BOLETIM GEPEM

25

ANO XIV 2º SEMESTRE 1989

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO
GEPEM
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APOIO FINANCEIRO DO
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA
– PADCT – CAPES –

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Regina Monken

Em novembro de 1988 realizou-se na Universidade Federal Fluminense, em Niterói, a 1ª Reunião Pró-Formação do Grupo de Educação Matemática de Niterói. Nessa ocasião, nossa associada e freqüente colaboradora Ana Kaleff proferiu palestra sobre a origem e aspectos do desenvolvimento da Matemática Moderna, reconstituindo a existência da Educação Matemática nos seus primeiros 30-40 anos. Iniciamos o boletim 25, relativo ao 2º semestre de 1989, com o artigo-transcrição dessa palestra.

A seguir reproduzimos do volume 66, nº 154, da Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, uma publicação do INEP, o artigo do professor Newton Duarte sobre o ensino da adição e da subtração, onde ele aborda questões importantes na Educação, como: a superação dos métodos escolanovistas e dos métodos tradicionais de ensino, a relação entre teoria e prática, entre outros. O trabalho descreve uma experiência com alfabetizandos adultos, funcionários da Universidade de S. Carlos.

Na palestra do GEPEM de Maio de 1989 o professor Luís Adauto Medeiros nos presenteou com a excelente conferência "Relações Métricas da Geometria Plana e Conseqüências", onde o autor apresenta fatos relevantes sobre espaços abstratos. Continuando com a estratégia de levar aos colegas de outros estados e aos demais, que nem sempre podem estar conosco nessas reuniões mensais, uma amostra do que nelas temos recebido, apresentamos o artigo "Sobre uma Propriedade Métrica do Paralelogramo", uma reconstituição da palestra de maio.

A revista Educação e Matemática é um periódico da Associação dos Professores de Matemática de Portugal. Dela transcrevemos a seção IDÉIAS,PROBLEMAS,SUGESTÕES, dando uma amostragem da seriedade com que lá é tratada a Educação Matemática.

"Uma dose de humor em sua reflexão" é um artigo que descreve um instrumento de auto-avaliação voltado para professores de 3º grau da área de tecnologia, elaborado pela professora Valderez Fraga, do ITA, S. José dos Campos. Acompanham o de auto-avaliação outros instrumentos: de avaliação do professor e da disciplina pelo aluno e de auto-avaliação do aluno. Acreditamos que esse material possa refletir, como pretende a professora Valderez ,"na qualidade do planejamento do professor e de suas atitudes pedagógicas, de uma maneira bem humorada".

MATEMÁTICA MODERNA. SUA ORIGEM E ASPECTOS DE SEU DESENVOLVIMENTO EM ALGUNS PAÍSES OCIDENTAIS

Profª ANA MARIA M.R. KALEFF
Departamento de Geometria – UFF
Palestra proferida na Primeira Reunião
Pró-Formação do Grupo de Educação Matemática
de Niterói – Nov./88

Nas últimas décadas ocorreu uma mudança sem precedentes nos currículos de Matemática na maioria dos países do mundo. A denominação "matemática moderna" ou "nova matemática" tem sido usada para indicar essa mudança, que ocorreu em todos os níveis escolares. Todavia, os programas, submetidos a essa reforma, apresentam diferenças consideráveis de um país para outro e até no mesmo país.

Algumas perguntas poderão ser colocadas:

a) Por que surgiram tais mudanças? Quais as razões dessas mudanças?

b) O que incentivou essa mudança?

c) Como foram implantadas?

d) Como foram se espalhando?

e) Qual foi a natureza e quais os efeitos dessas mudanças?

f) Como estão essas mudanças atualmente no Brasil?

Tentaremos respondê-las.

Clima em que se originou essa mudança.

Após a segunda Guerra Mundial, deu-se verdadeira explosão no conhecimento matemático; época de intensa atividade. Surgiram novos resultados; novos métodos e técnicas; foram criados novos conceitos matemáticos. Buscou-se uma abstração maior do pensamento; o que levou à necessidade de uma formulação de idéias mais cuidadosa e a uma maior precisão de linguagem.

O desenvolvimento tecnológico do pós-guerra foi visto pelos países desenvolvidos e também pelos em desenvolvimento recém independentes (como os africanos) como chave para o desenvolvimento social e global.

A matemática que havia tido um importante papel no desenvolvimento das conquistas tecnológicas obtidas até então, recebeu ênfase especial na produção de mais técnicos matemáticos e melhor formados. Na maioria dos países a população estudantil se expandiu enormemente, nos USA isso foi bem marcante, notando-se que um número maior de alunos ficava na escola em busca de qualificação superior, além da obrigatória. Nos países em desenvolvimento se criaram novas universidades e as oportunidades para a educação cresceram muito (nota-se que no Brasil de 1960 para cá duplicou o número de alunos nas universidades).

Além destes fatores, o lançamento da nave Sputinik I em outubro de 1957, pela Rússia, provocou uma comoção através de todo USA e do mundo ocidental cujos efeitos foram sentidos no investimento de grandes somas de fundos federais para inovações e incentivos à educação. As lideranças políticas dos países desenvolvidos do Ocidente, bem como do Japão, estavam preocupados com a necessidade de uma ampla educação para fazer frente ao crescimento rápido nos novos campos abertos pela indústria. O desafio russo os levou a acreditar que os currículos vigentes eram inadequados para enfrentar as ameaças do avanço tecnológico russo e pressionaram uma mudança a nível educacional, surgiram novos projetos de currículos e a realização de inúmeras conferências e simpósios de debates.

Uma das primeiras reações nos USA foi a criação dos grupos School Mathematics Study Group (SMSG) e do Physical Science Study Commitee (PSSC) em 1958 e 1959, que tinham como objetivo melhorar o ensino mediante preparação de textos cujos conteúdos eram ensinados através de experimentos. Esses textos foram publicados no Brasil em 1966 e 1967 sob o patrocínio da "Aliança para o Progresso" (convênio MEC-USAID)

A Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico (órgão que une os USA, Alemanha, países do Mercado Comum Europeu e os da Escandinávia) patrocinou em 1959 em Royaumont, na França em 1960 em Dubrovnic e em 1961, em Paris, seminários dos quais sairam as "Sinópses para a matemática da escola secundária e matemática para físicos e engenheiros", publicados pela UNESCO e que nortearam as mudanças que se seguiram.

Deve-se notar que as mudanças foram iniciadas a nível universitário, induzidas pelos governos; foram desenvolvidas por professores que estavam nas universidade e não no ensino secundário e muito menos no primário. Nesses seminários influenciaram principalmente os matemáticos franceses do grupo Bourbaki, sua preocupação com os conteúdos, com o aspecto formal, abstrato e rigoroso, com ênfase na precisão das definições e no uso cuidadoso da linguagem. A ênfase à Teoria dos Conjuntos, na busca pela unificação das estruturas leva Dieudonné (do grupo Bourbaki e talvez um dos maiores analistas) a dizer em Royaumont: "Abaixo Euclides", propondo o estudo da álgebra linear em substituição ao estudo da geometria euclidiana, ao da Trigonometria ao dos números complexos, etc. A utilidade da Geometria Euclidiana como meio de formação do pensamento é violentamente questionada; desloca-se o enfoque euclidiano onde se dava ênfase ao estudo dos triângulos através das congruências para o estudo do paralelogramo através de vetores e se introduz a álgebra vetorial.

Por outro lado as experiências levadas a efeito no começo dos anos 60, na Bélgica por Papy; na Austrália por Hull; no Canadá por Dienes e Gaulin baseadas nos desenvolvimentos psicológicos do ser humano, pesquisados nas experiências de Piaget, vêm modificar em muito o efeito inicial criado pela influência dos bourbakistas.

O desenvolvimento da Psicologia Genética Experimental e o crescente questionamento filosófico, político, cultural que se iniciou no final dos anos 60 colaboraram para o desenvolvimento de uma nova visão não somente do ensino da matemática, de seus conteúdos e métodos, mas também dos fins a que se propõe uma sociedade ao se estudar matemática.

Talvez, pudessemos resumir o ensino da matemática antes das considerações feitas acima com algumas questões. Existiam perguntas básicas:

O que ensinar?

Como ensinar?

A quem ensinar?

Com a evolução da Psicologia Genética surge outra questão:

Quando ensinar?

Como consequência do questionamento iniciado no final de 60 surge uma outra questão:

Para que ensinar?

Analisaremos alguns países onde as mudanças ocorreram.

I – Inglaterra

Informe Jeffrey – Publicado pelo órgão não governamental – "Mathematical Association", em duas partes:

Primeira parte – em 1944, proposta de mudanças para a escola secundária, com uma redução dos cálculos e manipulação da geometria formal, enfatizando a funcionalidade levando a matemática a ter uma relação mais com a vida e experiência dos alunos. Sugeria um currículo unificado para evitar a tradicional compartimentação em geometria, álgebra e artmética;

Segunda parte – em 1956, proposta de mudanças para a escola primária dando as diretrizes do ensino da matemática para as próximas décadas. Toma a posição de que as crianças se desenvolvem com ritmo próprio e que aprendem através de respostas ativas e das experiências.

Este informe foi preparado por matemáticos, professores universitários, lamentavelmente sem estabelecer conexões efetivas com as escolas primária e secundária e por isso influenciou muito pouco.

Por outro lado, as conexões mais efetivas entre as reformas propostas pelos professores universitários e os professores primários e secundários foram feitas através da associação de Professores de Matemática. Essa associação de professores **não** universitários surgiu da necessidade de se reunir interessados em investigar novos materiais didáticos para o ensino de matemática, enfatizando os métodos de ensino e não o conteúdo. As revistas publicadas entre 1964 e 1967, influenciaram muito o meio docente. Note que a exigência de uma mudança na mentalidade dos docentes partiu dos professores universitários, mas o ímpeto para tal, veio dos professores secundários.

