> "uma caricatura da "via formalista" causou grandes estragos no ensino da Matemática ao nível das escolas secundárias."

Quando se pensa que este testemunho é de ex-aluna da Escola Normal de Sèvres, assistente de Lebesque e uma das pioneiras da introdução da Matemática Moderna no ensino de 1º e 2º graus, deve-se imaginar o que acontecia com o comum dos mortais, professores de Matemática.

Estas observações mostram que uma *condição necessária* para a formação do professor é o domínio do *saber* a ser transmitido. Entretanto, *longe de ser suficiente*.

Por este motivo, um papel importante, desta época de turbulência, foi desempenhado pelos *inovadores*. Papy e Dienes tentaram colocar em prática novos métodos de ensino a fim de permitir a abordagem dos conceitos da Matemática Moderna. Emma Castelnuovo fez experiências inovadoras de métodos de ensino sem a preocupação em seguir a via estruturalista. Entretanto, faltava aos inovadores o controle de suas experiências sem negar o sucesso alcançado devido ao *carisma*, faltava-lhes *entusiasmo* e *faro* suficiente para fazer as correções do rumo na aplicação de seus métodos.

Sem controle mais rígido nunca se poderá saber, ao certo, o que negar ou confirmar para que o método seja reproduzido por outros. É impossível, contudo, negligenciar o forte impacto trazido pela Matemática Moderna.

O seu "fracasso" alertou matemáticos, educadores, cientistas em geral e até políticos para os verdadeiros problemas da Educação Matemática.

O quadro a seguir ilustra o aparecimento deste campo científico emergente, considerado como referencial os Congressos Internacionais da Educação Matemática (ICME).

ICME	Fatos relevantes
I – Lyon, França 1969	· Separação formal do ICMI do ICM.
II – Exeter, Inglaterra 1972	· Crítica de R. Thom sobre a reforma da Matemática Moderna. · Questões psicológicas, sociológicas e lingüísticas para a Educação Matemática. · Criação do Comitê Internacional para estudo e pesquisa sobre aprendizagem matemática.
III – Karlsruhe, Alemanha 1976	· Unificação do conteúdo curricular da Matemática, abandono da organização em área. · Relatório do Comitê sobre aprendizagem. · Fundação do Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME).
IV – Berkeley, EUA 1980	· Movimento "back to basic". · Resolução de problemas: papel fundamental no ensino-aprendizagem matemática. · Papel do computador na educação.
V – Adelaide, Austrália 1984	· Questões sobre: – fundamentação técnica da Educação Matemática; – transdisciplinaridade da Educação Matemática; – existência de métodos específicos para o ensino de Matemática ou processos específicos para sua aprendizagem, ou ainda, filosofia de educação específica para a Matemática.
VI – Budapeste, Hungria 1988	· Matemática, Sociedade e Tecnologia. · Perspectiva para o século XXI.

Vale lembrar, como fez Glaeser, que a ciência da medicina no século XIX recusou as especulações literárias para só reconhecer o veredicto do laboratório. Assim também à Didática Experimental se impõem os veredictos de seu laboratório: a sala de aula.

> "No começo não poderemos exigir que a didática produza a grande síntese. Ela atacará problemas bem delimitados, mas cada descoberta séria alargará rapidamente seu campo de validade e iluminará fenômenos mais amplos."
>
> "Não podemos, também, esperar efeitos imediatos destas primeiras descobertas sobre a prática da sala de aula . . .
> . . . Não podemos esperar delas receitas milagrosas"

Glaeser, La Didactique
Experimentale des Mathématiques

A ILUMINAÇÃO que será trazida pelas pesquisas em Educação Matemática, certamente, servirá para dissipar a NEBLINA das salas de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE M & DOUADY R. La Didactique des Mathématiques en France. *Revue Française de Pedagogie* nº 76, 1986.

FELIX, Lucienne. *Aperçu historique sur la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathématiques.* (notas mimeografadas) Paris, 1984.

GLAESER, Georges. *La Didactique Expérimentale des Mathématiques.* Boletim nº 332 da A.P.M.E.P., 1982.

MATOS, José Manoel. Cronologia Recente do Ensino da Matemática. *Cadernos Inflexão,* nº 3, Lisboa, 1986.

ROMBERG T. A. & CARPENTER T.P. *Research on Theaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry.* Handbook of Research on Teaching, 3ª edição, New York, 1986.

