Computação algébrica nada mais é do que aquilo que chamamos computação simbólica: trabalha com símbolos ao invés de trabalhar com números. Se posso trabalhar com símbolos posso ter uma biblioteca de operações possíveis. Se tenho então um conjunto de equações posso resolvê-las literalmente reduzindo a faxina algébrica, eliminando termos, fatorando, etc. . . .

Como exemplo, citamos o matemático e astrônomo Charles Delaunay que no século passado trabalhou durante 20 anos ininterruptamente em um único problema: Calcular a posição de um corpo celeste, especialmente a Lua, em função do tempo. Trabalhou 20 anos usando lápis e borracha para fazer suas contas. As fórmulas e as equações de Delaunay ficaram esquecidas até 1957. Eram usadas tabelas e ábacos para se obter os resultados daquela posição dos astros. O modo de obter os dados das tabelas ficara abandonado até que surgisse nos fins dos anos 50 uma novidade: os satélites artificiais. Então tornou-se necessário calcular com maior precisão e freqüência a posição do satélite artificial em relação à Terra.

Deste modo as equações de Delaunay voltaram à baila. Ao final da década de 60 surge a computação algébrica no MIT (Massachussets Institute of Technology) e este problema das equações para achar a posição de um satélite em função do tempo passa a ser um paradigma de programa de computação algébrica. O primeiro sistema de Delaunay foi resolvido em 10 horas. Veja-se a diferença de escala de tempo! Em 10 horas resolveu-se um problema que demorara 20 anos a ser resolvido. E isto com um computador dos mais primitivos, do tipo de uma atual calculadora!

Além disto, ao rodar este programa, foram descobertos três erros no processo dedutivo de Delaunay. Todo ser humano, por mais cuidadoso e criterioso que seja, não é infalível. Um dos erros estava em uma simplificação algébrica e os outros dois eram decorrentes dele. Isto mostra a utilidade de um sistema deste tipo. Neste meio tempo muita coisa vem acontecendo e o que se fazia em computadores de grande porte, hoje pode ser feito, às vezes, até em calculadoras de bolso. Há uma calculadora da HP, a 28 S, por exemplo, que faz alguma coisa de computação algébrica. Isto muda a maneira de trabalhar. Um físico, por exemplo, que demorasse dois anos para deduzir alguma coisa, agora pode usar um destes pacotes e em poucas horas fazer o trabalho de anos e com isto acelerar cada vez mais o desenvolvimento da pesquisa e do conhecimento. Isto também tem implicações em Educação pois modifica radicalmente certas coisas. Existe até um conto de ficção científica de Isaac Asimov, situado em uma época do futuro em que haveria computadores poderosos que multiplicariam matrizes de ordem mil, por exemplo, em um piscar de olhos. Isto hoje não está longe da verdade; mas, naquele conto, ninguém saberia mais multiplicar dois números e um sujeito descobre, por acaso, as regras de "vai um" etc... . Todos acham que ele é maluco e então é colocado à prova contra um computador e, surpreendentemente para os seus companheiros, todas as regras que ele tinha "inventado" batiam com as do computador. Ele acaba sendo pressionado, os psiquiatras querem dissecar seu cérebro, no final, morre na mão dos médicos. Isto é uma ficção, mas nossa imaginação pode voar alto prevendo o que poderá acontecer no futuro. E isto tem também influência na Educação. Na IBM foi desenvolvido um sistema chamado SCRATCH PAD que foi desenvolvido em cerca de 20 anos de pesquisa e que foi apresentado no ano passado em um seminário do Centro de Pesquisas Físicas em uma Escola de Computação Algébrica. Usa um computador de um porte razoável e existem programas que rodam em micros com capacidade de resolver problemas bem menores também.

No entanto, neste momento, o orador gostaria mais de falar sobre um programa chamado Matemática. É similar ao SCRATCH PAD e é revolucionante em certos aspectos. Em conferência no ano passado chamada "Computadores e Matemática" realizada em Boston, estes programas todos foram exibidos e mostrados em plenário. Quanto ao programa de Matemática, uma pessoa muito capacitada, com uns 45 anos de experiência e muito domínio de Matemática, descobriu um erro no programa. Deu uma briga no plenário que foi resolvida com a sugestão "você não tem um computador ai? Vai lá e testa para ver". Foi o que se fez e confirmou-se o erro. O criador do sistema ficou bem encabulado. Isto acontece, mas não invalida o ponto ao qual se quer chegar. O programa foi desenvolvido às pressas, em cerca de 3 anos, enquanto o da IBM demorou 15 anos, pois o dono era sozinho. Ele queria ganhar muito dinheiro, e de fato ganhou uns bons milhões de dólares, e passou por cima de um processo metódico e mais criterioso. Não obstante, ele introduziu várias inovações importantes. Por exemplo, associação de recursos de computação gráfica com Matemática. Visualizar um problema é muito importante. O orador pretende se dedicar nos próximos anos à área de visualização científica. No IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) haverá um projeto sobre isto chamado VIS – MAT (visualização em Matemática) onde o Prof. Jonas Miranda está abrindo novos caminhos na Matemática.

O orador acha que os matemáticos, principalmente os matemáticos puros, são os cientistas mais refratários ao uso do computador. Por mais incrível que pareça os mais abertos neste sentido são os da área da Medicina.

Os médicos são atraídos por descobertas novas. Os físicos e os engenheiros usam o computador como uma ferramenta imprescindível de trabalho. Se as informações de que eles precisam são fornecidas por um computador, por uma calculadora ou por uma pessoa é irrelevante para eles. Não têm atração forte pelo computador.

Voltando ao professor Jonas Miranda, seu mérito é fantástico. Trabalharam com ele grupos de Estatística e de Pesquisa Operacional, mas o forte era o de Matemática Pura. Há no IMPA um grupo muito sério de matemáticos puros como o Professor Elon Lages, o Professor Manfredo Perdigão do Carmo, o Dr. Maurício Matos Peixoto. O mérito do Professor Jonas Miranda foi fazer uma tese em Geometria e, sem conhecer nada de computador, utilizou-o como elemento de uma prova geométrica. Ele conseguiu provar a existência de uma determinada superfície de Geometria Riemaniana que se constituiu no assunto central de sua tese. A partir desta tese houve artigos publicados até em revistas internacionais e ele conseguiu adquirir a confiança das pessoas que ficaram responsáveis por esta área de visualização científica, especialmente de visualização matemática. A IBM e o IMPA farão um projeto com ele. Este seria uma ligação de Matemática com Computação Gráfica. Aliás o expositor acha que é preferível fazer antes um curso de Graduação em Matemática e depois fazer um curso de Informática em nível de Pós-Graduação, de Especialização. É mais sério, menos imediatista.