No começo dos anos 60 surgiram muitos grupos na Inglaterra com desenvolvimento de outros projetos, sem apoio do Ministério da Educação mantendo a tradição inglesa das matemáticas aplicadas e evitando o excesso da abstração.

O projeto mais conhecido no Brasil é o Nuffield, iniciado em 1964, cujo registro foi publicado no Brasil com o nome "Se eu faço eu aprendo". Tinha como meta produzir um curso contemporâneo objetivando o relacionamento da criança com aspectos do mundo que a rodeia, introduzindo-a gradativamente no processo do pensamento abstrato e formando uma mente lógica, crítica, mas sempre criativa.

II – França, Bélgica, Suiça e Canadá

Em 1963 cria-se a Sociedade Belga de Professores de Matemática e forma-se em Paris um grupo de estudos dirigidos por membros do Grupo Bourbaki e que objetiva difundir trabalhos que melhor servissem à causa do ensino da Matemática.

Em 1955 é publicado "L'énsèignement des Mathematiques" por Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet e Gattegno.

Em 1957, Lucienne Felix, publica "L'Aspect Moderne des Mathematiques".

Em 1959, Papy, do grupo Belga, publica "Quinze leçons sur l'álgebre linéaire".

Em 1960, Dienes, em Quebec publica "Building up Mathematics"

Em 1963, Hull, na Austrália, faz suas primeiras experiências usando blocos lógicos, por ele criados que são desenvolvidos, posteriormente, por Dienes.

Em 1964, Choquet, do grupo Bourbaki, lança seu livro "L'énséignement de la Geometrie", onde faz uma exposição axiomática da geometria euclidiana com uma proposta diversa da de Dieudonné, expostas no congresso de Royaumont.

Em 1965, Dieudonné publica seu livro "Algébre linéaire et geómetrie élémentaire" refutando as idéias de Choquet e unificando a "geometria pura", geometria projetiva, geometria conforme, teoria dos Números Complexos, sob a álgebra linear.

Em 1967, o Centro Belga de Pedagogia e Matemática, ligado à Sociedade Belga de Matemática, começa a implantar com alunos de seis anos os mini-computadores de Papy, que têm como objetivo introduzir a criança no mundo racional matemático e iniciar progressivamente as técnicas de cálculo. Outros materiais manipuláveis e estruturados (material Cuisinaire e blocos lógicos) começam a ser utilizados no ensino. Os conceitos matemáticos vão ser construídos com o auxílio de materiais concretos, desenvolvendo-se a estrutura lógico-matemática através de relações que a criança estabelece com a ajuda desses materiais. Também, no Canadá, o Professor Claude Gaulin pesquisa com afinco esses materiais.

A preocupação com os aspectos psicológicos, com o desenvolvimento cognitvo da criança começa a se fazer presente e a influência da psicologia experimental se faz sentir através da aplicação dos estudos de Jean Piaget.

O questionamento para o ensino da matemática ganha mais uma questão: "Quando se ensinar um determinado conteúdo?"

Em 1969, o governo Francês instalou vários institutos de pesquisa no ensino da Matemática (IREM) nos quais também se reciclam professores e se preparam licenciandos.

A partir de 1974, muitas críticas começaram a surgir sobre as mudanças ocorridas com o ensino da Matemática. Matemáticos e educadores como André Revuz Fehr Gattegno e outros levantam dúvidas quanto ao sucesso dos métodos e meios utilizados nas mudanças.

III – Estados Unidos

Em 1951, em Illinois, sob a orientação do Professor Max Beberman, forma-se o programa UICSM que objetivava melhorar os currículos da escola secundária, enfatizando as leis algébricas, os princípios dedutivos, relações e funções, dando ênfase ao mesmo rigor e precisão que caracterizavam a nova matemática que estava sendo desenvolvida pelos grandes nomes de pesquisa. Pensavam em incluir o que chamavam "métodos pedagógicos da descoberta", porém, isso não ficou claro nos livros que se seguiram ao projeto.

Em 1957, surgiu o Projeto Madison sob a orientação do Professor Robert Davis, com o objetivo de formar professores. Desse projeto se originou material didático baseado no "método da descoberta" e se começou a fazer uso de materiais manipuláveis.

Em 1958, em Illinois, sob a orientação do Professor David Page, forma-se o programa UIAP, que visava a melhoria dos programas de escola primária, no qual o conteúdo foi outra vez priorizado.

Em 1961, surge o Projeto Minnes-mat, dirigido pelo professor Raul Rosenbloon, que propunha produzir um currículo integrado de matemática e ciências para crianças de 5 a 11 anos. Baseado fundamentalmente no meio ambiente, dando ênfase às experiências concretas das crianças, através das quais a percepção às idéias matemáticas pudessem ser desenvolvidas.

Com o surgimento dos grupos SMSG e PSSC, já citados, proliferam as idéias com a preocupação de "Textos Experimentais", onde o aluno aprende através de experiências que ele realiza.

No começo dos anos 70, seguidores do pedagogo Jerome Bruner levam adiante a idéia que "Todo tema pode ser ensinado de uma forma eficaz e intelectualmente honesta a qualquer criança em qualquer idade". Isto estimulou ainda mais a introdução, nos currículos da escola elementar de novos temas, que anteriormente só eram ensinados em níveis mais avançados. Assim, SMSG incluiu no seu programa para o primário geometria informal, probabilidade, álgebra e teoria dos números. O enfoque se situava no conteúdo, com ênfase na estrutura. O conceito de conjunto aparecia como conceito unificador e palavras como "propriedade numérica do conjunto", "comutativa"; "pertinência" encontravam lugar na linguagem da escola primária.

Em 1974, Morris Kline publica o livro "O fracasso da matemática moderna", onde são feitas sérias críticas a como se desenvolvia o movimento da reforma do ensino da matemática. Outros matemáticos também se levantaram contra os exageros vigentes, todavia o lucro com a venda dos livros textos, (originados dos projetos e que muitas vezes não haviam sido testados experimentalmente), foi um dos fatores primordiais para a disseminação das idéias. Também, os professores foram muito estimulados e, às vezes, até forçados pelo sistema escolar (representantes governamentais e professores universitários) a se reciclarem nos novos métodos.

Situação atual

De 1980 em diante, se intensificaram as preocupações com o resultado do ensino da matemática e foi sendo criada uma disciplina, considerada ainda hoje por Gaulin, como uma disciplina nascente, que é a Educação Matemática. Os pesquisadores não formaram ainda um consenso sobre qual é realmente a definição de sua área de abrangência, todavia sabe-se que Educação Matemática envolve não só didática da matemática e metodologia, mas Psicologia, Lingüística, Epistemologia, Sociologia, Didática em geral, Política, enfim, Educação Matemática abrange um espectro amplo de disciplinas.

Nesta década já foram realizadas nove conferências internacionais de Educação Matemática de grande porte, bem como inúmeros encontros americanos (CIEM); diversos grupos e associações de pesquisa; bancos de dados bibliográficos já foram implantados nos USA em conexão com bancos franceses e cada vez mais se intensifica o intercâmbio entre os professores e pesquisadores.

No Brasil

A repercussão do movimento de mudanças se fez sentir no Brasil no começo da década e com o apoio do governo para as reformas de currículo, com a nitida influência bourbakista.

Em 1961, no Recife foi publicado pelo Prof. Waldecyr C. Araujo Pereira o primeiro livro sobre matemática moderna intitulado "Matemática Dinâmica com Números e Cores".

As primeiras publicações para o secundário são do Professor Oswaldo Sangiorgi, do Grupo de Estudos de Matemática de São Paulo.

Em 1955, foi realizado o Primeiro Congresso Nacional de Ensino organizado pela Professora Martha Dantas, da Bahia. Outros congressos aconteceram em 1957 (RS); 1959 (RJ); 1962 (PA, organizado pelo Prof. Jorge E. F. Barbosa e pelo grupo de Lógica e Fundamentos do Departamento de Análise da UFF). Com a revolução de 64, não houve mais a possibilidade de realização de congressos e vários grupos de estudos se formaram, que trabalharam sem interseções entre eles GEMEG (do Estado da Guanabara); GEM (de São Paulo); GEMPA (de Porto Alegre) e outros, destacando-se o grupo da Bahia, liderado pelo Professor Omar Catunda.

Em Niterói, no começo dos anos 70, foram iniciadas no Centro Educacional de Niterói (CEN), experiências lideradas pela Professora Teresa Regina Werneck Richa. À vinda da Professora Lucienne Felix ao CEN é acrescida a ida do Professor Arago de Carvalho Backx para estudar com ela e Papy, na Bélgica. Também Dienes, Papy e Gaulin vêm a Niterói, Porto Alegre e São Paulo.

Após sua volta em 1971 ao CEN, o professor Arago de Carvalho Backx deu continuidade durante mais de 8 anos às experiências baseadas nos métodos belgas.

Ainda no começo da década de 70, surgiram os grupos da Universidade do Paraná, com interesse em Lógica e Geometria e o grupo da Unicamp, liderado pelo Professor Ubiratan D'Ambrósio.

Em 1976 é fundado no Rio o GEPEM, Grupo de Estudos de Pesquisas em Educação Matemática, liderado pela Professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes.

Em 1980, aconteceu o Primeiro Encontro Nacional de Professores de Educação Matemática da Unicamp e daí para cá encontros regionais têm acontecido cada vez com mais freqüência. Surgiram novos grupos (Fundão, RJ; G-Rio, RJ Momento SP; Gemani, Nova Iguaçu, RJ; CECI – Centro de Ciências, RJ) e o Primeiro Curso de Mestrado em Educação Matemática na UNESP – de Rio Claro.

Em fevereiro de 1987, o Primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) em São Paulo, buscouagregar os professores brasileiros e sugeriu a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática que finalmente foi oficialmente criada no Segundo ENEM em janeiro de 1988, em Maringá.

