			
05	Ouvir e responder as perguntas dos alunos			
06	Aproveitar perguntas para esclarecer e ampliar assuntos			
07	Dar exercícios (práticos ou teóricos) em sala			
08	Dar exercícios para casa e corrigí-los			
09	Anotar pontos-chave no quadro-negro			
10	Oferecer textos básicos e esquemas			
11	Indicar bibliografias			
12	Pedir pesquisa sobre o assunto			
13	Fazer uma síntese ao final da aula			
14	Comentar problemas de provas de forma impessoal e ética			
15	Escrever comentários nas provas			
16	Revisar os conteúdos antes das provas			
17	Orientar sobre forma e conteúdo de trabalhos escritos			
18	Organizar discussões sobre tópicos diversos			
19	Procurar manter ambiente descontraído			
20	Ouvir as opiniões contrárias, incentivando fundamentação para as mesmas			
	TOTAL DE RESPOSTAS			

CEDH-ITA 1988