A seguir o expositor mostra o filme que citou anteriormente, que ilustra como se podem fazer manipulações simbólicas de equações assim como visualizar os resultados. Dada uma determinada superfície, mudar o ponto de vista, ver de cima, ver de baixo, coisa que normalmente seria demorada e trabalhosa. Pelo filme vemos que a parte tecnológica é bem aperfeiçoada o que mostra que um matemático, um engenheiro, um médico para usar a Informática não precisa se aprofundar em computação. Os programas prontos estão muito bons. Agora, se ele quiser estudar computação seriamente, a coisa muda de figura. Nada impede que um matemático desenvolva "software" para Matemática, mas então está trabalhando em outra função, que é mais ou menos o caminho que ele, o expositor, trilhou.

Em termos de Educação o potencial é muito grande e talvez não tenha sido tão explorado como em pesquisa, pois nem sempre os recursos chegam com a mesma facilidade. O expositor tem feito algumas experiências em nível doméstico. Tem três filhos pequenos, sendo que o maior cursa a segunda série do 1º grau e ele tem usado o computador como uma ferramenta de motivação. Aprender tabuada já foi um trabalho árduo. Ele programou em LOGO, que é uma linguagem adequada a crianças, um sistema com pequenas contas dando estímulos quando a resposta estivesse certa e pequenas gozações quando não estivesse. As mesmas perguntas, que feitas pelos pais ou professores seriam enfadonhas, feitas pelo computador constituiam uma diversão, tornaram-se gratificantes. Também se pode estimular com o computador a capacidade exploratória da criança.

A segunda parte da conferência se constitui em uma apresentação de slides, bem sofisticados alguns, outros fabricados por ele mesmo em um trabalho quase artesanal, mas que ilustram o uso da computação gráfica.

A computação gráfica tem um objetivo que ninguém contesta. Pode ter várias, centenas de definições em qualquer área. Para inteligência artificial ele já coletou, por exemplo, umas 350 definições, e cada pessoa acha que sua definição é melhor que a outra, pois ela acrescenta um detalhezinho, um pouco mais de rigor. Para computação gráfica a coisa não é diferente. O objetivo comum de todos que trabalham nesta área é buscar o máximo de realismo no processo de visualizar figuras no computador. Procura-se criar figuras que talvez nunca tenham existido ou que nunca venham a existir, mas procura-se convencer as pessoas que estas figuras são reais. Qual o objetivo? Imaginemos por exemplo querer-se fazer um projeto espacial de uma nave que vá a Saturno, por exemplo. Há uma simulação, um sistema dinâmico por trás que descreve a trajetória, o movimento da nave, e quer-se vender este projeto para uma autoridade, Presidente da República, Secretário de Defesa, por exemplo, e tem-se que lhe mostrar algo mais próximo do real do que palavras. Para alguém que não está familiarizado com o ramo é mais fácil entender o projeto "vendo-o" do que ouvir palavras ou considerar equações.

Outro exemplo é em termos de engenharia civil. Se queremos projetar um prédio, nos convém "vê-lo" antes de construí-lo, não só para vendê-lo melhor, mas para estudar topograficamente o encaixe do prédio no terreno, escolher cores e texturas de materiais adequados.

Em fabricação de automóveis podemos "ver" um automóvel que não existe, que só está na cabeça do projetista, para melhor realizá-lo. Fazendo um paralelo de novo com o início da apresentação, o orador sente uma diferença muito grande entre alunos de Engenharia e de Matemática. Estes têm maior capacidade de abstração enquanto que o engenheiro é educado para coisas concretas. Corria até, no seu tempo de estudante de engenharia, uma anedota sobre o professor de Àlgebra Linear. Diziam os alunos que o professor, chegando em casa e querendo contar uma história para os filhos, dizia: seja um lobo L_1 e três porquinhos genéricos P_1, P_2 e P_3 . . .

Esta visualização de objetos que não existem, mas que poderiam existir, tem aplicações em várias áreas, inclusive em áreas de entretenimento, de animação, de filmes de publicidade, etc. . . .

A primeira área que se utilizou do computador é a área que tem como motivação aplicações militares. As primeiras aplicações foram simuladores de vôo. Perdia-se muito tempo e muitas vidas treinando pilotos em aviões de verdade. Uma pessoa chamada Link criou inicialmente um aparelho, como um barquinho de madeira, onde o piloto era treinado muitas horas em terra antes de pegar um avião de verdade. Pediu-se então à Computação algo que parecesse real onde os pilotos pudessem ser treinados. Hoje se faz isto aqui no Brasil. A Varig possui um aparelho bastante sofisticado onde o piloto jura que está voando em um ambiente de verdade. A área militar continua impulsionando outras áreas.

O orador mostra, a seguir, alguns slides que ilustram o realismo de que ele fala. Um deles mostra um comercial fictício de comida do ano 3000. Para fazê-lo foi criado um robô que simula as sensações do ser humano, e, para isto, foram colocados sensores nos dedos, nos braços, nos cotovelos, enfim em diversas extremidades do modelo humano e todas as sensações foram gravadas e reproduzidas, por computador, no robô.

Este slide e outros subseqüentes fazem parte de vídeos resultados de trabalhos de anos, às vezes, e que apareceram, em um congresso chamado Siggraph da ACM.

Este tipo de congresso normalmente conta com mais de 50.000 participantes e nele seleciona-se, entre mais de 10.000, dezesseis trabalhos. Há nele trinta cursos no primeiro dia e trinta no segundo com mais de 500 participantes em cada sala. Como se vê este tipo de congresso é muito concorrido e é muito importante. Mostra também um slide tirado do filme "Jornada nas Estrelas" que ganhou um Oscar de Efeitos Especiais, efeitos esses todos feitos no computador.

A computação chegou a tal ponto de perfeição que é possível fazer-se arte usando recursos de programação. Essa opinião, que não é geral, é porém do orador que julga que a maneira com a qual as obras são efetuadas justifica a sua classificação como obra de arte.

Há uma área chamada "Modelagem Geométrica" e outra "Geometria Construtiva Sólida" onde se pode ter primitivas geométricas básicas e se pode construir outros modelos mais complexos a partir destas primitivas e depois associar a isto algo como, por exemplo, mapeamento de textura em que se constrói algo plano e depois se amplia por meio de uma função matemática em cima de uma garrafa, por exemplo. Mas sempre tudo matemático, geométrico.

Também se simula, por meio de computação, iluminação tanto especular, (como por um espelho) como a radiosidade (que é a do meio ambiente). Isto os físicos não conheciam. É uma contribuição da Computação Gráfica à Física.

O orador continua mostrando slides de simulações de objetos feitos por Computação Gráfica que são quase perfeitos. É preciso muita acuidade para ver que não é um retrato de algo real. Mostra, ainda, um dispositivo onde se representam fractais. Após estudo geométrico dessas formas, um pesquisador da IBM conseguiu pela primeira vez visualizar e mostrar a beleza dos fractais, através de representações no computador. Descobriu que a Geometria Fractal tinha uma componente aleatória muito forte e por isto se presta bem para representar aspectos da natureza, como chuva, arco-iris, um arbusto, etc. . . . Existem programas prontos com diversas espécies de vegetais, catalogados em diversas idades em diversas épocas do ano. É assim mais fácil criar no computador figuras usando partes já prontas.