Nota-se, portanto, uma grande preocupação com os rumos que a Educação Matemática vai tomando no Brasil, preocupação essa, não só quanto aos conteúdos programáticos (o que ensinar?), mas com as pesquisas em Etnomatemática realizadas no Brasil. Considerações a níveis pedagógico e sociológico, começaram a surgir decorrentes da realidade brasileira. Parece-nos que finalmente surge uma preocupação de se analisar as necessidades reais do alunado brasileiro, principalmente da escola básica, à luz da psicologia, sociologia e de outras disciplinas, que não somente a da Matemática.

BIBLIOGRAFIA

a) UNESCO – L'Enseignement des Sciences Fondamentales (Mathematiques) - série, Volumes 1 e 2. Paris 1966 e 1981

b) KLINE, M. – O Fracasso da Matemática Moderna – Editora Ibrasa, São Paulo – 1976

c) REVUZ, A. – Matemática Moderna, Matemática Viva – Editora Fundo de Cultura, Rio de Janeiro – 1967

d) Cadernos Pedagógicos do CEN – Niterói, ano 7, nº 11 – 1980

Professora ANA MARIA M. R. KALEFF
Departamento de Geometria – UFF
Rua São Paulo, s/n – Valonguinho
24000 – Niterói
Rio de Janeiro

O ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO PARA ALFABETIZANDOS ADULTOS

Newton Duarte
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

O texto apresenta uma experiência de ensino das operações de adição e subtração com alfabetizandos adultos. Tal experiência teve por fundamento dois pressupostos pedagógicos matemáticos: 1) o cálculo no ábaco como uma das etapas mais importantes no processo histórico que gerou o cálculo escrito pode ser uma etapa igualmente importante no processo ensino-aprendizagem desse cálculo escrito 2) a relação entre a adição e a subtração, enquanto operações inversas entre si, é de fundamental importância para o processo ensino-aprendizagem dessas operações. A partir dessa experiência de ensino, o texto aborda questões como: a superação dos métodos tradicionais e escolanovistas; a relação entre teoria e prática; a necessidade de direção (pelo educador) e da recriação (pelo educando) do conhecimento socialmente acumulado e outras questões importantes para a reflexão pedagógica de um modo geral.

Introdução

Venho desenvolvendo um trabalho na área de ensino de Matemática com alfabetizandos (vide DUARTE, 1985a, 1985b, 1985c). Sendo quase inexplorado esse campo, tenho encontrado alguma dificuldades em debater, com outros educadores, os resultados parciais e provisórios a que tenho chegado. Na busca de superar essa dificuldade, optei por divulgar tais resultados através de publicações, esperando que isso suscite um debate mais amplo, do qual surjam sugestões e críticas que possam contribuir para a pesquisa que venho desenvolvendo.

Este artigo não se dirige apenas àqueles que trabalham com o ensino de Matemática e/ou com ensino de adultos, mas também àqueles que estão estudando e debatendo questões como aquelas sobre a superação dos chamados tradicionais e escolanovistas, sobre a relação entre a forma e o conteúdo do processo ensino-aprendizagem, sobre a dimensão técnica e política da educação, etc. A reflexão sobre esses temas pode ser enriquecida através de contribuições de cada área específica de ensino. Não é possível, no espaço de um artigo, analisar de modo mais detalhado todos esses temas através da seqüência de ensino apresentada. No entanto, procuro fornecer alguns elementos para essa análise. Creio que seria muito proveitoso, não só para o meu trabalho como também para a reflexão pedagógica de um modo geral, que educadores de diversas áreas se desvencilhassem daquele receio para com a palavra "matemática" e procurassem analisar cada pequeno procedimento aqui descrito, na sua relação com uma concepção pedagógica e social.

Neste trabalho apresento a Segunda Unidade do Programa desenvolvido com os alfabetizandos do Segundo Projeto de Alfabetização de Funcionários da UFSCar (PAF-2). Esta unidade se refere ao ensino das operações de adição e subtração, enquanto a Primeira Unidade pode ser conhecida através das publicações já citadas.

Primeiramente trato sinteticamente dos pressupostos pedagógico-matemáticos que nortearam esta Segunda Unidade; depois descrevo a seqüência de passos adotada e por fim analiso alguns aspectos implícitos.

Pressupostos pedagógico-matemáticos

A seqüência de passos baseou-se em dois pressupostos pedagógico-matemáticos:

1) O cálculo no ábaco como uma das etapas mais importantes no processo histórico que gerou o cálculo escrito pode ser uma etapa igualmente importante no processo ensino-aprendizagem desse cálculo escrito.

Os gregos e os romanos possuíam sistemas de numeração impróprios para o cálculo escrito. Calcular era uma tarefa quase que totalmente dependente do ábaco e a escrita era utilizada apenas para o registro das operações realizadas e dos resultados obtidos.

Os hindus possibilitaram o desenvolvimento de um sistema de numeração que depois foi difundido pelos árabes e que, em essência, é o sistema utilizado atualmente em nossa sociedade. Tal sistema de numeração incorpora os mesmos princípios do ábaco e isso possibilita que realizemos os cálculos por escrito com uma facilidade desconhecida para os gregos e os romanos.

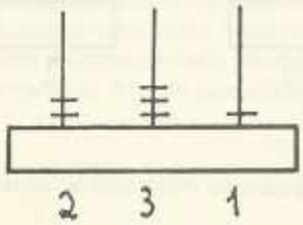
HOGBEN (1946:52-310) explica:

"O novo vocabulário numeral dos hindus permitiu executar no papel as operações efetuadas no ábaco e de maneira semelhante (...) Efetuar mentalmente ou 'de cabeça', na linguagem da fisiologia moderna, significa que o cérebro recebe, das pequenas variações de tensão dos músculos da órbita e dos dedos (órgãos de contagem), a mesma seqüência de mensagens nervosas que acompanham o trabalho no ábaco. Por exemplo, 'vão dois' quer dizer que esgotamos por duas vezes as contas de uma coluna e temos pois, de colocar duas contas na coluna vizinha da esquerda, para nos lembrarmos do fato. Isto só é possível, porque o emprego do 0 (zero) ou sunya, para representar a coluna vazia, faz o número de algarismos igual ao número de colunas do ábaco."

Assim como na história da humanidade o sistema de numeração hindu-arábico permitiu realizar por escrito adições e subtrações seguindo os mesmos princípios do cálculo que se fazia no ábaco, a aprendizagem do cálculo escrito pode apoiar-se no cálculo através desse instrumento, possibilitando ao educando a compreensão da origem de cada procedimento operatório.

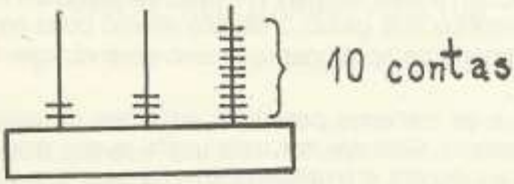
Para representar no ábaco, por exemplo, o número duzentos e trinta e um, utilizam-se três colunas. A primeira coluna da direita teria uma conta; a segunda coluna, três contas com cada uma correspondendo a dez da primeira coluna; é a terceira coluna, da direita para a esquerda, teria duas contas, com cada uma correspondendo a dez da segunda e, conseqüentemente, cem da primeira.

Em nosso sistema de numeração esse número é escrito assim: 231. O algarismo 2, pela sua posição, assume um valor correspondente a 2 centenas ou 20 dezenas ou ainda 200 unidades; o algarismo 3 assume um valor correspondente a 3 dezenas ou 30 unidades e o algarismo 1 assume um valor correspondente a uma unidade.

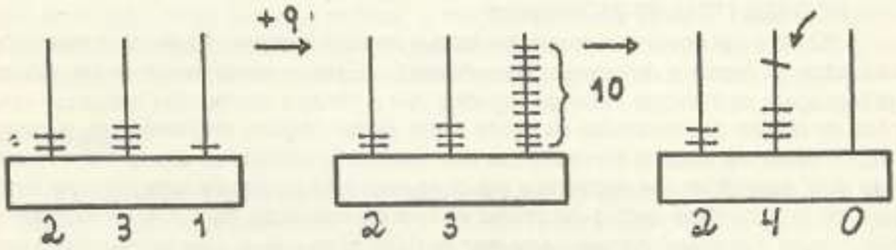


Como se pode notar, seja no ábaco ou seja através do sistema de numeração são utiizados o princípio de valor posicional e a relação de correspondência um-para-dez. Isso mostra que o sistema de numeração e o ábaco baseiam-se nos mesmos princípios.

Vejamos agora algumas das conseqüências disso no que diz respeito ao cálculo escrito. Se adicionarmos nove unidades ao número tomado como exemplo, obteremos um total de dez contas na coluna das unidades.



Com base na relação de correspondência um-para-dez e no valor posicional, retiramos essas dez contas da coluna das unidades e correspondendo a essas dez, é adicionada uma conta às da coluna das dezenas.

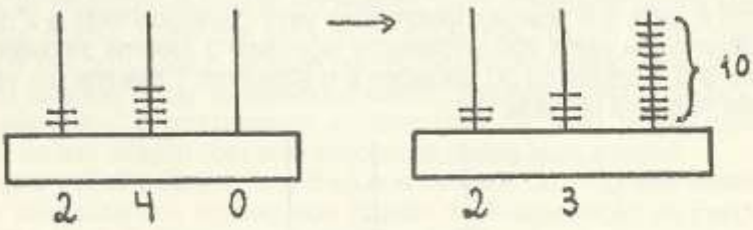


Eis aí a justificativa do procedimento chamado "vai-um" do algoritmo da adição.