IDÉIAS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA

Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho
Ph.D. em Matemática - PUC/RJ - USU

O que eu vou falar não é uma conferência acadêmica, erudita. É sim uma palestra informal em que vou procurar mostrar o reflexo, a aplicação de algumas idéias na sala de aula, na atividade do dia-a-dia das pessoas. Fala-se muito hoje em Matemática apresentada fora do contexto, e a necessidade de contextualizar, de recontextualizar a Matemática. Como disse a professora Maria Laura na palestra anterior à minha, se referindo aos trabalhos, às pesquisas do grupo de Paris VII, há a preocupação constante desta passagem. A Matemática é gerada dentro de um contexto, ela é codificada, escrita, fica descontextualizada e uma das missões do professor é recontextualizar aquilo que ele vai passar aos alunos, para que aquilo faça sentido para eles. Além desta recontextualização para os alunos, a fim de que aquele conteúdo faça sentido para eles, eu acho que é necessário também uma recontextualização para o professor a fim de que ele veja como certos conceitos se enquadram, se colocam dentro do desenvolvimento da Matemática, a fim de que ele tenha uma idéia orgânica, de que ele tenha uma idéia do crescimento de sua ciência — ciência aqui no sentido ingênuo, coloquial. Nós sabemos que as coisas importantes da Matemática, as descobertas ou as invenções, dependendo do ponto de vista filosófico que a pessoa tenha, tiveram uma razão de ser, não surgiram ao acaso, tanto assim que há freqüentemente casos de a mesma idéia ser inventada ou descoberta simultâneamente por pesquisadores independentes. É necessário então que o professor saiba como surgiram certas idéias, para que elas serviram e para que elas servem.

Para falar sobre as idéias fundamentais da Matemática devemos dizer antes algumas palavras sobre o método fundamental da Matemática, que é o chamado método dedutivo. É ele que distingüe a Matemática das chamadas ciências experimentais, das ciências factuais. A Matemática não procede indutivamente, ela procede dedutivamente a partir de certas premissas aceitas que definem as regras do jogo. Usando as operações permissíveis da lógica aristotélica são deduzidos os que são chamados teoremas. A Matemática não foi feita sempre desta maneira. Isto nasceu, pelo que nós sabemos, com os gregos. Certamente os gregos não foram os criadores, os inventores da Matemática. Havia Matemática antes dos gregos. Havia, inclusive 1800 anos antes de Cristo, os babilônios que tinham alguns conhecimentos razoavelmente sofisticados de Matemática. Por exemplo conheciam termos pitagóricos (sem este nome, é claro). O que devemos aos gregos é a insistência de que a maneira de apresentar Matemática deve ser a maneira dedutiva. Aceita-se certos fatos como dados e a partir deles deduz-se outros fatos. É o que se chamaria a axiomática material. Este modelo grego é uma discussão muito profunda, erudita e não sabemos por que os gregos adotaram este modelo. Provavelmente o que os levou a isto foi a estrutura social grega, com o trabalho escravo e a atividade mental descompromissada dos problemas materiais de subsistência que permitiu aos homens livres este aprofundamento do pensamento filosófico. Este modelo grego se impôs na Matemática e nós o herdamos. Nem sempre ele foi seguido à risca. Houve épocas em que foi mais ou menos esquecido. Porém a partir do séc. XVII ele tem se imposto cada vez mais, até que hoje, no século XX, ele é o modelo oficial de apresentar Matemática. Certamente, porém, não é o modelo de "fazer" Matemática. Matemática não é feita, nunca foi feita, de uma maneira lógico-dedutiva. É um processo extremamente complexo. Há uma componente, digamos assim, artística, criativa na arte de se fazer Matemática, mas a maneira como estas descobertas são escritas, são codificadas é estritamente lógico-dedutiva. Isto aí está por trás de qualquer referência a conceitos fundamentais da Matemática. Eu diria mesmo que é "o método fundamental da Matemática". Matemática, como dizemos às vezes no 2º grau, é uma ciência lógico-dedutiva. Coitados dos adolescentes! Eles não têm idéia do que seja algo dedutivo e o professor, no primeiro dia de aula, diz "o método matemático é o método lógico-dedutivo"!

Mas, voltando às nossas considerações, a Matemática, dentro deste processo lógico-dedutivo, não tem crescido ao acaso. Se examinarmos a Matemática de uma certa distância, com uma certa visão ampla, vê-se que há certas linhas de encaminhamento. Não é um crescimento desordenado. Uma visão local dá esta impressão. São muitos pesquisadores, cada um tentando avançar em uma certa linha, mas periódicamente estas pesquisas individuais são organizadas, são reinterpretadas por matemáticos de uma visão mais genial e o tudo dá origem a grandes teorias matemáticas. Um exemplo clássico disto (todos nós já ouvimos falar disto em um certo momento de um curso da História da Matemática) é a descoberta do Cálculo por

Newton e Leibnitz no século XVII. Certamente, antes de Newton e Leibnitz, existiram vários matemáticos que, além de terem preparado o caminho para esta descoberta, com isenção da Geometria Analítica, sabiam calcular tangente, sabiam calcular áreas, sabiam derivar, sabiam integrar. Faltava a visão penetrante e genial de Newton e Leibnitz para unificar tudo o que havia em uma teoria realmente poderosa e mostrar que havia uma relação muito estreita entre derivação e integração. Ocorre freqüentemente na história da Matemática que pequenos resultados, aparentemente esparsos, são periódicamente consolidados e se tem uma teoria forte, que adquire uma unidade, uma beleza, uma apresentação coerente.