Fala em seguida sobre representação de gráficos por computador. Observa que a necessidade humana de usar gráficos é anterior ao aparecimento da escrita. Antes de aprender a escrever o homem aprendeu a desenhar. Suas mensagens chegaram até nós através de figuras de animais e de homens em diversas atividades.

O grande impulso da Computação Gráfica foi com a utilização de um terminal de vídeo. No Massachussets Institute of Technology, MIT, em um projeto conseguiu-se uma tela monocromática, não muito perfeita, de cerca de 9 polegadas, onde se pôde representar pela primeira vez uma reta horizontal. Foi uma aventura e uma sensação de algo fantástico. De lá para cá muitas novidades surgiram. A primeira vez que se fez algo em termos de desenho por projeto de computador, foi em um projeto chamado ALPINE 2250, desenvolvido pela General Motors, que veio a ser comercializado pela IBM como IBM 2250.

Até a década de 60 a computação gráfica foi sendo aprimorada mas continuava sendo muito elitizada e usada principalmente para visualizar projetos de novos modelos de automóveis. Ainda era cara demais, na faixa de milhões de dólares. Mas em 1976-77 apareceram os PC. Aqueles computadores já possibilitavam usar um aparelho de televisor como instrumento de saída de visualização gráfica, mesmo que não fossem ainda muito aperfeiçoados para esse fim. Houve então uma demanda inicial de pessoas para comprar o PC. Isto fez com que se aprimorasse a qualidade dos gráficos que eram feitos, devido à exigência da clientela. O usuário deixou de usar uma televisão comum para usar terminais de vídeo específicos. Aliás o conferencista diz que se poderia usar um aparelho de televisão para esse trabalho mas ele não o aconselha de maneira alguma, pois o usuário estragaria sua saúde. Num vídeo de computador há uma blindagem que impede a passagem de raios perniciosos. Um vídeo de computador é usado a 30 cm de distância, enquanto é aconselhável usar um aparelho de televisão a 5 m de distância e nunca a menos de 3 m. Um televisor que não tenha um monitor apropriado e uma blindagem adequada pode atuar diretamente no cortex visual produzindo danos como até disritmia e problemas de visão que só aparecerão anos depois. Haveria, diz o expositor, muito a falar sobre o efeito estroboscópico, tanto nos aparelhos de televisão como nas lâmpadas fluorescentes que não têm o sistema trifásico e que não usam difusor.

Hoje a indústria de construção de computadores e de vídeos está muito aperfeiçoada e o preço baixou muitíssimo, permitindo assim um maior número de usuários.

Para terminar o expositor define o que entende por Computação Gráfica: é tudo que envolve dados iniciais e a transformação deles em figuras através de um processador. Existem quatro áreas distintas em termos de computação. Uma que é o processamento de dados convencionais em que a pessoa mapeia dados com dados. Por exemplo, em uma folha de pagamento, trabalha-se com dados que devem ser manipulados em outros dados. Se temos a avaliação de uma função matemática também haverá alguns dados de entrada e alguns dados de saída. Outra área é a Computação Gráfica que transforma dados em figuras. Outra é o processamento de imagens, que transforma figuras em figuras, como por exemplo um dado de um satélite que se transforma em um mapa de falsa cor, e finalmente uma área chamada reconhecimento de padrões na qual se fornece uma determinada figura, uma impressão digital, por exemplo, e se reconhece um certo número, ou um código; no exemplo dado, o CPF do portador da impressão digital. Ou de uma nave inimiga no espaço, recebe-se o modelo, o tamanho, etc. . . Esta área é importantíssima nos projetos de guerra nas estrelas.

Todas essas áreas se resumem em um único problema, o de visualização. O orador apresenta diapositivos para mostrar esses tipos de representação de objetos inexistentes, para ver como se situariam em diferentes posições, iluminações, colorações, de modo a não incorrer em erros grosseiros quando os objetos forem realmente fabricados e realmente colocados nas posições, iluminações, colorações imaginadas. Mostra também diapositivo com representações aplicadas à medicina. Está se estudando a criação de uma bio-computação para resolver problemas importantíssimos nessa área. Para isto, há um projeto de colaboração entre a IBM e a área biomédica da UERJ. Por exemplo, mostra um caso de cirurgia ortopédica, de planejamento de uma prótese, vendo os possíveis detalhes no computador. Hoje em dia pode-se fazer uma operação no cérebro e antes, através de uma tomografia computadorizada, detectar uma fissura ínfima de modo a planejar o corte a ser efetuado na carapaça do cérebro e já moldar uma peça que encaixe com precisão de milésimos de milímetro no corte, antes do paciente entrar na sala de cirurgia. Assim o risco de rejeição é muito menor. De maneira análoga há aplicações em odontologia. Digita-se uma cárie e o computador prepara o modelo de uma prótese que se encaixe perfeitamente.

No total essa segunda parte da conferência mostra o quanto a técnica da computação está aperfeiçoada e de que maneira ela pode ser usada em todos os setores da vida prática.

A palestra, extremamente interessante, poderia ter continuado por muito tempo, mas o adiantado da hora fez com que o Prof. Kopp encerrasse aqui sua fala sob os aplausos da audiência.

SOBRE A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Ph.D. em Matemática - UFRJ - USU

Dedicado ao amigo e mestre
Professor José Carlos de Mello e Souza

Falaremos sobre a construção dos números reais de modo informal. Da análise dos currículos de nosso ensino médio e universitário, localizaremos o momento exato, no nosso modo de ver, para a caracterização do corpo dos números reais.

Note-se que, inicialmente, ensinamos aos alunos a trabalhar com os naturais, inteiros e as frações. Tais números chamamos de racionais. Com esses fazemos vários problemas e propomos uma infinidade de questões interessantes e educativas. Ainda no primeiro grau encontramos problemas cuja solução depende de raízes como: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, etc e do número π. Podemos trabalhar nessas questões, ensinando como operar com tais números, sem, entretanto, definir formalmente o número real. Podemos chamar a atenção dos alunos para a diferença entre os números decimais limitados e os não limitados. Observar que com aproximações decimais no cálculo aproximado de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, etc, o processo continua indefinidamente. Notar a diferença existente entre tais representações aproximadas e os números periódicos. Pode-se dizer que os números decimais limitados e os ilimitados são denominados números reais e continuar o diálogo com os alunos sem se deter em detalhes. Aliás, Pointcaré chamava atenção para o cuidado que se deve ter ao dar uma definição em Matemática, observando-se com cuidado o nível ao qual se destina a definição. Portanto, em todo o primeiro grau e parte do segundo grau, são os números acima mencionados que aparecem nos problemas de álgebra e geometria. No ensino universitário, dito atualmente de terceiro grau, iniciando com cálculo diferencial e integral, na maioria de nossas universidades, a preocupação é meramente operacional, como indicam os livros adotados. Portanto não é usado no método aplicado o estudo, ou melhor, a caracterização dos números reais como um corpo ordenado completo. No cálculo de certas fórmulas aparece a necessidade de introduzir logarítmos Neperianos, com o aparecimento do número *e*. É suficiente usar um algoritmo para seu cálculo fazendo com que o estudante observe que sua representação decimal não é limitada.