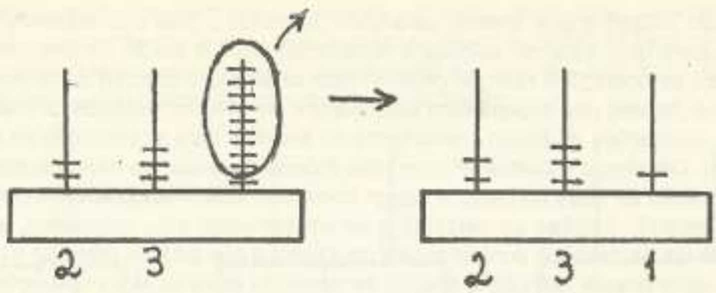
$$\begin{array}{r}231\\ +\quad 9\\ \hline\end{array} \rightarrow 9+1=10 \rightarrow \text{"vai-um"} \qquad \begin{array}{r}1\\ 231\\ +\quad 9\\ \hline 0\end{array} \rightarrow \qquad \begin{array}{r}1\\ 231\\ +\quad 9\\ \hline 240\end{array}$$

O mesmo ocorre com o oposto de "vai-um", que é o "empresta-um".

Se de 240 queremos subtrair nove unidades, retiramos uma conta da coluna das dezenas e a trocamos por dez que são colocadas na coluna das unidades.



Dessas dez, podemos então subtrair as nove unidades.



É o que acontece no algoritmo da subtração;

$$\begin{array}{r} 240 \\ -\ \ 9 \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{troca-se uma dezena por dez unidades.} \rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 10} \\ 2\cancel{4}0 \\ -\ \ 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 10} \\ 2\cancel{4}\cancel{0} \\ -\ \ 9 \\ \hline 231 \end{array}$$

Como se pode ver, o ábaco mostra, de uma forma bastante visível, as origens dos procedimentos operatórios da adição e da subtração e mostra, ainda, aquilo que é o segundo pressuposto pedagógico-matemático dessa Unidade.

2) A relação entre a adição e a subtração, enquanto operações inversas entre si,[1] é de fundamental importância para o processo ensino-aprendizagem dessas operações. Já mostrei que procedimentos operatórios como o "vai-um" e o "empresta-um" nada mais são do que o mesmo movimento com sentidos opostos. É, pois, de fundamental importância para o domínio do cálculo escrito, a compreensão dessa relação entre operações inversas entre si.

Além dessa importância para o cálculo, existe a importância para o raciocínio de um modo geral do educando. PIAGET (1975:247), chama a isso de reversibilidade do raciocínio. Vejamos como ele descreve a ausência desse tipo de raciocínio:

"Pensar de maneira irreversível é não saber passar de uma destas operações para a outra, é portanto, em poucas palavras, não saber manejar as operações como tais: é substituir um mecanismo operatório móvel e de direção dupla pelas percepções estáticas e sucessivas de estados que é impossível sincronizar e, conseqüentemente, conciliar."

Essa relação entre a adição e a subtração enquanto operações inversas entre si já vinha sendo trabalhada desde a Primeira Unidade, através de certos exercícios de representação de números no ábaco. (DUARTE, 1985c, sétimo passo).

É por considerar tão importante essa relação que não concordo com a proposta de outros trabalhos onde se ensina primeiramente a adição e a multiplicação. (NICOLAI, 1984: 10 e LAMPARELLI, 1984: 11)

O ensino

Na seqüência de passos adotada procurei com que os educandos captassem através do seu fazer aqueles pressupostos descritos anteriormente. Uma observação: o tempo requerido para percorrer, com os educandos, cada passo da seqüência, é variável de acordo com as características próprias de cada situação (horas diárias disponíveis, período fixado para o trabalho de ensino, ritmo de aprendizagem dos educandos, etc.).

Primeiro passo: adição e subtração no ábaco (sem "vai-um" e sem "empresta-um")

Foram utilizados dois ábacos para cada educando e para o professor. Os educandos realizaram uma série de adições e subtrações com o auxílio de dois ábacos. Não escreveram as operações nem no caderno nem na lousa. O objetivo deste passo foi desenvolver o domínio dos movimentos (das mãos e do cérebro) contidos na realização de adições e subtrações no ábaco, como forma de preparar para a realização de operações por escrito. Os alunos trabalharam com dois ábacos para que no início da adição ficassem registradas as duas parcelas a serem somadas. Trabalhando apenas com um ábaco e não estando escritas as parcelas a serem somadas e/ou subtraídas, eles teriam que guardá-las de memória durante toda a operação, o que poderia dificultar o cálculo.

Foi dada grande atenção à relação de oposição entre as duas operações; após a realização de cada adição era realizada a sua oposta, a subtração.

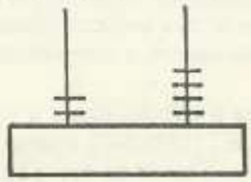
---

[1]Normalmente, a adição, a multiplicação e a potenciação são chamadas operações diretas enquanto que a subtração, a divisão e a radiciação são chamadas operações inversas. Neste artigo utilizarei o termo operações inversas para designar a relação entre a edição e a subtração, na medida em que uma é inversa à outra.

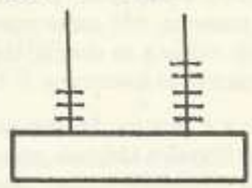
As propriedades das operações foram trabalhadas de forma empírica. Por exemplo, na adição 24 + 35, a propriedade comutativa (a ordem das parcelas não altera a soma), pode ser trabalhada adotando-se diferentes ordens para realizar a adição, constatando-se que o resultado não se altera.

Para dar uma idéia da dinâmica adotada, descrevo como realizei, com os educandos, as operações: 35 + 24 = 59.
59 - 24 = 35

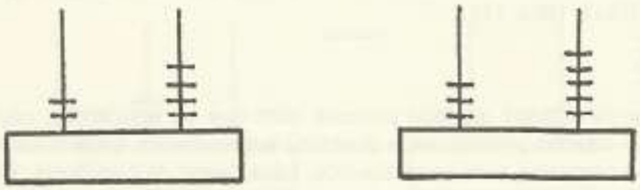
a) solicitei aos educandos que representassem num ábaco o número 24:



b) solicitei que representassem em outro o número 35:



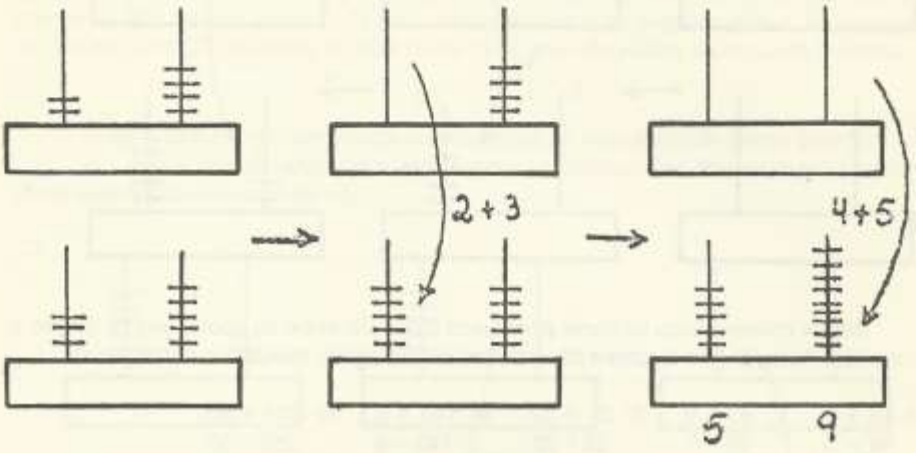
c) solicitei que colocassem os ábacos alinhados da seguinte maneira:

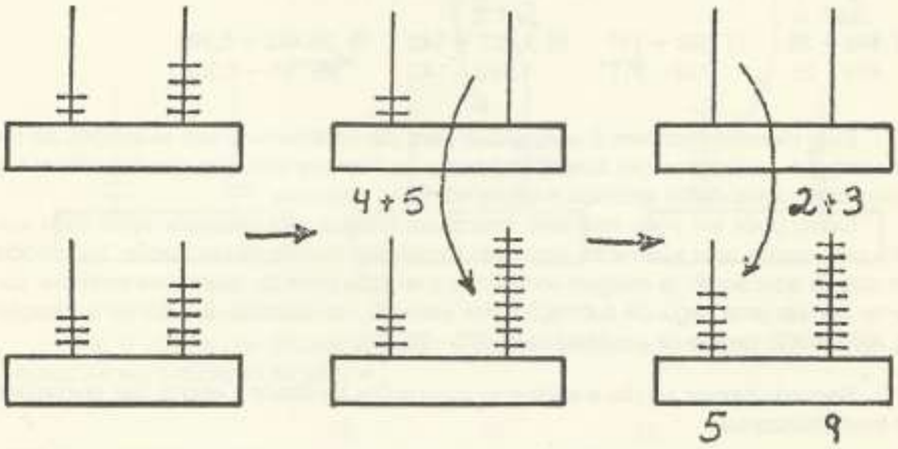


Orientei para que a coluna das unidades de um ábaco ficasse alinhada à coluna das unidades de outro (o mesmo com a das dezenas). Isto prepara para a futura montagem do algoritmo.

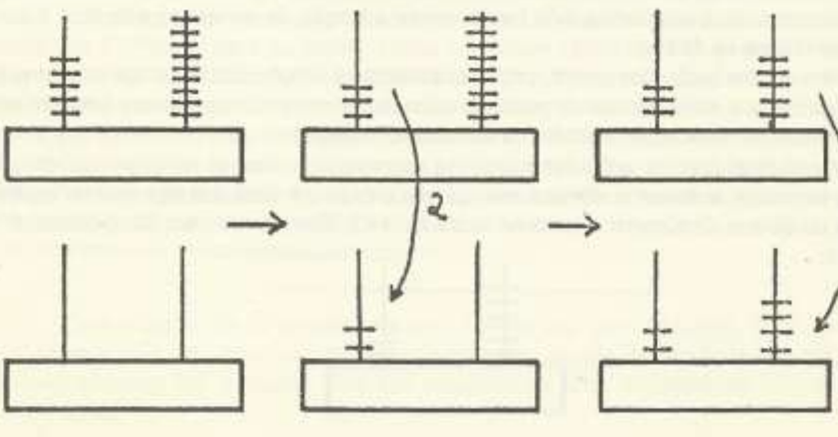
d) solicitei que eles "juntassem" aquelas quantidades em um ábaco só.