Então, como dissemos, a Matemática não se encaminha ao acaso. Alguns conceitos surgiram ao longo do tempo, assim como alguns problemas também surgiram ao longo do tempo, e eles marcaram profundamente a Matemática e podemos dizer que eles são verdadeiramente fundamentais.

O primeiro destes problemas, destas investigações, e que marcou muito a Matemática, foi a percepção do que é uma Geometria, do que é uma estrutura geométrica. Isto merece um pouco de reflexão, pois, para os gregos, que codificaram a Geometria de maneira admirável nos Elementos de Euclides, obra esta que atravessou 2000 anos de uso, havia um só espaço, uma só Geometria. Porém, já na concepção grega da Geometria Euclideana, que era "A Geometria", havia a semente do que ia provocar uma revolução na Geometria no século passado, que era o chamado 5º postulado de Euclides sobre as paralelas. Depois de muitas investigações, já entre os gregos na época helenística, mais tarde entre os árabes e depois na Europa dos séculos XVIII e XIX, três matemáticos, independentemente um do outro, Gauss, Bolyay e Lobatchewsky viram que o 5º postulado de Euclides não era necessário para se ter um espaço geométrico. Esta foi uma descoberta importante para a Matemática.

Em primeiro lugar, uma observação não matemática mas de um caráter geral, na opinião do criador da filosofia moderna, Kant, havia um espaço e uma geometria. Reproduzindo o pensamento de Kant de uma maneira leiga, grosseira, ele dizia que havia duas percepções inatas ao ser humano. Uma era a percepção do tempo, o tic-tac do relógio que dá uma percepção inata dos inteiros, tic-tac-tic-tac . . . . 1 – 2 – 3 – 4 . . . . Todo ser humano nasce com esta percepção do tempo. Outra percepção inata era a do espaço, aquela imensa caixa euclideana tridimensional e que existia vazia independente de qualquer coisa. Era o espaço euclideano. Logo depois as descobertas de Gauss, Bolyay e Lobatcheasky mostraram que as coisas não se passam bem assim. Pode haver outros espaços, outras geometrias e uma medida da aqüidade, da genialidade de Gauss é que ele se perguntou se o nosso universo, se o nosso espaço era euclideano ou não. Ele tentou verificar isto. Levou teodolitos aos picos de três montanhas bem distantes entre si e chegou à conclusão que, com a precisão dos instrumentos da época, era impossível decidir se o mundo em que vivemos era euclideano ou não, mas que era uma pergunta válida investigar este problema. Nós sabemos que só no século XX com a percepção de Einstein é que se chegou à conclusão de que realmente o universo em que vivemos não é euclideano. Localmente, para o uso do dia-a-dia, para todos os efeitos práticos, ele é euclideano. Porém com uma visão mais global, mais abrangente, incluindo pelo menos o sistema solar, sabemos que certamente ele não é mais euclideano.