Examinando o currículo do ensino de Matemática no terceiro grau, verifica-se que no quinto semestre há uma disciplina denominada Análise Real. Neste ponto, o estudante já aprendeu, por hipótese, todo o formalismo do Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Geometria Analítica, as principais propriedades das estruturas algébricas, além de Física Geral, Mecânica, etc. Portanto, o professor que se propõe a ensinar a disciplina Análise Real, não pode se limitar a repetir a seus alunos o que já viram nos Cálculos. Desse modo, minha visão, dessa disciplina, no quinto período do terceiro grau, é que ela será um estudo introdutório das funções reais de variável real. Portanto, deve ser iniciada com a construção dos números reais.

Richard Dedekind, em seu livro — "Essays on the Theory of Numbers — Dover — Publications — N. Y. 1963", publicado inicialmente em 1901, conta que após seu doutorado, foi ensinar em uma escola técnica em Zurich. Diz que sua tese de doutorado fora sobre funções Euclideanas, nada tendo a ver com o ensino do Cálculo. Ao se incorporar ao corpo docente daquela escola, foi designado, certa vez, para ensinar Matemática, ao nível do nosso Cálculo Diferencial e Integral. Ao preparar suas aulas, teve que consultar vários livros, concluindo serem insatisfatórios todos, incompreensíveis, pois careciam de um estudo cuidadoso dos preliminares. O que estava faltando era exatamente o conceito de número real apropriado ao nível que pretendia imprimir às suas lições. Pensou, portanto, em começar definindo o conceito de número real. Admitiu os racionais como sendo as frações. Tomou, por exemplo, o número 3/4. Considerava todos os racionais decompostos em duas classes, uma formada pelos racionais menores que 3/4 e outra pelos racionais maiores ou iguais a 3/4. Desse modo, as duas classes de racionais definiam bem o número racional 3/4. Tomando como exemplo as raízes da equação $x^2 - 2 = 0$, não podia fazer a mesma construção. Ele sabia que esta equação não possuia raiz racional, isto é, não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2. Considerou uma classe K_1 constituída pelos números negativos e pelos positivos cujo quadrado seja menor que 2; uma classe K_2 dos racionais positivos cujo quadrado é maior que 2. A reunião das duas classes é igual ao conjunto dos racionais. Assim o número $\sqrt{2}$ não estava em K_1 nem em K_2. A coleção composta das classes K_1, K_2 ele denominou corte nos racionais. Observou que havia dois tipos distintos de cortes. Um em que há um número racional que pertence a uma das classes, como máximo de um ou mínimo da outra (veja o caso de 3/4). Entretanto, há cortes onde tal não acontece, observando-se, no caso, as classes K_1, K_2 definindo $\sqrt{2}$. Construção semelhante à de $\sqrt{2}$, poderia ser feita para $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, ... O ponto fundamental seria definir o processo canônico conduzindo ao novo conceito de número. Assim, Dedekind definiu o conceito corte e diferenciou, como no exemplo anterior, os cortes que definiam os racionais dos que não definiam. Quando o corte não definia um racional, o novo objeto por ele definido denomina-se número irracional. A união dos racionais com os irracionais, com as respectivas operações aritméticas definidas, constitui o corpo dos números reais. Ao corpo de números reais assim obtido, anexa-se um axioma, garantindo que todo corte nos reais determina um número real. Tem-se então um corpo onde as operações aritméticas são todas possíveis. Ele observou que, escolhendo-se uma reta no plano, pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos desta reta.

O livro de Dedekind exerceu uma enorme influência no ensino da Análise Matemática. Examinando os livros escritos posteriormente, constata-se a preocupação de dedicar algumas páginas à construção dos números reais de Dedekind. O ensino da Matemática no Brasil, sofreu muito a influência do ensino francês e, posteriormente, após 1930, do ensino italiano. Examinando os textos daquela época, observa-se uma preocupação saudável com a construção aos números reais por meio de cortes.

Outro matemático que se preocupou com construção dos números reais foi George Cantor, que viveu por volta de 1845. Ele observou que ao estudar as sucessões de números reais, havia aquelas que convergiam para um racional e as que não convergiam para qualquer racional. Exemplo, a sucessão das aproximações por falta de $\sqrt{2}$, convergem para $\sqrt{2}$. Dada uma sucessão $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, observa-se que a sucessão $(X_m - X_n)_{m,\, n \in \mathbb{N}}$ converge para zero quando m, n $\to \infty$. Dada uma sucessão $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se a sucessão $(X_m - X_n)_{m,\, n \in \mathbb{N}}$ converge para zero quando m, n $\to \infty$, diz-se que a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. De posse do conceito de sucessão de Cauchy, Cantor definiu novo conceito de número, isto é, do número irracional. Obteve um corpo onde toda sucessão de Cauchy converge. O leitor curioso em estudar a construção dos números reais pelo processo de Cantor, pode consultar, com proveito, Alvercio Moreira Gomes, Introdução à Álgebra Moderna, F.N.Fi, Rio de Janeiro, RJ, 1960.

As idéias de Dedekind e Cantor, foram, de fato, grandiosas e originais. Analisando-as sob o ponto de vista de nossos dias, cada um observou o corpo dos racionais sob um aspecto. Dedekind com seus cortes, completou o corpo não completo dos números racionais, usando sua estrutura de conjunto ordenado. O que fez ele, foi completar o corpo ordenado dos números racionais, obtendo um corpo completo que é o dos reais. Por outro lado, Cantor, olhou os racionais e examinou sua estrutura métrica. Assim, completou o espaço métrico dos racionais, obtendo um espaço métrico completo, que é o espaço métrico dos números reais.

Além dos métodos de Dedekind e Cantor, há aquele de considerar todos os números decimais limitados e não limitados. Aliás este método é usado, muitas vezes, em nosso ensino elementar, sem um estudo sistemático, o que é correto, como foi dito acima. Se, por ventura, o leitor estiver curioso por ver um estudo completo desse método, pode consultar: S.M. Nikolsky — A course of mathematical analysis, vol. 1, Mir Publishers — Moscou — 1977.