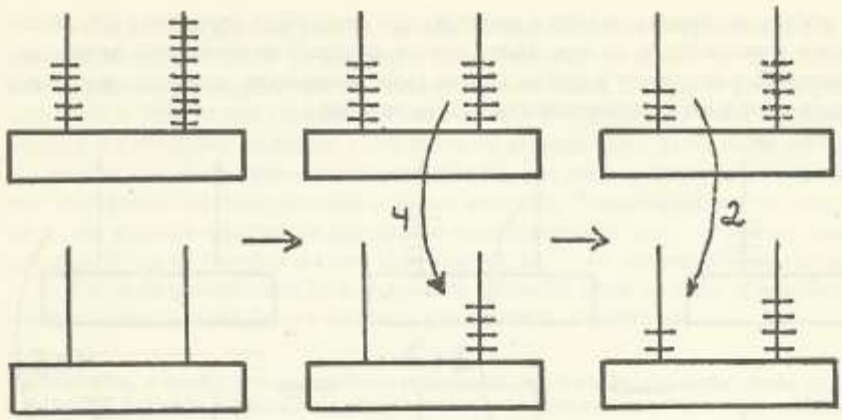
e) após todos terem realizado a operação, um deles disse como tinha feito. Aproveitei para ir representando no meu ábaco grande, colocado de frente para os educandos, as parcelas e realizando a adição. Depois repeti a operação, somando em outra ordem, para demonstrar a propriedade comutativa da adição.





f) num dos ábacos estava, portanto, representado o número 59. Para a realização da operação oposta, solicitei que os educandos tirassem 24 desse 59, colocando o 24 no ábaco que havia ficado vazio e verificando quanto restara no outro ábaco.





Dessa maneira ficou bastante acentuada a relação entre as operações de adição e subtração. A seguir listo algumas das adições e subtrações realizadas neste passo:

1) 43 + 5	2) 90 + 6	3) 21 + 32	4) 143 + 6	5) 201 + 50
48 − 5	96 − 6	53 − 32	149 − 6	251 − 50

6) 462 + 26	7) 602 + 111	8) 1.021 + 142	9) 20.403 + 6.362
488 − 26	713 − 111	1.163 − 142	26.765 − 6.362

Este momento também é aproveitado para dar continuidade aos exercícios de representação de números (no ábaco) realizados na Primeira Unidade. Por isto utilizei números com várias casas decimais e vários números com zero.

Como pode ser visto nos nove exercícios listados, era realizada, após cada adição, pelo menos uma subtração, enquanto movimento oposto dessa adição. Na medida em que os educandos já estejam dominando a relação entre as operações inversas, pode-se realizar uma segunda subtração. Por exemplo, no exercício 9, além da subtração 26.765 - 6.362, realiza-se a subtração 26.765 - 20.403.

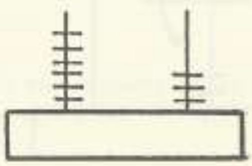
Segundo passo: adição e subtração (operações no ábaco e escrita das operações na forma horizontal).

Neste passo foram combinados os sinais de +, −, e = (depois descreverei como isso foi feito) e as adições e subtrações passaram a ser escritas na lousa (pelo professor) e no caderno (pelos educandos).

A escrita teve, neste momento, a função de apenas registrar as operações a serem realizadas ou já realizadas, não tendo, ainda, a função de servir aos cálculos. Estes foram realizados no ábaco.

Para a introdução dos sinais, procurei salientar a função dos mesmos na comunicação escrita e a necessidade de padronização dos símbolos matemáticos também em função dessa comunicação. A dinâmica adotada foi a seguinte:

a) combinei com os educandos que iria escrever um número na lousa, sendo que nem eu nem eles leríamos o número em voz alta e cada um teria que representar aquele número no ábaco. O número escrito na lousa foi o 63. Sua representação no ábaco, é a seguinte:



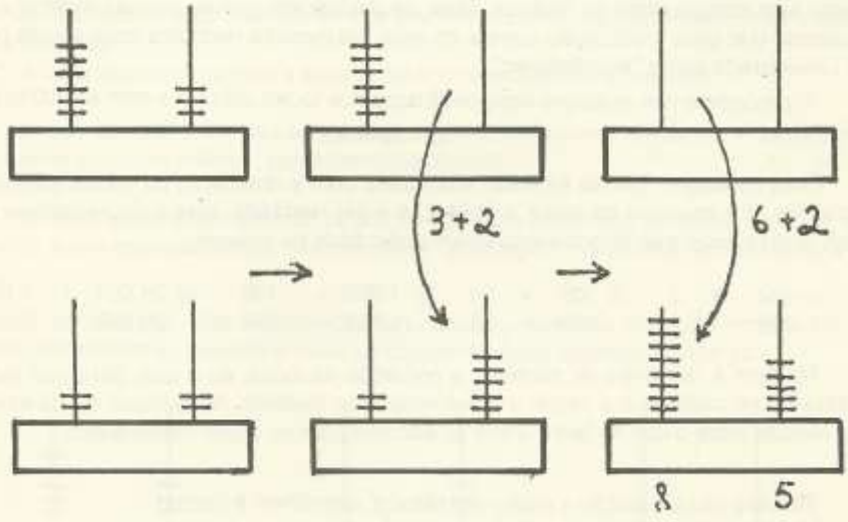
b) após todos terem feito a representação no seu ábaco, pedi que eles dissessem que número era aquele e representei o número no ábaco grande, aproveitando a oportunidade para fazer com que os que erraram explicitassem e analisassem seu raciocínio.

c) escrevi outro número, à direita do 63, conservando um intervalo (para posterior colocação do sinal +). Foi combinado que também esse número não seria, num primeiro momento, lido em voz alta e cada um o representaria num segundo ábaco. Esse segundo número foi o 22. Na lousa, os dois números ficaram dispostos da seguinte maneira:

63 22

d) após todos terem terminado, representei o 22 num segundo ábaco grande.

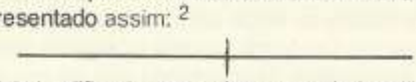
e) solicitei que os educandos alinhassem as colunas dos ábacos e juntassem as duas quantidades num ábaco só.



f) fiz a adição nos ábacos grandes e escrevi o resultado na lousa, deixando um espaço para a colocação do sinal =

63 22 85

g) expliquei, então, que assim como escrever os números 63 e 22, na lousa, havia possibilitado que eles fossem representados, no ábaco, sem necessidade de comunicação oral, havia também a necessidade de se utilizar alguma forma de comunicar, por escrito, "o que era para fazer com aqueles números". Perguntei se algum deles conhecia o sinal que é utilizado para se somar e eles sugeriram vários tipos de sinais. Expliquei então que, em princípio, não seria errado adotar algum daqueles sinais, na medida em que isto é uma questão de convenção, ou seja, de se combinar um sinal comum a todos. O sinal em si mesmo não é certo nem errado. O que faz com que seja errado adotarmos qualquer sinal para as operações de adição e subtração é a necessidade de comunicação. Por esta necessidade é que utilizamos, para a adição, o sinal +, já convencionado. Expliquei ainda que, em outras épocas, outros sinais foram adotados e quando esse sinal apareceu ele era representado assim: [2]



Com o tempo ele foi simplificado para a forma que hoje utilizamos. Com isso procurei mostrar que os símbolos matemáticos não têm aquela dimensão quase mágica que muitas pessoas lhe atribuem, mas são resultado de uma necessidade concreta de comunicação.

A seguir escrevi o sinal entre o 63 e o 22:

$$63 + 22 \quad 85$$

Só faltava combinar um sinal para mostrar que 85 era o resultado daquela adição. Introduzi o sinal = :

$$63 + 22 = 85$$

h) solicitei que eles escrevessem essa expressão matemática no caderno. Orientei para que o sinal + fosse o mais corretamente possível, para não gerar, depois, confusão com o sinal x (multiplicação). Este detalhe pode parecer insignificante, mas sendo o sinal um instrumento de comunicação, escrevê-lo incorretamente prejudica a eficácia desse instrumento. Alguns educadores poderão considerar "autoritária" tal atitude. Ela seria autoritária se fosse uma imposição sem justificativa, se o educando tivesse que aceitar sem compreender os motivos. Mas, na medida em que se procura mostrar a necessidade que gera a utilização correta do sinal, de maneira nenhuma essa atitude pode ser considerada como "autoritarismo".

f) procedimentos análogos àqueles já expostos foram utilizados com a subtração

$$85 - 22 = 63.$$

Essa linguagem escrita foi então exercitada com a realização de várias adições e subtrações. Eu escrevia na lousa a operação a ser realizada, eles a escreviam no caderno, realizavam-na no ábaco e escreviam o resultado no caderno.

1) 604 + 2	2) 525 + 34	3) 1.023 + 136	4) 24.001 + 5.697
606 – 2	559 – 34	1.159 – 136	29.698 – 5.697

No item 4, ao invés de escrever a operação na lousa, eu a ditei, para que eles a anotassem no caderno e a seguir a resolvessem no caderno. A finalidade é a de exercitar a relação entre o que se fala e o que se escreve com os sinais matemáticos.

Terceiro passo: adição e subtração (ábaco, algoritmos e dedos)

Neste passo a escrita passou a ser utilizada para o cálculo. Já tendo sido treinados no ábaco os movimentos de raciocínio necessários aos algoritmos de adição e subtração e já tendo sido introduzida parte da simbologia, tornou bastante simples a introdução dos algoritmos.

[2]Sobre a evolução dos sinais vide DANTZIG, 1970:78-79, e MALBA TAHAN, 1983:29-36.