Esta descoberta das geometrias não euclideanas foi algo extremamente importante em Matemática, porque realçou o poder que o matemático tem de construir teorias baseadas em axiomas. A Matemática não é mais um espelho da realidade. Até o século XVII, na época de Newton e Leibnitz, pode-se dizer que a Matemática era uma codificação, um modelo da realidade. O ponto, a reta, o plano, um triângulo, um círculo, uma esfera, um paralelepípedo são idealizações muito depuradas, muito abstratas, de coisas que são vistas na realidade. Podemos dizer que estamos raciocinando sobre a realidade. A partir do século XVII o matemático começou a se afastar deste trabalho direto com a realidade e a trabalhar como se ele estivesse em um edifício de vários andares em que um andar trabalhasse sobre o andar superior. Estas descobertas das geometrias não euclideanas no século XIX mostraram o poder que a Matemática tem de trabalhar com sistemas axiomáticos que não espelham dados imediatos de realidade. Isto inclusive deu uma fé muito grande nos matemáticos sobre o método dedutivo-axiomático, ou seja, partir de certos axiomas e chegar, a partir deles, a teoremas deduzidos de maneira lógica. Esta foi uma descoberta riquíssima para os matemáticos. Logo depois da descoberta, da percepção do que é uma geometria, no início deste século, se teve a percepção das estruturas algébricas. Esta foi outra grande descoberta matemática que alterou também profundamente o ponto de vista de olhar para certas partes da Matemática. Até então, a Álgebra era encarada como a Matemática Simbólica; seus x, y, a ou b representavam números, inteiros, racionais, reais ou complexos, mas eram uma simples representação para números. Certamente todos sabemos de que Hamilton, na tentativa de criar, de formar um sistema que fizesse para os vetores do espaço o mesmo que o sistema dos números complexos faz para os vetores do plano, ou seja, que lhe permitisse de trabalhar algebricamente, dando rotações nos vetores do plano usando os números complexos, não conseguiu criar "números", chamados de hiper-complexos, que conseguissem representar, por exemplo, uma rotação do vetor no espaço. Esta tentativa é muito natural, pois os matemáticos adoram generalizar. Quando alguma coisa funciona no plano, procuramos algo equivalente que funcione no $\mathbb{R}^3$, depois no $\mathbb{R}^4$, no $\mathbb{R}^5$ etc. Então Hamilton ao procurar passar do $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^3$ não conseguiu progresso. Hamilton estudou este problema por mais de 20 anos. Metodicamente voltava ao problema e não encontrava solução satisfatória. Até que um dia, ele percebeu que tudo funcionaria muito bem se ele pudesse multiplicar estes seus números hiper-complexos, mas sem exigir que a multiplicação fosse comutativa. Ao perceber este verdadeiro "ovo de Colombo" as coisas todas se encaixaram. Diz a tradição que ele fez esta descoberta em um dia em que, solenemente, ia com a esposa para o ofício religioso. Ele ficou tão feliz com a percepção da solução do problema, que na entrada de uma das pontes que ele ia atravessar gravou com canivete a tábua de multiplicação dos quaternios. É uma lenda, como tantas outras lendas que há em Matemática. Isto libertou os matemáticos para fazerem Álgebra de uma maneira abstrata. O mesmo poder que já tinha sido percebido no tratamento de Geometria, ou seja, a capacidade de trabalhar com sistemas a partir de certos postulados aceitos, passou a ser verificado em Álgebra. Houve uma verdadeira explosão da Álgebra. Então os matemáticos passaram a tratar de vários sistemas algébricos, alguns mais ou menos especializados. O que certamente mais nos interessa aqui é a teoria dos grupos que tem um poder de unificação muito grande, quer em Álgebra, quer em Análise, quer em Geometria pois verificamos que muitos dos sistemas matemáticos de que se trata são grupos. Em particular em Geometria, um matemático alemão famoso, Felix Klein, percebeu que se podia definir as geometrias como sendo o conjunto de propriedades invariantes sobre certos grupos de transformações, sobre certos grupos de funções. Tomemos, por exemplo, a Geometria Euclideana. Quando se trabalha com ela considera-se os movimentos rígidos do plano, se estiver fazendo a geometria em $\mathbb{R}^2$, ou os movimentos rígidos do espaço, se se estiver em $\mathbb{R}^3$. No plano os movimentos rígidos são translações, rotações e reflexões. Em verdade as reflexões geram todos eles. A composição de duas reflexões pode ser uma reflexão, como uma rotação, ou uma translação, dependendo do eixo de reflexão. Podemos dizer então que a Geometria Euclideana é o estudo das propriedades que são invariantes sobre o grupo dos movimentos rígidos. Que a composta de dois movimentos rígidos é um movimento rígido. Todo movimento rígido tem um movimento rígido inverso. A composição de movimentos rígidos é associativa e há um movimento rígido trivial que deixa a figura parada e que é o elemento neutro. Então os movimentos rígidos de um plano formam um grupo. Pois então a Geometria Euclideana é o estudo de todas as propriedades invariantes sobre o grupo dos movimentos rígidos. Há vários tipos de Geometrias, como a Geometria Projetiva, por exemplo, mudando o tipo de grupo de transformações com que se está trabalhando. Este sistema algébrico que foi criado, a teoria dos grupos, surgiu com a pesquisa dos matemáticos tentando resolver as equações de graus 4, 5, etc. . . . e foi se tornando mais e mais abstrata até atingir a forma que conhecemos hoje, que é um sistema de axiomas a partir do qual deduzem-se todas as propriedades dos grupos.

Os matemáticos então foram se libertando do contacto direto com a realidade, investigando estes sistemas, estruturas geométricas, estruturas algébricas, e ao mesmo tempo começaram a aprofundar a Análise. Na palestra do professor Luiz Adauto, tratou-se da axiomatização dos números reais. É uma situação interessante. A explosão das geometrias surgiu, digamos assim, da descoberta das geometrias não euclideanas. A explosão da Álgebra surgiu da percepção de que Álgebra não é uma Aritmética Simbólica. Os sistemas algébricos, as estruturas algébricas são autônomas e são definidas convenientemente. A reflexão, os progressos, a mudança de atitude em relação à Análise surgiu, ao contrário, de uma crise interna na Análise. Sabemos que a descoberta do Cálculo da Análise Matemática no século XVII foi seguida de uma verdadeira explosão, de uma aplicação da Matemática a problemas os mais variados em Mecânica, em Física de maneira geral. A ambição dos matemáticos do século XVII e século XVIII era entender o sistema do mundo, como era chamado na época. Queriam explicar como funciona o sistema solar, por que os planetas estão em suas órbitas, etc. Isto foi feito por Newton e este trabalho foi culminado de uma maneira magistral por Laplace, que é chamado, pelos franceses, o Newton francês. Ele descreveu o funcionamento do sistema solar. Ao mesmo tempo estes métodos foram aplicados pelos Bernouille em uma variedade incrível de problemas no mundo físico, com as equações diferenciais. Logo depois, Euler, o analista nato, explorou até as últimas conseqüências o que se podia fazer com os novos métodos, brincando formalmente com séries e funções, mas todos estes grandes matemáticos, que eram salvos por sua intuição — e é por isto que eram grandes matemáticos — não tinham a idéia correta nem do que é número real, dos processos nem dos limites. Dieudonné, há pouco tempo, em um de seus livros, diz que foi muita sorte que Newton e Leibnitz não soubessem o que era um número real. Se eles o soubessem, veriam que a coisa era tão mais complicada que possivelmente não teriam chegado a inventar o Cálculo. Com sua ingenuidade e sua coragem puderam prosseguir e fazer coisas que só décadas, e às vezes séculos, depois foram devidamente explicadas.

À medida, então, que os matemáticos avançavam aos poucos nestas explicações e nestas aplicações ao mundo essencialmente físico, foram aparecendo problemas. Não havia suficiente consistência, havia coisas que os matemáticos não entendiam. D'Alembert dizia a um aluno: tende fé e a luz virá. Parece mais um teólogo do que um matemático!

Os matemáticos, então, no século passado, perceberam a necessidade de se pôr a Análise em um terreno firme. Para Newton e Leibnitz uma função contínua era diferenciável, era derivável. Nunca imaginaram que, no século passado, Weierstrass daria o exemplo de uma função contínua que não era derivável em nenhum ponto. Foi um exemplo arrazador que mostrou que a intuição geométrica, que guiava os analistas até o século passado, era muito enganosa.

Surgiu no século passado um programa muito sério, que envolveu muita gente boa e tomou muito tempo, que é chamado de aritmetização da Análise. Por causa dele os matemáticos foram vendo que tinham que recuar cada vez mais no que julgavam saber, até que chegaram à necessidade de entender bem o que é um número real, como foi exposto pelo professor Luiz Adauto. Em seguida recuaram até entender bem o que é um número racional e desta maneira chegaram a uma certa junção e, no fim do século passado e início deste século, os matemáticos chegaram enfim à percepção da importância da noção de conjunto para a Matemática.

Hoje, para nós, fora do contexto, no 1º e 2º graus, os conjuntos parecem como um "Deus ex machina", uma coisa que caiu do céu. Damos alguns exercícios, mas poucos de nós temos uma visão do que realmente significam os conjuntos na Matemática. A coisa é bem mais séria. Os conjuntos surgiram naturalmente de investigações da Análise Matemática. Até o século passado, mais precisamente até Cantor, os matemáticos distingüiam dois tipos de conjuntos: os conjuntos finitos e o conjunto infinito. Era impossível para um matemático dos séculos XVII, XVIII e até do século XIX até perguntar se o conjunto dos números naturais tem menos elementos que o conjunto dos números reais. Não havia diferenciação alguma entre eles, eram simplesmente conjuntos infinitos. Cantor era um bom analista que trabalhava em um assunto extremamente complexo de Análise, nas séries de Fourier. Estas séries de Fourier, ou análise de Fourier, estranhamente, são umas das coisas centrais em Análise e que foram responsáveis por muitas das revoluções na Análise. Por exemplo, o conceito de função que nós temos atualmente ficou definido depois de se trabalhar com séries de Fourier. O conceito de função, por um certo tempo era algo que podia ser expresso por uma expressão analítica. Depois admitia-se que era algo que, em um pedaço da curva, podia ser expresso por uma expressão analítica e mais adiante por outra expressão analítica. Mas quando se começou a trabalhar com séries de Fourier, esta conceituação ficou sendo insuficiente. Então as séries de Fourier foram responsáveis por uma reflexão sobre o que é uma função até se chegar à definição que hoje usamos, ou seja uma correspondência que associa a cada número de um certo conjunto que chamamos de domínio, um único número de outro conjunto, que chamamos de contra-domínio.

É interessante observar que as séries de Fourier deram origem ao conceito de conjunto. Um problema sério no trabalho com séries de Fourier é estudar sua convergência. Cantor, trabalhando sobre estes problemas técnicos de Análise, percebeu que o comportamento da série variava dependendo do tipo de sub-conjunto dos números reais em que ela se comportava mal. Ele começou a sentir que havia diferenças entre conjuntos de números reais, embora todos fossem infinitos. Destas reflexões de Cantor sobre as séries de Fourier é que surgiu a teoria dos conjuntos. Mas teoria dos conjuntos não surgiu para se fazer diagramas ligando uma coisa a outra. Surgiu para se lidar com conjuntos infinitos. É onde a teoria dos conjuntos é realmente importante. Conjunto finito, se inspeciona, se tem uma tabela, se "vê" um conjunto finito. Conjuntos são complicados quando eles são infinitos. Complicada, principalmente, é a pergunta: como "se conta" o número de elementos de um conjunto infinito? É daí que surgiu a teoria dos conjuntos. E aí Cantor, com sua percepção genial, resgatou o que a humanidade fazia há 10, 20, 30 mil anos atrás para contar objetos, ou seja, fazer correspondências bijetoras entre os objetos. Aquela técnica que o homem primitivo já usava para contar seu número de carneiros, de mamutes que ele tinha matado ou o número de inimigos que ele tinha aprisionado, foi usada por Cantor para contar o número de elementos de conjuntos infinitos. Cantor percebeu o quanto era fundamental esta técnica e a aplicou ao estudo dos conjuntos infinitos. Então quando se começou a trabalhar com conjuntos, os matemáticos na passagem do século, principalmente os matemáticos europeus como Bertrand Russel, Peano, Frege e outros, perceberam a importância dos conjuntos para esclarecer a noção de número. Pode-se partir da teoria dos conjuntos. A partir dos conjuntos criam-se os números naturais; a partir deles criam-se os números inteiros; a partir dos inteiros criam-se os números racionais; a partir dos racionais criam-se os reais e a partir dos reais criam-se os números complexos. Isto é realmente uma criação admirável do espírito humano. Se aceitamos os poucos postulados, os poucos axiomas, da teoria dos conjuntos, depois de algum tempo de trabalho, usando só aqueles postulados e poucas outras definições apropriadas, chegamos a construir todos os números com os quais trabalhamos normalmente. Isto é realmente algo notável da cultura ocidental do século XX, ou seja, esta explicação, esta clarificação do conceito de número, pois o número é um dos conceitos fundamentais da Matemática. E este conceito fundamental de número pode ser feito repousar sobre um conceito ainda mais fundamental que é o conceito de conjunto, que pode ser axiomatizado. É verdade que em todas as tentativas feitas para axiomatizar os conjuntos aparecem vizinhos indesejáveis que são as chamadas antinomias. Para fugir delas os matemáticos têm que impor severas restrições técnicas. Há então os vários conjuntos de axiomas da teoria dos conjuntos. Mas não trataremos disto aqui, pois isto nos levaria muito longe de nosso objetivo.

Desde as investigações sobre as séries de Fourier, o conceito de função se revelou mais e mais importante e hoje ele é também um conceito básico em Matemática. Num certo sentido, quando um matemático olha para um conjunto, para uma estrutura de grupo ou uma estrutura topológica, não está interessado só na estrutura interna dela, mas em saber como ela se relaciona com outras estruturas semelhantes. Este relacionamento é feito por intermédio de funções ou transformações. Então em Álgebra Linear não ficamos só estudando os espaços vetoriais. Rapidamente passamos para as transformações lineares. Em Cálculo, em Análise não passamos seis meses estudando os números reais. Vemos algo dos reais e rapidamente passamos para as funções derivadas, as funções integrais. É o que interessa. Então, o conceito de função ou de transformação está presente em todo lugar. É um conceito onipresente em Matemática hoje em dia. Se quisermos podemos fazer o conceito de função repousar sobre o conceito de conjunto. A partir dele definimos o que é produto cartesiano de dois conjuntos, definimos o que é uma relação e a função é um tipo de relação. Isto está dentro daquela preocupação matemática de reduzir todos os conceitos a um número mínimo de conceitos. O ideal seria ter um único conceito e criar todos os outros a partir dele. Isto do ponto de vista de organização, do prazer lógico, da estética, da economia de conceitos e de pensamento. De um ponto de vista mais prático acho que, infelizmente, se cometeram alguns exageros neste sentido. Isto é uma opinião pessoal que pode ser objeto de um debate. Acho que no 1º ou 2º graus é danoso apresentar uma função como um tipo especial de relação. O conceito de relação como algo que associa aos elementos de um conjunto, de maneira unívoca, os elementos de outro conjunto, é mais que suficiente para 99,99% dos matemáticos praticantes. Se é suficiente para os matemáticos, porque não o seria, com mais razão ainda para todos os estudantes do 1º ou 2º graus? Certamente, uma parcela bem pequena dos matemáticos, os que trabalham em Fundamentos, em Lógica Matemática, estes sim têm necessidade de fazer com que o conceito de função repouse sobre noções mais primitivas como, por exemplo, a noção de conjunto, ou até, como se está fazendo em algumas tentativas recentes, fazer com que o próprio conceito de conjunto e de função repouse sobre a noção de categorias e de funtores. Então, se trabalharmos em áreas bem específicas, bem restritas da Matemática, podemos ter esta preocupação lógico-dedutiva. Para o matemático praticante em Geometria, em Análise, em Sistemas Dinâmicos, em Topologia, no seu dia-a-dia, uma função é uma correspondência que associa a elemento de um certo conjunto elementos de outro conjunto. Acho um exagero insistirmos no 1º ou no 2º grau, principalmente no 1º grau, em apresentar primeiro conjuntos, depois produto cartesiano, depois relações e depois um tipo especial de relações. Isto pode ser muito bonito pois dá ao professor a impressão de que está fazendo algo extremamente científico. Todo campo do conhecimento tenta se cercar de certas brumas protetoras. Um médico nunca fala a não ser em certos termos específicos. Quando ele fala que temos uma pequena dor de cabeça, pensamos de estar quase no cemitério, pelos termos que ele usa. Os matemáticos não fogem a esta regra. Ouvindo dois sociólogos falando entre sí sobre assuntos profissionais não chegamos a entender o que eles dizem pelo vocabulário demasiadamente técnico que eles usam. Nós matemáticos temos o mesmo defeito. Nos cercamos de certas brumas, tentamos dar no máximo possível um aspecto científico, exotérico ao nosso discurso, quando devíamos nos esforçar exatamente para o contrário. Tentar falar uma linguagem simples não é necessariamente perder rigor. O rigor matemático é algo relativo que tem o seu lugar, mas nós não devemos abusar dele. Há um rigor para um menino de 10 anos, há um rigor para um adolescente de 18 anos, há um rigor para um bacharel de 22 anos, há um rigor para um matemático praticante de 30 anos ou mais. Cada faixa tem seu rigor, suas regras de trabalho. Há uma explicação bem lógica, não há nenhum designo maldoso nesta tentativa de fazer as coisas desta maneira. O movimento da Matemática Moderna tentou apresentar desde o 1º e 2º grau a Matemática ao longo de suas linhas, de como ela deveria ser, de como ela deveria ser situada a partir de seus fundamentos, a partir de seus conceitos mais primitivos e se tentou fazer isto de maneira mais precisa, mais rigorosa, mais fiel possível. Deste modo chegamos a alguns exageros.

Voltando ao que se estava dizendo, podemos identificar como conceitos fundamentais e certas atitudes fundamentais a primeira percepção do que é uma estrutura geométrica. Em seguida a percepção do que é uma estrutura algébrica. Depois a percepção de que o método axiomático é eficiente. Aliás, quer queiramos quer não, temos que adotar o método axiomático, pois a Matemática cresceu tanto e se tornou algo tão técnico que se não tivermos o método axiomático nós nos perdemos, tanto porque não conseguimos guardar vários exemplos particulares de uma mesma estrutura quanto porque nos perdemos dentro da complexidade das linhas de raciocínio. Certo matemático francês disse que o método axiomático é o nosso policial que garante que nós não cometeremos erros. Se fossemos uma inteligência omnisciente não precisaríamos do método axiomático, nós veríamos as verdades matemáticas espontaneamente. Os grandes gênios da Matemática não precisaram do método axiomático. Tinham certeza da verdade de suas intuições. Didaticamente não é interessante estudar por exemplo, na Álgebra, o grupo de permutações de n letras, depois o grupo de permutações das n soluções de uma equação, e deduzir as mesmas coisas para cada caso. Em Álgebra Linear estudar o $\mathbb{R}^2$, depois o $\mathbb{R}^3$, depois o $\mathbb{R}^4$, refazer as mesmas coisas em cada um destes casos. É uma perda de tempo e de esforço. É melhor aprender de uma vez só o que é o conceito de grupo e exemplificá-lo à vontade, o que é o conceito de espaço vetorial e exemplificá-lo à vontade. Por este método temos certeza que ao nos deter sobre um problema nós nos policiamos e não cometemos erros. Certamente nenhum matemático chega às descobertas matemáticas usando o método lógico dedutivo.

O matemático intui, acha que o que ele imagina é verdade, tem certeza que é verdade, experimenta, erra. Quando ele se convence, começa a pensar em demonstrar. Como a professora Regine Douady diz, a Matemática no momento em que ela é feita ela está contextualizada, no contexto do trabalho daquele pesquisador, no trabalho daquela coletividade matemática, no trabalho daquela sociedade. Ela é escrita em um livro, em uma revista e então fica descontextualizada. Uma missão que nós professores temos é de recontextualizar esta Matemática para o aluno. Esta recontextualização tem vários aspectos. Um deles é aquele mesmo que mencionamos, ou seja,a recontextualização do conceito, da noção dentro de seu desenvolvimento na Matemática. É apresentar o conceito em uma linguagem que o aluno entende. Obviamente se vamos apresentar certo conceito para uma aldeia de esquimós ou para uma aldeia de bosquímanos, a linguagem deve ser diferente. O vocabulário, a vivência de um esquimó é totalmente diferente da linguagem, da vivência, da experiência, de um bosquímano. Temos de adaptar nossa linguagem àquilo que o aluno possa entender. Mas, além disto, temos a obrigação para conosco, para com o aluno de saber como aquele surgiu e saber porque ele é importante. Por que é que falamos em função, em conjunto, em geometria. Estas coisas não nasceram de graça e não nasceram descontextualizadas. Isto, é claro, é um mero aceno. Para melhor entender tudo isto, seria preciso se dar um curso de Idéias Fundamentais da Matemática. Agora eu só quiz frisar qual a importância de sabermos como os conceitos surgiram e quais foram as necessidades que os fizeram surgir. Houve um filósofo inglês, Thomas Moore, que disse, um pouco pomposamente: "Todo homem deve ser um ornamento de sua profissão". Isto quer dizer que temos que fazer o melhor de nós mesmos para honrarmos nossa profissão. Isto inclui entender como é que uma profissão, seu campo de estudo nasceu, cresceu e porque ele é o que ele é hoje. Nós temos a obrigação de não pegar as coisas no ar e simplesmente reproduzí-las. Por exemplo, não dar a teoria dos conjuntos porque é preciso dá-la. Dizer porque a teoria dos conjuntos surgiu, porque foi importante, porque adquiriu este aspecto central na Matemática. Ou então, dar funções porque é importante. Devemos examinar porque é que a noção de função é importante, como surgiu e assim por diante. Ou falar de grupos pois o programa o exige. Devemos indagar como surgiu esta noção, quais foram os problemas importantes da Matemática que a teoria de grupos ajudou a resolver, por que grupo conseguiu se impor durante 150 anos como algo importante. Há também uma história atrás destas indagações. Claro está, não podermos nos estender demais com isto. Levaríamos tempo em demasia e teríamos a obrigação de ter uma bagagem cultural muito vasta. Para isto há cursos de aperfeiçoamento, cursos de divulgação, conferências, há leituras que nos dão uma idéia destas noções. Gostaria de recomendar um livro barato sobre as raízes históricas da Matemática Elementar, esta Matemática que ministramos nos 1º e 2º graus. "As raízes históricas da Matemática" da edição Douglas, mas não há este livro em Português.

Um livro recentemente reeditado é o "Conceitos Fundamentais da Matemática" de Bento Jesus Caraça. Ele pode ajudar muito pois se detém de uma maneira muito boa sobre a evolução do conceito de número, o número como medida, como surgiu a percepção de número irracional. Recomendaria certamente este livro que é em português e se acha nas livrarias, mesmo se é editado em Portugal. Outro livro, também barato, mesmo considerando o alto valor do dólar-livro, é das edições Douglas e se chama "Introdução aos Fundamentos e Conceitos Fundamentais da Matemática" de Hills. Ele sabe muito mais do que eu disse aqui. Pode-se ver o que é um sistema de postulados completo, independente, consistente, e o que é um modelo de um sistema de postulados, as relações entre a Teoria dos Conjuntos, a Lógica e a Filosofia. É realmente um livro muito bem feito, foi usado durante muitos anos e, além de ter um texto muito rico, ele tem exercícios que permitem testar se foi entendido o que está no livro. Estes livros podem ser encomendados e chegam em cerca de três meses. Poderia falar muito mais sobre este assunto, mas acho que dei uma pincelada que provoca o interesse e por isto encerro esta conversa.

INFORMÁTICA:
O século XXI já chegou. Precisamos correr para alcançá-lo e, mais do que nunca, raciocinar.

Paulo Afonso Lopes da Silva
Ph.D. em Pesquisa Operacional
USU - IME

Abracadabra, hoje, no Brasil, significa Informática. Palavra considerada mágica, na escola e fora dela, para resolver a maior parte dos problemas do ensino e da administração. O nome Informática presta-se como apelo promocional em muitos campos de atividades no Brasil, embora seu conceito correto seja a capacidade de passar por todas as etapas do ciclo de vida de um sistema computacional, desde a sua concepção até o atendimento junto ao usuário. Seria mais difícil chamar a atenção dos presentes se esta palestra tivesse o título "Ciência da Computação: filosofia, estrutura, aplicações e dificuldades". Atraindo as pessoas tanto quanto a televisão, o uso da Informática causa mais admiração que a ida do homem ao espaço, e induz-nos a sentir uma santa inveja daqueles iniciados no assunto.

1. CHEGA O COMPUTADOR: sou professor, matemático ou mais um usuário?

Nesta Semana da Matemática, entre os assistentes, além de professores, encontram-se, principalmente, alunos, licenciados e bacharéis em Matemática e mestrandos em Educação Matemática. Convém perguntar: quantos de nós fomos alunos tradicionais e mestres idem? Chegam professor e alunos à sala-de-aula, quadro-negro presente e cadernos a postos. O mestre explica conceitos fundamentais, ao mesmo tempo que escreve, e os alunos copiam atrasados, muitas vezes sem entender os conceitos. Os exercícios feitos e corrigidos após a cópia garantem que, pouco a pouco, o conhecimento incorpora-se à mente do aluno. Todavia o aprendizado realmente acontece?