Da observação que acima foi feita, sobre o momento, na universidade, apropriado ao ensino dos números reais, observa-se que o aluno já possui, por hipótese, suficiente maturidade para o entendimento do processo axiomático, que é um coroamento de suas experiências anteriores. Portanto, seria possível ensinar, nesse ponto do curso, número real do ponto de vista axiomático. Define-se número real como elemento de um corpo ordenado completo, representado por $\mathbb{R}$. Reencontram-se em $\mathbb{R}$, os naturais, os inteiros, os racionais. Define-se nesse corpo o conceito de corte e de sucessão. Demonstra-se que é completo no sentido de Dedekind e de Cantor. Consulte-se G. Birkoff S. MacLane. "A Survey of Modern Algebra", MacMillan N.Y. 1948.

Concluimos agradecendo as observações e comentários construtivos dos professores José Carlos de Mello e Souza, Israel Arcavi, Moema Sá Carvalho, Estela Kaufman Fainguelernt, Franca Cohen Gottlieb.

A PESQUISA E O SABER SOCIAL

Circe Navarro Vital Brazil
Doutora em Psicologia
PUC/RJ - IESAE/FGV - USU

A pesquisa em Educação Matemática não se desvincula do contexto das Ciências Sociais, na sua referência à ordem sócio-cultural com sua produção de significações, eminentemente teórico-prática, como também está ligada à Filosofia quanto aos fins da Educação.

A pesquisa comporta diferentes abordagens metodológicas. Esse pluralismo metodológico já aponta para a condição de que não há um só método a seguir para atingir a verdade, superando a postura ideológica que encontraria no método demonstrativo, nos raciocínios necessários que dizem respeito ao aspecto formal do saber, o caminho privilegiado para todos os domínios da ciência, pois permitiria atingir a certeza pelo uso da razão absoluta, monológica.

O monismo metodológico desqualifica todos os fenômenos cuja existência é afirmada pela opinião comum, pelo saber social não sistematizado, não teorizado e produzido pela razão dialógica.

Historicamente, vamos confrontar três abordagens metodológicas e seus reflexos na pesquisa em Educação Matemática. São elas: o empirismo lógico ou positivismo lógico, o estruturalismo e a dialética.

O discurso do empirismo lógico está referido a um movimento unitário da ciência contemporânea. Se se determinam os fundamentos empíricos e dedutivos do conhecimento, então toda ciência é construção e combinação lógica de conceitos e de proposições empiricamente providas de sentido. Acentua-se o caráter lingüístico das questões filosóficas e subordina-se a filosofia a uma teoria da lógica enquanto linguagem. Reduz-se a teoria do conhecimento à teoria da ciência, dando-se primazia à lógica formal.

Os enunciados da lógica são enunciados vazios de conteúdo, sempre verdadeiros, pois não nos comunicam nada sobre a realidade e conferem à lógica um caráter puramente tautológico. A lógica é a "priori", independente da experiência e suas leis servem de meio (nexo lógico) para as operações dedutivas da ciência. São proposições complexas que não enunciam nem como verdadeiras, nem como falsas as proposições que intervêm em sua composição e o operador principal tem valor apodítico. Daí cada lei lógica autorizar um ato de inferência.

Além da validade formal das proposições, os empiristas lógicos destacam a importância da verdade empírica das proposições que resulta do acordo ou desacordo de seu conteúdo com a experiência, isto é, com o dado ao qual se refere. As diferentes ciências que falam dos fatos vertem seus conteúdos nas formas lógicas. Essas formas servem para realizar uma construção mais precisa das relações entre os fenômenos enunciados nas ciências fáticas.

A validade lógica e a verdade empírica vão constituir o contexto da prova, condição para produzir o conhecimento científico.

Toda teoria científica é um sistema de proposições que são aceitas como verdadeiras e podem chamar-se leis ou asserções. No sistema hipotético-dedutivo estas asserções se derivam de outras, numa ordem definida, de acordo com certas regras. Vão constituir uma linguagem bem feita, pois dispõem de um vocabulário de base com termos ou noções primeiras, não definidas e termos ou noções derivadas definidas a partir das noções primeiras; um conjunto de regras sintáticas, que combinam as noções para formar proposições; um certo número de proposições iniciais consideradas como válidas, embora indemonstráveis, que são os axiomas; um conjunto de regras lógicas ou de transformação que permitem obter proposições equivalentes; um conjunto de regras semânticas ou de correspondência entre as noções adotadas e os objetos por elas designados, falando-nos sobre os objetos do mundo sensível e seu comportamento. Um enunciado possuirá significação empírica, quando em virtude da definição empírica das noções que nele figuram, ele corresponde a uma situação de fato. Um enunciado, para a verificação do qual nenhum método de observação ou de experimentação é epistemológicamente concebível, é um enunciado empiricamente vazio de sentido: é uma pseudo-proposição empírica.

Tanto a prova empírica, quanto a prova lógica apresentam limites. Os limites da prova empírica estão referidos à crítica de Hume à indução, a proposta de Karl Popper do Princípio da Refutabilidade e a proposta de

C.G. Himpel ao diferenciar os enunciados de observação (não científicos) dos enunciados com significado empírico. Os limites da prova dedutiva encontram-se na Prova de Kurt Godel que apresentou as limitações inerentes ao método axiomático, provando ser impossível estabelecer a consistência lógica interna de uma classe ampla de sistemas dedutivos, não se podendo garantir muitos ramos significativos do pensamento matemático como estando completamente livres de contradições internas.

A certeza decorrente da verdade absoluta, necessária e universal, a crença no poder do contexto da prova, a "neutralidade" do conhecimento, a afirmação de que o conhecimento é apenas o de ciência — são algumas afirmações ideológicas dessa abordagem. O pesquisador valoriza, principalmente, a definição dos termos, a linguagem unívoca, as hipóteses e sua verificação empírica.

Na década de cinquenta, no entanto, surge uma nova linguagem: o estruturalismo. O estruturalismo, como abordagem metodológica, vai propor a valorização das leis de composição da estrutura, das quais resultará a significação dos elementos que a compõe. A estrutura é uma totalidade autoregulada. Num enfoque sincrônico ela se apresenta como estrutura estruturada. Este corresponde a um dos momentos de sua composição, que virá modificar-se em todos os possíveis realizáveis, em virtude da sintaxe das transformações da estrutura. A única invariante é a lei da variabilidade.

Os elementos que compõem a estrutura são elementos de significação. Essa atividade de significar decorre de nossa possibilidade de pensar não apenas as coisas diante de nós, mas pensar sobre as coisas na sua ausência. É a atividade de substituir, representar, enfim usar linguagem. Se a língua é uma estrutura, a "fala" concretiza no ato as leis dessa estrutura. Nesse ato de substituir, as palavras se liberam da pretensão de torná-las unívocas, monovalentes e o interpretante, função do campo intersubjetivo, vai promover a articulação de um sentido a outro sentido. O signo verbal se torna signo-símbolo e a lei da estrutura, produto da razão, procurará limitar as associações, a remissão de um signo a outro. A razão estrutural do objeto-sistema não é redutivista como no empirismo lógico, mas cria uma contradição, pois ainda está referida à lógica formal, tentando organizar o simbólico.

O pesquisador valoriza as "categorias" que, através do inconsciente categorial de nível infra-consciente, vai procurar explicitá-las de forma a dar conta da organização estrutural. O saber social, no entanto, não se deixa aprisionar por essas categorias. Mas a contradição confunde. Fala-se de uma autonomia do simbólico na razão estrutural, desconsiderando-se sua imbricação com o imaginário e o real. O símbolo vai ser apresentado com valor de determinação de todo o comportamento.

Vai caber à Psicanálise ultrapassar o inconsciente categorial, falar-nos do inconsciente dinâmico é apresentar a interseção do real, do imaginário e do simbólico. Com isso, a razão estrutural torna-se insuficiente, bem como a lógica formal. É valorizada a razão dialógica e a razão dialética. O inconsciente é dinâmico e se manifesta em nível de superfície. Não é da ordem causal, instintiva ou substancial. É processo.

O fato da significação é imprevisível — está ligado ao Outro, ao ENCONTRO/DESENCONTRO. A razão dialógica entra em jogo. Não pode satisfazer-se com a lógica formal, que no discurso positivista foi escolhida como razão soberana.

É a linguagem que ancora a razão no desejo ao incluir o OUTRO numa implícita demanda de resposta ou de reconhecimento. Há uma significância dialética entre EU/OUTRO.

A nossa consciência quer explicar tudo para evitar qualquer descontinuidade, qualquer falta, tende ao ponto mínimo de tensão que fica servindo a uma razão soberana. Procura-se explicar tudo, para deduzir a tensão entre arché (o antigo, o passado) e telos (a finalidade) — A consciência tem horror ao vazio, à descontinuidade, à morte, ao abismo, à hiância primária, que separa o nosso pensamento do automatismo espontâneo da natureza.

Considera-se a análise do discurso — como meio para entender o outro não totalmente — não há essa possibilidade, mas parte desse outro, é uma via de encontro, de conhecimento/desconhecimento. Eu me sei enquanto professora como sujeito da dúvida, do desconhecimento — voltada não para impor valores, impor saber — mas para descobrir com o outro, valores, seu saber social, suas razões, sua lógica. É a relação intersubjetiva que permite que aflore o estilo de dois textos — EU/OUTRO. O resto é submissão, discurso imposto, repetição, morte.

O pesquisador, nessa abordagem, não determinará categorias "a priori". Buscará os temas nos grupos semiológicos. O tema é o sentido de uma enunciação completa, compreende a enunciação (verbal) e os aspectos situacionais. Daí ser, o tema da enunciação, único; intrinsecamente não reiterável. Os temas não serão verdadeiros, nem falsos. Não haverá uma linguagem unívoca, nem preocupação com definições. Haverá, no entanto, produção de um saber rigoroso, na medida em que o discurso for ouvido e como "dado" interpretado mais ou menos profundamente. Seu espaço deverá ser o do "plurilogos", democrático, onde conviverão as diferentes razões sociais.

A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sua evolução

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
Livre Docente em Matemática
UFRJ

A problemática da Educação Matemática ou Didática da Matemática, como é denominada por franceses e alemães, está centrada no estudo do *sistema didático,* constituído pelo triângulo:

saber matemático, professor, aluno

Numa formulação mais explícita, preconizada por Georges Glaeser, os vértices deste triângulo são:

— *domínio de estudo* (conhecimento e habilidades)
— *agentes educativos* (professores, condiscípulos, livros, materiais pedagógicos, . . .)
— *estudantes* (de idade escolar ou não)

As tensões provocadas entre estes componentes, cada um intervindo segundo suas finalidades próprias, propiciam os elementos de estudo do educador matemático, desde que convenientemente observadas.

Para tentar apresentar a **evolução da Educação Matemática** é essencial mostrar como, só recentemente, os vértices do triângulo constituiram um *sistema.*

A ênfase dada ao papel do *professor* como transmissor do saber matemático pelo *ensino,* desvinculada da preocupação sobre *como* o *aluno aprende,* foi um dos fatores que dificultaram o desenvolvimento da Didática da Matemática.

Artigue e Douady (1986) assim definem a Didática da Matemática: "propõe-se a descrever e explicar os fenômenos sobre as relações entre o ensino e a aprendizagem da Matemática". No Handbook of Research on Teaching (1986) encontra-se o artigo de Romberg e Carpenter intitulado: "Pesquisa em Ensino e Aprendizagem Matemática: Duas Disciplinas de Investigação Científica."

Esses três autores, entre muitos outros, insistem na indissociabilidade entre ensino e aprendizagem.

No princípio do século XX, a necessidade de adequar a transmissão do saber matemático ao desenvolvimento industrial europeu da época levou matemáticos como Felix Klein a batalhar pela melhoria dessa transmissão, ou seja, pela Instrução Matemática.

Durante o Congresso Internacional de Matemáticos (Roma, 1908) foi criado, então, o ICMI (Comitê Internacional para a Instrução Matemática), ligado ao ICM (Comitê Internacional de Matemáticos). Contudo, o ICMI, só a partir de 1952, passou a ter a representatividade desejada, como será visto depois.

Toda a importância era dada ao ENSINO. Como poderia ser bem sucedido este empreendimento se as três seguintes premissas, sobre as quais as atividades docentes estavam apoiadas, eram justamente elementos dificultadores?

1) A Matemática está pronta; é limitada e estática.

2) O estudante deve absorver o que foi feito por outros.

3) O papel do professor é gerencial ou processual.

Estas premissas estavam presentes no processo educacional, em geral, como demonstra a observação de John Dewey (1916) em seu livro "Democracy and Education" à premissa 1 —:

> "Este registro compacto de conhecimento, independente de seu lugar, como conseqüência de uma investigação e um recurso para uma ulterior investigação, é todavia tomado como conhecimento."

No tocante à Matemática, baseados na observação de Dewey, escrevem Romberg e Carpenter, no artigo já citado:

> "Para as escolas, as conseqüências deste ponto de vista tradicional da matemática são que a matemática fica divorciada das ciências e das outras disciplinas, sendo depois separada em assuntos como aritmética, álgebra, geometria, trigonometria etc. Dentro de cada assunto, idéias são relacionadas, separadas e reformuladas numa ordem racional. Isto é seguido pela subdivisão de cada assunto em tópicos, cada tópico em estudos, cada estudo em lições e cada lição em fatos específicos e habilidades. Esta fragmentação da Matemática tem divorciado a matéria da realidade e da investigação. A característica essencial da Matemática tais como abstração, invenção, prova e aplicação é muitas vezes perdida."

Quanto à 2 —, ainda citando Dewey, Romberg e Carpenter comentam:

> "estudantes são tratados como peças de "aparelhos registradores" que armazenam informações isoladas de ação e utilidade."

Esses autores explicitam que o próprio professor está sujeito a currículos, programas, horários e livros-texto o que lhe tolhem a liberdade. Desta maneira, o trabalho do mestre não está relacionado com os conceitos do saber matemático a transmitir, nem tão pouco com a compreensão de *como* a aprendizagem ocorre. Neste sentido vale transcrever aqui as palavras com as quais Georges Glaeser começou sua conferência na Reunião Anual dos Professores de Matemática da França (1981) cujo tema central era: "Mathématiques, science expérimentale?"

> "ENSINAMOS EM PLENA NEBLINA!
>
> Não dispomos de meios eficientes para saber o que será fácil ou difícil para o aluno.
>
> . . . Como é possível que meus alunos não tenham compreendido minhas explicações. Elas foram tão claras, o assunto era tão fácil!
>
> . . . Mas, na realidade, ignoramos quase todos os mecanismos que provocam a compreensão ou a incompreensão de um certo assunto."

Propõe a criação de uma Didática Experimental da Matemática para a compreensão de tais mecanismos, ao afirmar:

> "A didática experimental aparece quando encontramos meios científicos de atuação no debate pedagógico."

para concluir:

> "Como a didática experimental pretende investigar os mecanismos da compreensão, por conseguinte, o *"como ensinar"* da didática tradicional deve ser precedido pelo *"como se dá o aprendizado."*

Com as mudanças estruturais da sociedade após a 2ª Grande Guerra (1939-45) a reconstrução do mundo se impunha. A preocupação com a Educação estava muito presente. Era preciso definir um sistema educacional que pudesse atingir o maior número possível de pessoas, tornando-as aptas ao processo de reconstrução que se empreendia. Uma das pedras de toque para alcançar os vertiginosos avanços tecnológicos neste mundo novo era a Educação Matemática.

Antes mesmo do fim da guerra foi redigido, em 1944, um projeto pela Comissão Internacional pela Aplicação de Métodos Ativos no Ensino, chamado Projeto d'Alger, cujo objetivo era o desenvolvimento de pesquisa em nível internacional. Também em 1944 foi publicado na Inglaterra o Relatório Jeffrey sobre o ensino pós-primário onde a fusão da Geometria, Álgebra e Aritmética foi proposta numa disciplina única — a Matemática voltada para a vida e a experiência do aluno.

O Centro Internacional de Pedagogia foi fundado em 1945 por Mme. Hatinguais em Sèvres para receber como estagiários professores de várias nacionalidades. A Professora Anna Averbuch, uma das fundadoras do GEPEM, foi um desses professores.

> "Confrontar os *problemas eternos da pedagogia* (compreender a mentalidade das crianças e a dos alunos em via de desenvolvimento — suscitar a criatividade — evitar o dogmatismo — utilizar uma linguagem apropriada — ensinar certas técnicas — avaliar os resultados do ensino etc.) e os *novos problemas* provenientes da evolução das ciências, especialmente matemáticas, tal a revolução sofrida na concepção matemática pelo reconhecimento, no começo deste século, das estruturas lógico-matemáticas e sua relação com as estruturas mentais do homem. O problema do ensino deve, então, ser repensado em todos os níveis."

Testemunho de Lucienne Felix, um dos membros do Grupo que respondendo ao apelo de Caleb Gattegno, se reuniu em Debden (Inglaterra,

1950) e Keerbergen (Bélgica, 1951) para discutir e tentar dar uma solução para este problema.

A solução encontrada foi criar, em 1952, a CIEAEM (Comissão Internacional para o Estudo e o Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática) da qual participaram, entre outros, Choquet (Primeiro Presidente), Dieudonné, Mlle. Felix, Gonseth, Krygowska, Piaget, Servais, Lichnerowicz. As reuniões da Comissão não eram nem congresso, nem simpósio, nem estágio, mas, sobretudo um *seminário* pois questões eram colocadas, as trocas estimuladas, problemas equacionados, soluções procuradas com participação de cientistas, professores de todos os níveis, matemáticos, lógicos, pedagogos, filósofos, psicólogos.

É interessante que esta comissão continue a ter reuniões anuais e a próxima será de 23 a 30 de julho na Polônia em homenagem à Krygowska.

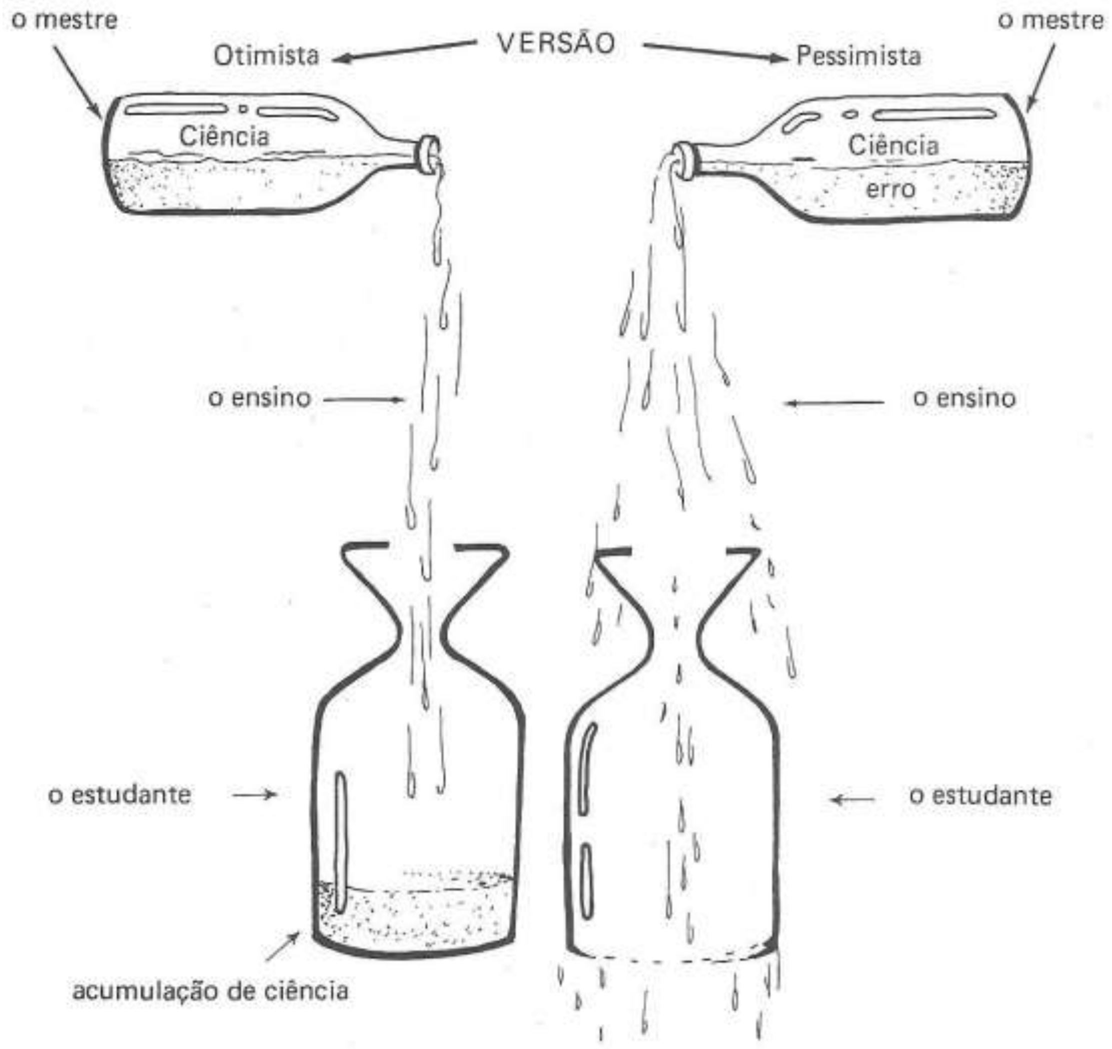
O ICM — Comitê Internacional de Matemáticos — reunido em 1952 procurou recriar o Comitê Internacional para a Instrução Matemática — ICMI, que ficou desvinculado do Comitê dos Matemáticos.