Além da utilização do ábaco para auxiliar a compreensão do cálculo pelo algoritmo, também utilizei com os educandos o procedimento de contar nos dedos. Esse procedimento tem a função de auxiliar o educando quando ele ainda não memorizou os fatos básicos da adição. Fatos básicos são as adições de duas parcelas em que ambas têm apenas uma casa decimal, isto é, as parcelas vão de zero a nove. Sua memorização é importante para a agilidade nos cálculos. O terceiro passo, a memorização dos fatos básicos, ainda não foi exercitada intensivamente porque entendo que ela se fez com muito mais eficiência quando os educandos já estão realizando adições através dos algoritmos, ainda que utilizando meios auxiliares como a contagem nos dedos. A memorização dos fatos básicos mostra-se então para o educando como uma necessidade para o aperfeiçoamento do cálculo. De forma alguma considero desnecessária a memorização no aprendizado da Matemática. Mas entendo que ela deva ser percebida pelo educando enquanto uma necessidade decorrente de um processo.

A escola tradicional não errou por utilizar a memorização, mas por torná-la um procedimento desvinculado das necessidades que o geraram. A escola nova, tentando superar essa falha, acabou por cair em outro unilateralismo: a abominação da memorização e do treino, que passaram a ser considerados desnecessários e repressivos.

A compreensão e o treino (que visa à memorização, à automatização) não podem ser vistos separadamente no processo de aprendizagem. Quando o educando está resolvendo uma adição utilizando-se dos dedos e do ábaco, isso está ao mesmo tempo desenvolvendo sua compreensão do algoritmo e treinando-o na memorização dos fatos básicos. Evidentemente que em alguns momentos dá-se maior destaque à compreensão e em outros ao treino. Mas quando se procura compreender algo, isso está contribuindo para o seu treino e quando se treina algo, isso está contribuindo para uma compreensão maior e mais segura. O treino será tão mais eficiente quanto mais se compreender o que se está treinando. E compreender-se-á com muito mais profundidade e facilidade aquilo que foi bem treinado.

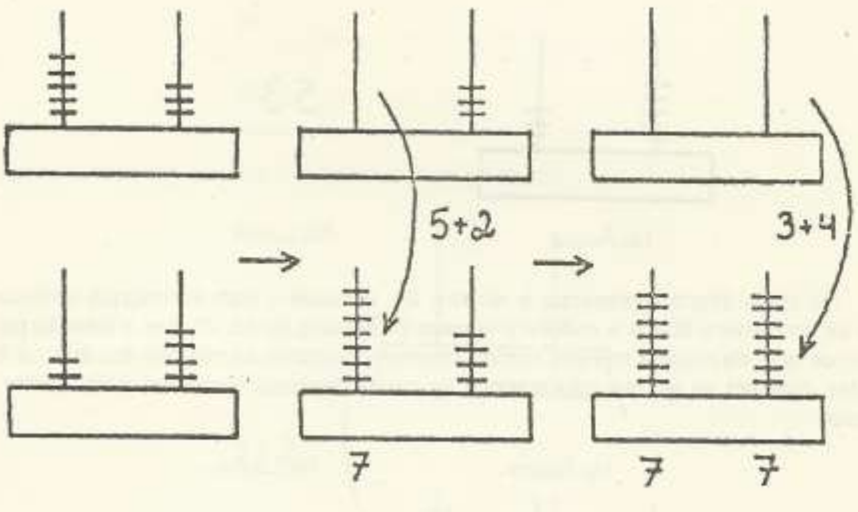
Embora o procedimento de contar nos dedos não fosse estritamente necessário neste passo, pois o ábaco já é suficiente para o auxílio nos cálculos, utilizei os dedos com os educandos como uma maneira de prepará-los para o quarto passo, onde o ábaco não é utilizado.

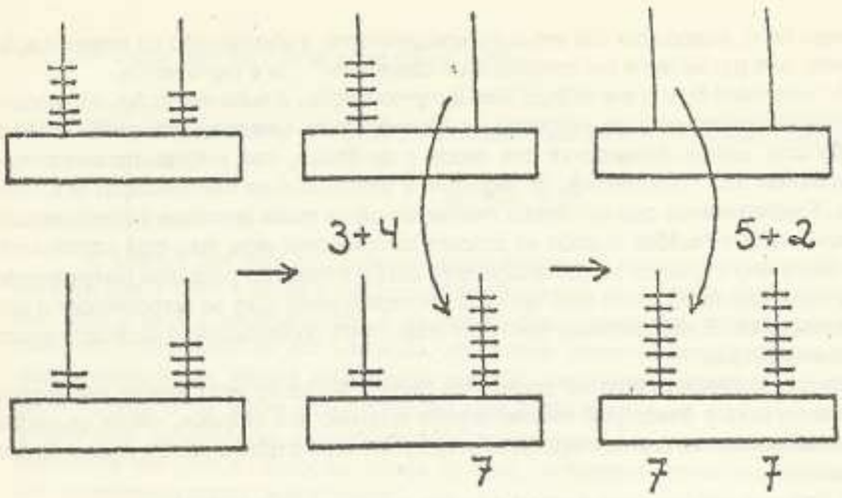
A dinâmica adotada para a introdução dos algoritmos foi a seguinte:

a) solicitei oralmente aos educandos que escrevessem a adição 53 + 24 na forma introduzida no passo anterior, isto é, horizontalmente;

b) após todos terem anotado tal adição nos seus cadernos, escrevi-a na lousa, solicitando a um dos educandos que me fosse "orientando" na escrita nos números e do sinal;

c) solicitei que eles representassem cada um daqueles números em um ábaco, depois alinhassem as colunas e então juntassem as duas quantias em um só;





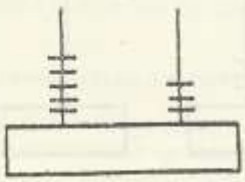
d) fiz a operação com os ábacos grandes;

e) solicitei que colocassem o sinal de igualdade e o resultado;

f) após todos terem feito, fiz o mesmo na lousa:

$$53 + 24 = 77$$

g) então expliquei que iríamos "armar" a mesma conta na forma vertical. Esvaziei os dois ábacos grandes e num deles representei o número 53. Escrevi depois esse número na lousa.

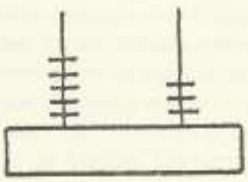


53

No Ábaco Na Lousa

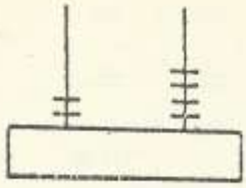
No outro ábaco representei o número **24**, coloquei-o com as colunas alinhadas com as do primeiro ábaco e escrevi o número 24 debaixo do 53. Chamei a atenção para o fato de que, da mesma maneira como vínhamos colocando as colunas dos ábacos alinhadas, também na escrita colocaríamos as casas decimais alinhadas, para facilitar o cálculo:

No Ábaco Na Lousa



53

24



Como o sinal já era conhecido, coloquei-o ao lado dos números.

53
+
24

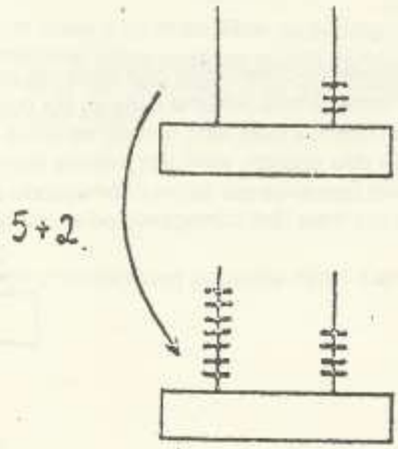
Mostrei, na conta escrita horizontalmente, o sinal = e perguntei se alguns deles teriam alguma idéia de como se costuma fazer na forma vertical. Deram várias sugestões, algumas bastante válidas como:

53
+
24
=

Expliquei que tal modo de escrever não seria errado, mas como não é utilizado em nossa sociedade, ele não cumpre a função de comunicação. Coloquei então o traço utilizado costumeiramente:

$$\begin{array}{r} 53 \\ + \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

Juntei as contas das colunas das dezenas num só ábaco.

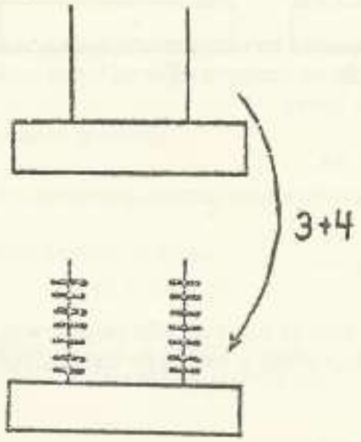


Apontando, no algoritmo já armado, a adição 5 + 2, fiz a adição, agora nos dedos e escrevi o 7 na coluna das dezenas.

$$
\begin{array}{r} 53 \\ +\ \ \\ 24 \\ \hline 7 \end{array}
$$

Expliquei que, no ábaco, quando se soma as duas parcelas, elas somem e fica apenas o resultado, sendo que quando se resolve a conta por escrito as parcelas continuam registradas e se escreve abaixo o resultado. Expliquei ainda que o 7 foi escrito na direção do 5 e do 2 para ficar mais fácil de perceber que ele está na mesma casa.

Somei, então, no ábaco, as unidades:



Fiz o mesmo com os dedos e no algoritmo:

$$
\begin{array}{r} 53 \\ +\ \ \\ 24 \\ \hline 77 \end{array}
$$

Depois fiz a mesma operação começando pela casa das unidades. Expliquei que o resultado não se altera se começarmos por uma casa ou por outra, mas que mais para a frente iriam surgir casos em que fica mais fácil, quando se opera por escrito, iniciar pelas unidades. Essa situação se deu quando, num dos passos posteriores, surgiu a adição com vai-um, onde é possível operar-se por escrito começando pela casa das dezenas, ou das centenas, etc., mas fica mais fácil começando pelas unidades. No ábaco isso não acontece.

Procedimentos análogos foram adotados para montar o algoritmo da subtração:

$$
\begin{array}{r} 77 \\ -\ \ \\ 24 \\ \hline \end{array}
$$

A seguir, mostro uma série de adições e subtrações que foram realizadas com os educandos:

1) 214	257	2) 1.042	1.396	3) 2.503	2.935	4) 6.045	9.649
+	−	+	−	+	−	+	−
43	43	354	354	432	432	3.604	3.604

5) 26.032	36.747
+	−
10.715	10.715

O uso no nosso país è colocar o sinal + ou − à esquerda dos n^{o}s, como:

$$\begin{array}{r} 214 \\ +\ 43 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 257 \\ -\ 93 \\ \hline \end{array}$$

A dinâmica adotada para cada conta foi a seguinte:
a) eu escrevia a conta na lousa, na forma vertical;
b) os educandos as resolviam no ábaco;
c) eles armavam o algoritmo;
d) resolviam a conta, por escrito, usando os dedos, se necessário;
e) eu a resolvia nos ábacos grandes e na lousa (usando os dedos).

Quarto passo: adição com vai-um e subtração com empresta-um

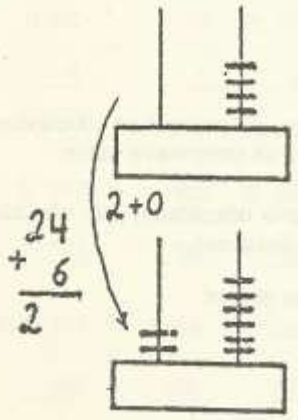
Neste passo, mais do que nunca, ficaram salientadas a importância do ábaco para se compreender o cálculo escrito e a importância de se trabalhar a relação entre as operações inversas.

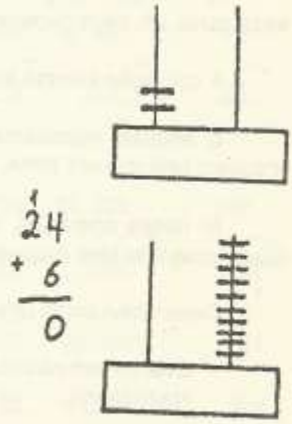
Iniciei assim:

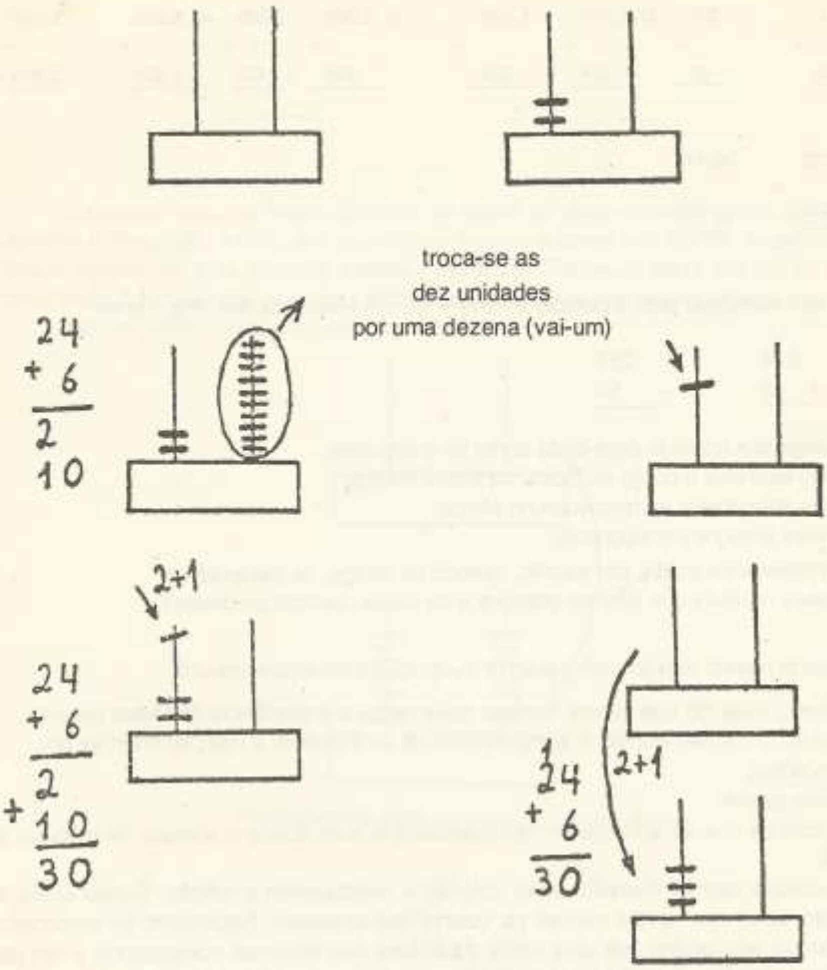
a) solicitei que os educandos representassem num ábaco o número 24 e noutro o número 6;

b) solicitei que alinhassem suas colunas e realizassem a adição. Surgiu então a questão de se chegar a dez contas na coluna das unidades. Facilmente foi recordado pelos próprios educandos que uma conta da coluna das dezenas corresponde a dez da coluna das unidades, e então foram retiradas as dez contas e colocada uma na coluna das dezenas.

Armei o algoritmo na lousa e fui resolvendo ao mesmo tempo que operava no ábaco. Fiz a conta tanto começando pelas dezenas quanto começando pelas unidades, para mostrar que as duas maneiras são possíveis, mas que começando pelas unidades fica mais fácil, quando se opera por escrito.







Como se pode observar, no ábaco é indiferente somar começando pelas dezenas ou pelas unidades, No caso do cálculo escrito, não é errado começar pelas dezenas, mas é prático começar pelas unidades, principalmente em contas onde as parcelas vão até as casas de unidade de milhar etc.

c) a seguir, apaguei o algoritmo na lousa e solicitei que os educandos fizessem essa conta em seus cadernos.

A operação inversa foi feita da seguinte forma:

a) estando representado o número trinta em um ábaco, solicitei que os educandos tirassem seis desses trinta, para colocar no outro ábaco, que se encontrava vazio;

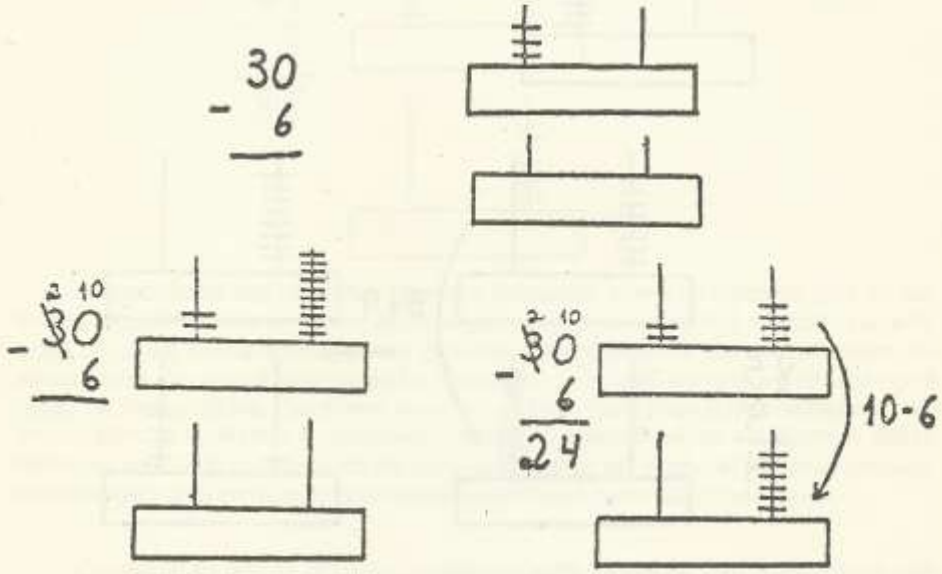
b) nessa operação, de início, eles encontraram alguma dificuldade, pois não sabiam como tirar seis daqueles trinta (representados por três dezenas).

Desenvolvi então uma conversa semelhante à descrita abaixo:

– Quanto tem na coluna das unidades?
Nada (zero).

– Quanto tem na coluna das dezenas?
Três.
– Cada bolinha dessas vale por quantas das unidades?
Por dez.
– De onde vamos tirar seis?
Das unidades não dá porque a coluna está vazia. Das dezenas também não dá porque cada uma vale dez e tirando uma já passa de seis.
– Naquela conta que fizemos antes, o que aconteceu quando juntamos 6 bolinhas com 4 bolinhas aqui nas unidades?
Somamos dez bolinhas. Tiramos as dez e colocamos uma nas dezenas.
- E se agora nós fizermos o caminho de volta, isto é, quisermos tirar aquelas seis que colocamos?
– Tiramos uma das dezenas, trocamos ela por dez que colocamos na coluna das unidades. Dessas dez tiramos as seis e ainda sobram quatro nessa coluna.

Depois que essa subtração foi feita no ábaco, armei o algoritmo na lousa e operei utilizando simultaneamente o ábaco, os dedos e o algoritmo.