Em 1955 o ICMI foi reestruturado e quem deu a definição do seu trabalho foi o nosso bem conhecido Prof. Hans Freudenthal. Qual foi o grande problema desse Comitê? A supremacia dos matemáticos que, sem a experiência de sala de aula em nível de 1º e 2º graus começaram a ditar aquilo que deveria ser feito nos programas. A década de 50 foi fértil em acontecimentos. Em 52, recriação do ICMI e a criação da CIEAEM. Em 55, criação da Associação de Professores de Matemática da Inglaterra. Em 57, a implantação dos projetos Madson, nos Estados Unidos, muito influenciado pelos ideais de Brüner, o projeto da Universidade de Maryland, muito influenciado por Gagnet e a ênfase nos currículos. Em 58, a formação do célebre SMCG, com uma ênfase muito grande na parte de conjuntos. Em 57 houve o lançamento do Sputnik e o pânico americano em temer estar perdendo a supremacia tecnológica determinou a corrida para a modificação dos programas, com a introdução da chamada Matemática Moderna nos Estados Unidos. Em 59, na Universidade de Illinois, foi constituído um grupo que se preocupava com o fato dos alunos chegarem despreparados à Universidade.

Mas houve um fato muito importante neste ano de 59. Foi a reunião de Royamont na França e que foi organizada pela Organização de Cooperação do Desenvolvimento Econômico — OCDE — com a participação de 600 professores de 20 países. Esta reunião do Royamont foi considerada por muitos como a expansão da reforma da Matemática Moderna pelo menos nos citados 20 países. É muito célebre a frase de Dieudonné, que nesta reunião deu o grito "abaixo Euclides!" e nós até hoje sofremos as conseqüências daquele grito.

Todo este movimento ainda tinha como foco o conteúdo e o ensino. A figura abaixo mostra o esquema de Transmissão de Conhecimentos de uma maneira pictórica interessante.

ESQUEMA DE TRANSMISSÃO:



Tanto no CIEAEM como na reunião do Royamont havia grande concentração de ilustres professores universitários que do alto de seu saber formulavam programas para o Ensino de 1º e 2º graus sem real competência apesar de toda boa intenção.

Estes professores são chamados "pedagogos sem alunos" por Glaeser com forte dose de ironia.

Convém notar que, em 1962, setenta e cinco matemáticos americanos entre os quais Courant, Birkhoff, Coxeter, Polya e Kline protestavam em artigos no The Mathematics Teachers e no American Mathematical Monthly contra o domínio dos matemáticos na Reforma do Ensino porque pareciam mais preocupados em formar matemáticos profissionais do que fazer cursos de Matemática adequados ao aluno médio, objetivo maior de qualquer programa educacional.

Nos anos 60 há por toda parte a criação de grupos, implantação de projetos, elaboração de programas, edição de livros-texto . . . sempre com a preocupação de inovar o ensino da Matemática. O Brasil não ficou ausente deste movimento e foi criado, em São Paulo, o GEEM (Grupo de Estudos de Ensino de Matemática).

A agilização do ICMI, a partir de 1952, determinou que em 1966 fosse publicado, sob sua responsabilidade, o volume I das "Novas Tendências do Ensino da Matemática", contendo uma coleção de artigos apresentados em diversos congressos, pequenos resumos de congressos internacionais e detalhes de projetos curriculares. Os volumes II, III e IV são publicados, respectivamente, em 1970, 1973 e 1976, sob a responsabilidade do ICMI.

São fatos marcantes da década de 60:

1968 – Publicação do primeiro número da revista Educational Studies in Mathematics.

– Primeira experiência com linguagem LOGO por Papert numa escola de Lexington (EUA).

1969 – Realização, em Lyon (França) do Primeiro Congresso Internacional de Educação Matemática (I ICME).

– Criação dos quatro primeiros IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) na França.

Quando se tem em mente que os fundadores da CIEAEM (professores e pesquisadores eminentes)

> "pensavam que unindo seus esforços para aperfeiçoar o ensino, que reunindo suas competências, seu saber, suas experiências no ensino dos matemáticos, então seu trabalho sério de modernização da educação matemática seria mais eficaz e alcançaria a juventude do mundo."

segundo escreve Lucienne Felix, fica uma pergunta:

Por que tais ideais seguidos de esforços para a melhoria do ensino da Matemática desenvolvidos nos vários continentes não frutificaram plenamente?

A resposta parece ser esta:

> O problema central: a FORMAÇÃO DO PROFESSOR com apoio em pesquisa em ensino e aprendizagem matemática não ter sido conveniente atacado.

É preciso atentar para o que diz Gonseth (Professor da Escola Politécnica de Zurich):

> "A função do mestre ultrapassa o quadro restrito da transmissão de um conhecimento particular."

Para o quadro restrito da transmissão do saber matemático, segundo a via estruturalista, os professores não estavam preparados, como mostra o testemunho de Mme. Felix:

> "Um mestre de 1984 não pode de maneira alguma imaginar como tudo era novo para nós em 1950 mesmo se nós tivéssemos ouvido falar de um grupo de sábios se ocupando de "Matemáticas Modernas" fora do nosso alcance. Durante 30 anos, estive humilhada mas resignada em repetir as mesmas frases: "pode-se trocar a ordem dos termos, os grupos . . ."
> . . . Eu não tinha o gênio de resgatar a noção de estruturas e de exprimi-la"

ou ainda