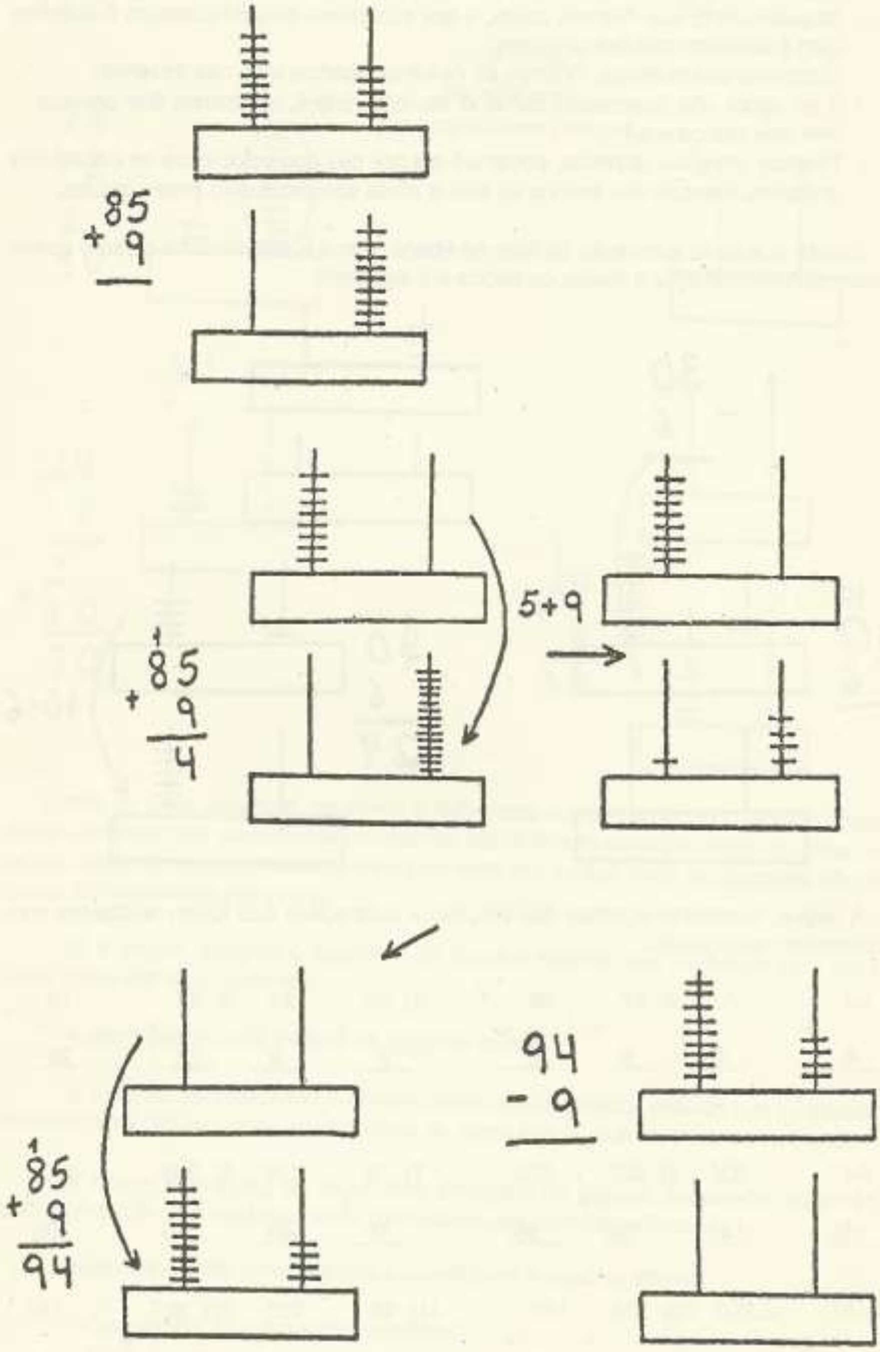


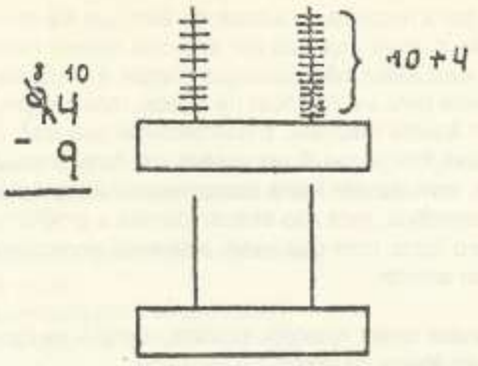
A seguir, apresento algumas das adições e subtrações que foram realizadas com os educandos neste passo:

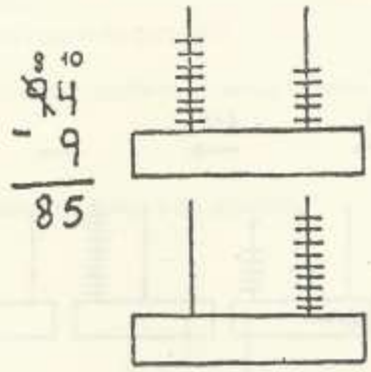
1) 62 + 8	70 − 8	2) 57 + 6	63 − 6	3) 85 + 9	94 − 9	4) 48 + 25	73 − 25
5) 647 + 185	832 − 185	6) 537 + 98	635 − 98	7) 73 + 49	122 − 49	8) 303 + 59	362 − 595
9) 1.187 + 409	2.256 − 409	10) 125 + 67	192 − 67	11) 58 + 67	125 − 67	12) 307 + 854	161 − 854

13) $\begin{array}{r} 235 \\ + \\ \underline{907} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1.142 \\ - \\ \underline{907} \end{array}$

Vejamos, por exemplo, o exercício nº 3 dessa lista: 85 + 9 e 94 – 9.







A importância dos pequenos números colocados acima do algoritmo está no fato de que ali, assim como no ábaco, estão exteriorizados os raciocínios implícitos na resolução da conta. Existe entre algumas pessoas o preconceito de que colocar esses números acima da conta é sinal de pouca inteligência, pois demonstra que a pessoa não é capaz de memorizá-los. Considero esse preconceito muito prejudicial, pois aqueles números, além de facilitarem a compreensão dos raciocínios implícitos no algoritmo, possibilitam ao educando conferir onde ele poderia ter errado na resolução da conta, possibilitando também uma certa segurança indispensável para quem está aprendendo.

Quinto passo: adição com três ou mais parcelas, subtração com empresta-um indireto.

Neste passo o objetivo principal foi a realização de certos tipos de adições e subtrações considerados difíceis. Os educandos não utilizaram o ábaco neste passo, na medida em que o objetivo principal era o de treinar ao máximo os procedimentos do cálculo escrito. No entanto, para não se perder de vista a compreensão desses procedimentos (após os educandos terem resolvido cada conta) eu a resolvia utilizando simultaneamente o ábaco, os dedos e o algoritmo na lousa. A introdução de adições de três ou mais parcelas se deu da seguinte forma:

a) escrevi, na lousa, na forma horizontal, a seguinte adição:

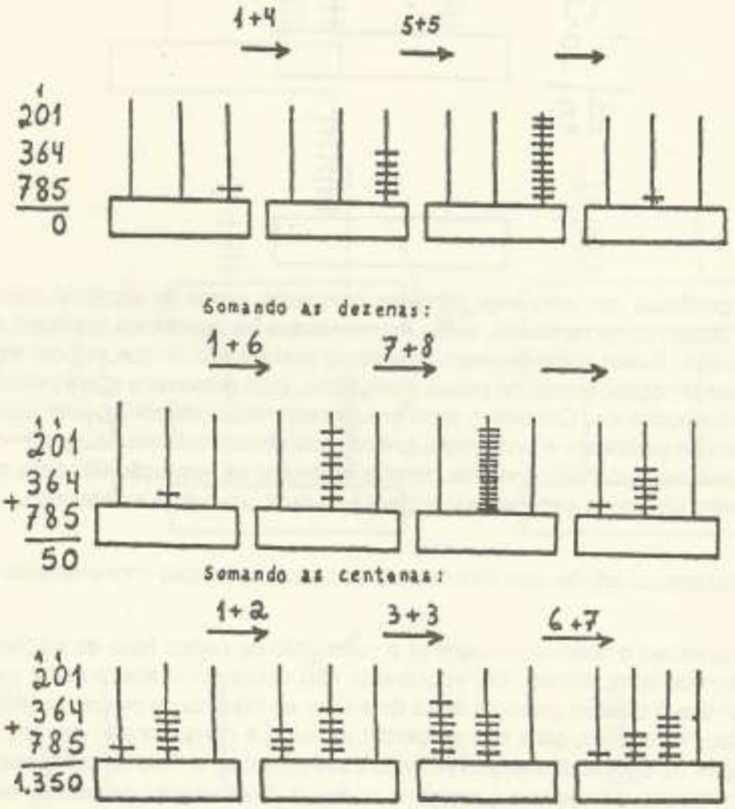
$$201 + 364 + 785$$

b) solicitei, então, que eles armassem a conta na forma vertical ("em pé") e a resolvessem. Devo esclarecer que quando solicito aos educandos que armem uma conta e a resolvam, fico percorrendo a sala para verificar como cada um está fazendo. Quando vejo que algum está fazendo algo errado, procuro formular perguntas que façam com que ele analise os passos do próprio raciocínio e verifique onde e porque errou.

Evito ao máximo dar a resposta ao educando sem que ele tenha compreendido o que aconteceu. Às vezes quando vejo que por diversos fatores (nervosismo, esquecimento, etc.) algum dos educandos não consegue chegar à resposta certa a uma pergunta, então dou a resposta para ele não ficar na dúvida, mas procuro detalhar todos os passos que me levaram àquela resposta. Evidentemente que isso é preciso ser feito dentro do tempo disponível. Por vezes é necessário dar a resposta a algum educando que ficou mais para trás, sem que ele tenha compreendido totalmente o raciocínio realizado naquela questão específica, para não atrasar demais a programação. Depois, nos outros exercícios, procuro fazer com que esse educando compreenda o que ele não compreendeu no exercício anterior.

c) Após os educandos terem resolvido a conta, armei-a na lousa e a resolvi utilizando simultaneamente um ábaco, os dedos e o algoritmo.

Somando as unidades:



A seguir, listo algumas adições, desse tipo, realizadas com os educandos:

1) 1.063 + 22 978
2) 15.047 + 67.898 + 8.175
3) 6.937 + 4.098 + 976

Quanto às subtrações deste passo, iniciei-as da seguinte maneira:

a) armei, na lousa, a seguinte subtração: