Tem-se ainda: $0{,}890588 \times 2^3 = 7{,}124705$ e, finalmente:

$$\sqrt{0{,}0197} = \frac{1}{7{,}124705} = 0{,}140357$$

Exercício 7. Faça um programa de computador para calcular $\sqrt{M}$ com $p$ decimais exatas, segundo a alternativa II. Rode o programa para os seguintes valores de M: 2; 0,2; 20; 0,02; 123,45; 6789,01; 0,543; 384.666,2; 0,000191.

## 5. A diferença entre aproximações sucessivas

Durante a realização do processo aqui analisado, o erro cometido permanece desconhecido (embora controlado por cotas superiores, como vimos). No entanto, a diferença entre duas aproximações sucessivas é conhecida em cada passo. Seja então:

$$d_n = a_{n-1} - a_n$$

Exemplo 9. No exemplo 1 (confira!), temos:

$$\begin{aligned} d_1 &= a_0 - a_1 = 17{,}18460000 \\ d_2 &= a_1 - a_2 = 4{,}49957150 \\ d_3 &= 0{,}35750576 \\ d_4 &= 0{,}00228573 \\ d_5 &= 0{,}00000009 \end{aligned}$$

Se você comparar estas diferenças com os respectivos erros $\epsilon_n = a_n - \sqrt{M}$, notará que sempre $\epsilon_n < d_n$. Vamos verificar que este fato é geral.

Em primeiro lugar:

$$d_n = a_{n-1} - a_n = (a_{n-1} - \sqrt{M}) - (a_n - \sqrt{M}) = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$$

Usando isto e a fórmula (3), vem:

$$d_n - \epsilon_n = \epsilon_{n-1} - 2\epsilon_n = \epsilon_{n-1} - \frac{\epsilon_{n-1}^2}{a_{n-1}} =$$

$$= \frac{\epsilon_{n-1}(a_{n-1} - \epsilon_{n-1})}{a_{n-1}} = \sqrt{M}\ \frac{\epsilon_{n-1}}{a_{n-1}}$$

Isto prova que $d_n - \epsilon_n > 0$ e portanto $\epsilon_n < d_n$. Logo, se $d_n$ não ultrapassar um certo valor, então o erro da n-ésima aproximação, com muito mais razão, estará limitado por este valor. Esta observação sugere um algoritmo bem simples para calcular $\sqrt{M}$ com $p$ decimais exatas (podemos chamá-lo de Alternativa III), a saber:

1 : Escolha $a_0 = (1 + M)/2$.

2 : Aplique o processo (2).

3 : Pare quando $a_{n-1} - a_n \leq 0{,}5.10^{-p}$.

Infelizmente, esta alternativa tem um grande inconveniente, quando se trata de utilizá-la em grande escala: o número de iterações é desconhecido de antemão e, conseqüentemente, é desconhecido o "custo" do processo.

Exercício 8. Faça um programa de computador para calcular $\sqrt{M}$ com $p$ decimais exatas, segundo a alternativa III. Faça o programa anotar o número de iterações utilizadas. Rode o programa para os seguintes valores de M: 2; 0,2; 20; 0,02; 123,45; 6789,01; 0,543; 384.666,2; 0,000191. Analise os resultados.

Exercício 9. Quando se calcula $\sqrt{M}$ numa máquina de mesa pelo processo (2) e resolve-se parar quando coincidirem as $p$ primeiras decimais de duas aproximações consecutivas, o que se pode garantir sobre o número de decimais exatas da última aproximação?

Exercício 10. Mostre que, se $M \geq 0{,}25$, então $\epsilon_n \leq 0{,}5 d_n$, a partir do ponto em que $\epsilon_{n-1} \leq 1$ (sugestão: utilize (7) e (8)). Isto melhora o resultado do exercício 9?

O professor José Paulo Q. Carneiro ministra aulas de Análise e Álgebra Linear como professor colaborador do Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula.

# ENSINANDO M.M.C. E M.D.C. DE DOIS NÚMEROS NATURAIS

*Lucia Arruda de A. Tinoco*
*Marién Martínez Gonçalves*
*PROJETO FUNDÃO – IM/UFRJ*
*GEPEM*

Um aspecto polêmico nas discussões a respeito dos programas para a 4ª e 5ª série do primeiro grau é a inclusão ou não dos tópicos: m.m.c. e m.d.c.

Muitos alunos, e mesmo professores, acreditam que, sem saber calcular o m.m.c e o m.d.c. de dois números, não é possível, por exemplo, comparar, adicionar ou simplificar frações.

Admitimos que certamente o conhecimento do m.m.c. ou do m.d.c. pode muitas vezes facilitar o trabalho operacional de alguns desses cálculos.

Entretanto, sem entrar no mérito da questão, chamamos atenção ao fato de que o ensino de todos esses assuntos depende apenas da construção bem feita dos conceitos de múltiplo e divisor de um número, e dos conceitos de múltiplo comum ou divisor comum de dois ou mais números.

Entre os argumentos utilizados pelos professores para a inclusão desses tópicos no programa, está o de que os alunos se interessam e até gostam dos exercícios utilizados para o aprendizado dos processos de cálculo do m.m.c. e do m.d.c. de dois números.

Questionamos, porém, o grau de compreensão de alguns desses processos. Os alunos até entendem o significado do m.m.c. ou do m.d.c. de dois números A e B quando calculados pela definição, ou seja:

a) m.m.c.: após determinar isoladamente o conjunto dos múltiplos não nulos de A e de B, procura-se o Menor Múltiplo Comum aos dois.

b) m.d.c.: após determinar isoladamente o conjunto dos divisores de A e de B, procura-se o Maior Divisor Comum aos dois.

Por outro lado, não manifestam nenhuma estranheza pelo fato de executarem, sem saber porque, os algoritmos da fatoração simultânea (para o m.m.c.) e o de Euclides (para o m.d.c.), pois, nessa faixa de idade, o simples fato de "calcular" os deixa satisfeitos.

O processo para o qual gostaríamos de chamar a atenção é o que permite calcular o m.m.c. e o m.d.c. de dois números a partir da observação das decomposições de cada um destes números em fatores primos.

Certamente, os alunos que gostam de matemática também utilizam com facilidade este processo. Porém, em algum momento, passam a questionar por que para calcular o m.m.c. (*menor* múltiplo comum), tomam-se os fatores comuns e não comuns, elevados aos *maiores* expoentes? Por que os *maiores* e não os *menores*? Sinal da falta de compreensão do processo! Talvez tenha havido apenas memorização.

Questionamento análogo surge em relação ao cálculo do m.d.c.

É interessante que, segundo depoimento de alguns professores, são poucos os alunos que levantam esse questionamento. Agrava a situação o fato de que, embora esse questionamento parta de bons alunos, as justificativas dos professores quando muito se limitam a levar o aluno a verificar que os resultados obtidos por esse processo coincidem com os obtidos pelos outros.

Na realidade, a dificuldade dos alunos reside em um problema conceitual básico: o conceito de divisibilidade.

Quando se ensina múltiplos e divisores, em geral, diz-se: "todo número terminado em 0 ou em 5 é múltiplo de (ou divisível por) 5"; ou ainda: "todo número cuja soma dos seus algarismos é 3 ou múltiplo de 3, é múltiplo de (ou divisível por) 3"; etc.

O aluno aprende a regra e a utiliza.

Assim sendo, quando se trata de verificar se um número M, decomposto em fatores primos, é divisível por um número N, também decomposto em fatores primos, o aluno recompõe os números e depois aplica alguma regra de divisibilidade por N.

Nessas condições, o aluno não consegue saber se $M = 2^3 \times 3^2 \times 5$ é divisível por $N = 10$, sem antes descobrir que $M = 360$. Assim, como podemos esperar que ele entenda que o maior divisor comum entre $M = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e $P = 2 \times 5^2$ é $2 \times 5$? Ou seja, o produto dos fatores comuns elevados aos *menores* expoentes. É realmente muito difícil!

Insistimos, em que o que realmente falta é o conceito de divisibilidade e não as regras de divisibilidade, embora estas possam ser úteis em outras ocasiões.

Para melhor justificar nossas observações, fizemos um trabalho de campo envolvendo 170 alunos (33 da 6ª série, 56 da 7ª, 31 da 2ª série do 2º grau, e 50 de um curso de formação de professores). Pedimos aos professores que aplicassem aos seus alunos um teste envolvendo divisibilidade com números fatorados ou não, e que chamassem a atenção deles para que todas as contas necessárias fossem feitas no próprio teste e que este não valia nota, era só uma pesquisa.

Os alunos, talvez entusiasmados pelos professores, fizeram o melhor possível. Porém, como mostram os resultados apresentados a seguir ficou confirmada a hipótese de que o conceito de divisibilidade não é dominado.

| ORIGEM DOS ALUNOS | TOTAL | Q :1,2 | | Q :3,4 | | Q :5 | | Q :8 | | Q :9–a | | Q :9–b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NUM | % | NUM | % | NUM | % | NUM | % | NUM | % | NUM | % |
| 6ª série – 1º grau | 33 | 32 | 97 | 25 | 75 | 33 | 100 | 30 | 91 | 33 | 100 | 32 | 99 |
| 7ª série – 1º grau | 56 | 51 | 91 | 25 | 44 | 34 | 61 | 33 | 59 | 42 | 75 | 43 | 77 |
| 2ª série – 2º grau | 31 | 31 | 100 | 25 | 80 | 23 | 74 | 9 | 29 | 5 | 16 | 4 | 13 |
| Form. de Professores | 50 | 50 | 100 | 27 | 54 | 44 | 88 | 38 | 76 | 45 | 90 | 45 | 90 |
| TOTAL | 170 | 164 | 96 | 102 | 60 | 134 | 78 | 110 | 65 | 125 | 74 | 124 | 73 |

Análise da Tabela:

# Os resultados de Q : 1,2 e de Q : 3,4 indicam respectivamente o número de alunos que acertaram as questões 1 e 2, 3 e 4; já os resultados apresentados em Q : 5, Q : 8, Q : 9–a e Q : 9–b indicam o total de alunos que primeiro multiplicou para depois tentar resolver o exercício.

.. a questão 1 pedia um exemplo de um número divisível por 2 e, a questão 2 pedia um divisível por 3. Pudemos observar que o acerto foi muito grande (96%). Já nas questões 3 e 4 que exigiam critérios de divisibilidade por 6 e por 10, o desempenho dos alunos da 7ª série e do Curso de Formação de Professores (CFP) foi bem mais baixo. O fato de alguns desses alunos assinalarem "402" como divisível por 10, sugere a falta de compreensão da respectiva regra.

.. a questão 5 pedia para verificar se o número 2x3x5 era divisível por 3, por 5 e por 10. A grande maioria (78%) achou necessário efetuar primeiro o produto, 9% tentou fazer sem efetuá-lo e, os 13% restantes deixaram em branco. É interessante observar que muitos dos alunos do CFP, para verificar a divisibilidade pedida, após recomporem o número, efetuaram a divisão pelo outro (2 ou 3 ou 10) em vez de aplicarem os critérios de divisibilidade.

Vejamos algumas das respostas dos alunos do CFP:

— *"É divisível, pois se dividirmos 30 por 3 a resposta é 10 e não sobra resto."*
— *"É divisível, ao dividirmos 30 por 10 a conta dá exata."*
— *"É divisível, mas deixa resto."*
— *"Não dá para dividir."*

.. na questão 8 em que se pedia por quanto deveríamos multiplicar $A = 2 \times 3^2 \times 5$ para obtermos $B = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ o mesmo tipo de procedimento foi verificado.

Ex.: "$A = 2 \times 9 \times 5 = 90$   $B = 4 \times 9 \times 25 = 900$, tem que multiplicar A por 10."

.. a questão 9–a pedia para simplificar a fração: $(2^3 \times 3^2)/(2^2 \times 3)$ e a questão 9–b a fração: $(3^2 \times 5)/(2^2 \times 3)$. Pudemos observar que a maioria (74%), multiplicou antes de simplificar. Somente 34 alunos (20%) não efetuou os produtos do numerador e do denominador para depois simplificar e, dentre eles, apenas 3 erraram. Os tipos de erros cometidos por esses alunos mostram total desconhecimento do significado dos números; eles simplesmente "cortam" algarismos.

Ex.: $\dfrac{2^3 \times 3^2}{2^2 \times 3} = 2 \times 3 = 6$

Entre os 106 alunos dos CFP e da 7ª série do 1º grau, observamos que 87 alunos (82%), multiplicaram antes de simplificar e que 23 (54%) da 7ª série abandonaram os cálculos antes de simplificar. Já os do CFP, para simplificar, tentaram efetuar a divisão e assim obtiveram sucesso na questão 9–a (82% acertaram) e não na questão 9–b (53% acertaram). Supõe-se que tal dificuldade deve-se ao fato de que a divisão na questão 9–a era exata e na 9–b não.

Constatamos também que dos 24 alunos do 2º grau Formação Geral, que não multiplicaram para efetuar a simplificação, 21 têm idade regular para esse nível o que indica a importância da adequação entre a idade cronológica e a escolaridade do aluno. Observamos ainda que esses alunos do 2º grau FG simplificaram as frações com os números fatorados, porém, efetuaram o produto para testar a divisibilidade (questões 5 e 8). Isto sugere que eles dominam melhor as regras que o conceito. E, o fato deles terem simplificado pode ter sido conseqüência do aprendizado do cálculo algébrico. Julgamos então possível a um professor, que esteja trabalhando o cálculo algébrico detectar tais falhas conceituais e tentar saná-las nesse momento.

Acreditando que os problemas apontados não são específicos da amostra do nosso trabalho, sugerimos aos leitores, que peçam aos seus alunos que já tenham trabalhado com m.m.c. e m.d.c., para verificarem se: "$M = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ é divisível por $N = 2^2 \times 3^3 \times 5$"; ou ainda para responderem "por quanto temos que multiplicar N para obter M?". A seguir devem analisar os processos utilizados por eles para resolver esses problemas (sem se importar com a resposta, só com o processo), observando se eles utilizam o que aprenderam sobre potências, ou se elevam cada fator primo ao seu expoente e só depois verificam a divisibilidade, ou ainda, se efetuam todos os produtos necessários para compor os números e só então verificam a divisibilidade.

Certamente, se seus alunos não são capazes de concluir fatos sobre multiplicidade e divisibilidade de números decompostos em fatores primos, é importante dar uma parada e trabalhar este assunto. O tempo dispendido aí será amplamente compensado adiante.

# O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO EM GEOMETRIA

*Lilian Nasser*
*Instituto de Matemática — UFRJ*
*GEPEM*

Nós, professores de Matemática do curso secundário sempre observamos que a maioria dos alunos apresentam dificuldades em Geometria, comparando com outros temas. Mesmo alguns alunos que compreendem a Álgebra muito bem podem apresentar dificuldades em dominar a Geometria. Destacam-se as dificuldades no processo dedutivo e em demonstrações. Wirszup (1976) investigou a seguinte questão:

> "Por que será que tantos estudantes que dominam a maioria dos assuntos escolares não chegam a lugar nenhum em Geometria?"

Até hoje, a mais razoável explicação para este problema foi dada pelo "Modelo de van Hiele para o pensamento em Geometria", o qual sugere que os alunos progridem através de uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos enquanto eles aprendem Geometria.

Um ponto positivo desta Teoria é o fato de ter se originado em sala de aula, quando os professores holandeses Pierre e Dina van Hiele observaram as dificuldades de seus alunos ao resolver tarefas em Geometria. Dedicaram seus estudos de doutorado a esse problema, concluídos em 1957 pela Universidade de Utretch. Eles focaram seus trabalhos nos diversos níveis de pensamento em Geometria, e no papel do "insight" ou compreensão na aprendizagem de Geometria. O fato do trabalho ser na língua holandesa dificultou a divulgação do modelo. Em 1957, Pierre van Hiele apresentou o artigo "O pensamento da criança e a Geometria" num Congresso de Educação Matemática na França, atraindo a atenção de pesquisadores soviéticos e americanos. Apesar disso, este artigo só foi publicado (em francês) dois anos depois.

Van Hiele descreveu seus níveis como:

> "Certos passos no processo de aprendizagem, mas por outro lado há muitos outros passos que não são relacionados a estes níveis de pensamento. Estes passos resultam do método de ensino usado."

**Os Níveis de van Hiele:**

**Nível básico:**
*Reconhecimento* – o aluno reconhece as figuras geométricas por sua aparência global, mas não identifica explicitamente suas propriedades.

Ex.: o aluno identifica a figura de um quadrado, e ao ser perguntado por que, a resposta é do tipo: "porque se parece com um quadrado"

**Nível 1:**
*Análise* – o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si.

Ex.: o aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

**Nível 2:**
*Ordenação* – o aluno relaciona as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não domina o processo dedutivo.

Ex.: o aluno sabe que todo quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo.

**Nível 3:**
*Dedução* – o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, as condições necessária e suficiente, mas não sente necessidade de usar rigor matemático.

Ex.: o aluno entende porque o postulado das paralelas implica que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º.

**Nível 4:**
*Rigor* – o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações, e é capaz de analisar outras geometrias.

O próprio P. van Hiele, assim como vários pesquisadores que trabalharam com este modelo, concordam que é praticamente impossível atingir o nível 4 no curso secundário (ou no 1º grau).

As principais características do modelo de van Hiele para o pensamento em Geometria são:

(a) *Hierarquia:* os níveis obedecem a uma seqüência, isto é, para atingir certo nível o indivíduo deve passar antes pelos níveis inferiores;

(b) *Lingüística:* cada nível tem sua própria linguagem, conjunto de símbolos e sistema de relações. Por exemplo, no nível básico, o aluno se refere a ângulos de mesma medida como "iguais" e, no nível dois, como "congruentes".

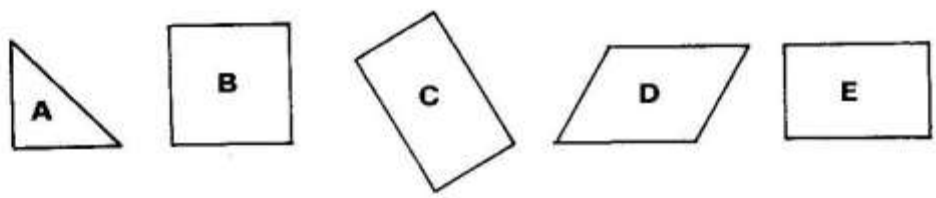
(c) *Intrínseco e Extrínseco:* o que está implícito num nível torna-se explícito no próximo nível.

(d) *Avanço:* o progresso entre os níveis depende mais de instrução do que da idade ou maturidade do aluno.

(e) *Desnível:* não há entendimento entre duas pessoas que estão raciocinando em níveis diferentes ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno.

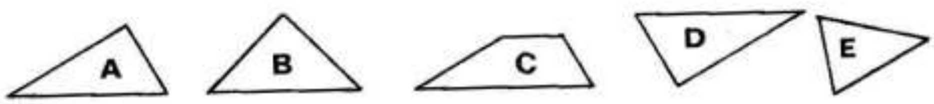
Exemplos de respostas dadas por alunos em diversos níveis de van Hiele:

1) Quais destas figuras são retângulos?




| | | |
|---|---|---|
| **Aluno X:** | E | (nível básico) |
| **Aluno Y:** | C e E | (nível 1) |
| **Aluno Z:** | B, C e E | (nível 2) |

2) Assinale a(s) figura(s) com a mesma forma e o mesmo tamanho que A:




**Aluno X:** B e D, porque se "parecem" com A (nível básico)
**Aluno Y:** Apenas D, porque "tem as mesmas medidas de A" (nível 1)

3) Propriedades dos quadrados:

**Aluno X:** (nível 1)

- têm 4 lados
- todos os lados são congruentes
- têm 4 ângulos
- todos os ângulos são retos
- os lados opostos são paralelos
- os lados opostos são iguais

**Aluno Y:** (nível 2)

- têm 4 lados congruentes
- têm 4 ângulos retos

4) Soma dos ângulos internos de um triângulo:

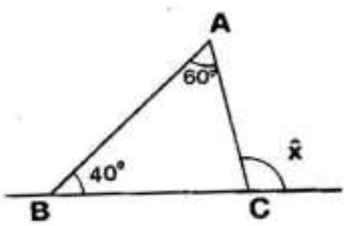
**Aluno A:** "enxerga" através de recorte ou dobraduras (nível 1)

**Aluno B:** compreende usando uma grade triangular, sem justificar ou generalizar (nível 1)

**Aluno C:** usa as propriedades dos ângulos alternos internos para justificar e generalizar (nível 2)

**Aluno D:** escreve uma demonstração informal (nível 3)

5) Determine o valor do ângulo $\hat{x}$ :



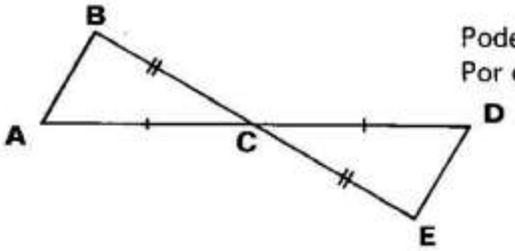
**Aluno A:** $\hat{C} = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$
$\hat{X} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (nível 1)

**Aluno B:** usa a propriedade de que o ângulo externo é a soma dos ângulos internos não adjacentes e calcula:

$\hat{X} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ (nível 2)

**Aluno C:** mostra que se $\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ e} \\ \hat{X} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases}$

então $\hat{X} = \hat{A} + \hat{B}$ e calcula: $\hat{X} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$
(nível 3)

6) 


Pode-se concluir que AB = DE? Por que?

**Aluno A:** Sim, porque os triângulos têm a mesma forma (nível básico)

**Aluno B:** Sim, porque os lados têm as mesmas medidas (nível 1)

**Aluno C:** Sim, porque os triângulos são congruentes, por

LAL $\Rightarrow$ AB = DE (nível 2)

**Aluno D:** Sim, pois temos: BC = CE (dados no problema)
AC = CD (dados no problema)
$\widehat{ACB} = \widehat{DCE}$ (opostos pelo vértice)

Logo, por LAL, os triângulos ABC e DEC são congruentes
$\Rightarrow$ AB = DE (nível 3)

Van Hiele estabeleceu 5 fases que devem ser vivenciadas pelos estudantes no processo de progredir de um nível para o próximo. Estas fases devem ser favorecidas e/ou encorajadas pelo professor.

Para progredir de um nível para o imediatamente superior, o aluno deve vivenciar 5 fases:

— *Informação:* professor e alunos envolvem-se em conversas e atividades sobre os objetos de estudo deste nível. Observações são feitas, perguntas são formuladas, e o vocabulário específico do nível é introduzido.

— *Orientação dirigida:* os estudantes exploram o tópico de estudo através de materiais que o professor ordenou cuidadosamente. Estas atividades devem revelar gradativamente aos alunos as estruturas características do nível.

— *Explicação:* acrescentando sobre suas experiências prévias, os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas. O papel do professor é mínimo: apenas auxiliar os alunos a usar a linguagem apropriada.

— *Orientação livre:* os alunos procuram soluções próprias para tarefas mais complicadas, que admitem várias soluções, e para problemas em aberto.

— *Integração:* o aluno revê e resume o que aprendeu, com o objetivo de formar uma visão geral do novo sistema de objetos e relações.

Com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens e até simultaneamente.

A tese de Dina van Hiele-Geldof consiste de um experimento didático detalhado levando uma turma a progredir de um nível para o seguinte. Apresenta o protocolo de 20 aulas levando a turma do nível básico para o nível 1. Do nível 1 para o nível 2, afirma que são necessárias 50 aulas. Nos Estados Unidos, Usiskin afirma que cerca da metade dos alunos iniciam o ano de Geometria nos níveis básico ou 1 e cerca de um terço deles termina o ano no mesmo nível.

Implicações da Teoria de van Hiele para o ensino:

(a) Os alunos passam pelos níveis em ordem consecutiva, mas não no mesmo ritmo. É possível encontrar na mesma turma alunos em diversos níveis;

(b) Em cada sala de aula deve-se tentar ter o professor, os alunos e o livro-texto funcionando no mesmo nível;

(c) O aluno que chegar à 7ª série nos níveis básicos ou 1 tem pouca chance de dominar as demonstrações até o final do ano letivo;

(d) O curso de Geometria Euclideana é dado no nível 3; o aluno típico inicia o curso no nível 1, daí as dificuldades encontradas;

(e) O nível 2 é intermediário entre a Geometria informal ou experimental e a Geometria formal (dedutiva);

(f) É muito difícil atingir o nível 4 no curso secundário. Logo, o professor não deve esperar que seus alunos escrevam provas rigorosas, nem que eles entendam outras Geometrias.

**Observação:**

Este artigo resulta de trabalhos de pesquisa realizados pela autora, com base em trabalhos de van Hiele.

Extensa bibliografia existe sobre o assunto. Ela pode ser fornecida mediante pedido ao GEPEM.

## CURSO SOBRE MATERIAL DOURADO

*Nicola Siani*
*USU*

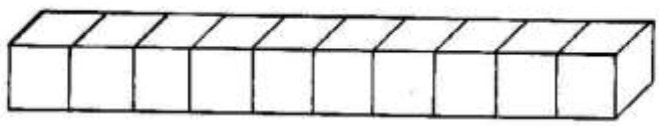
Este trabalho foi objeto de um curso de aperfeiçoamento para as professoras de 1ª à 4ª séries do 1º grau do Colégio Santo Inácio. Dedico-o ao saudoso Professor José Carlos de Mello e Souza, meu mestre no curso de graduação, onde se destacava não só pelo profundo conhecimento da Matemática, mas também pela formidável pessoa humana que era e que muito me incentivou.

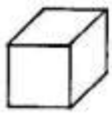
**1) Manipulação livre do material**

Aqui o aluno manipula o material livremente, fazendo construções, armando trens, etc. É o primeiro contato com o material.

**2) Dar nomes às peças.**[1]

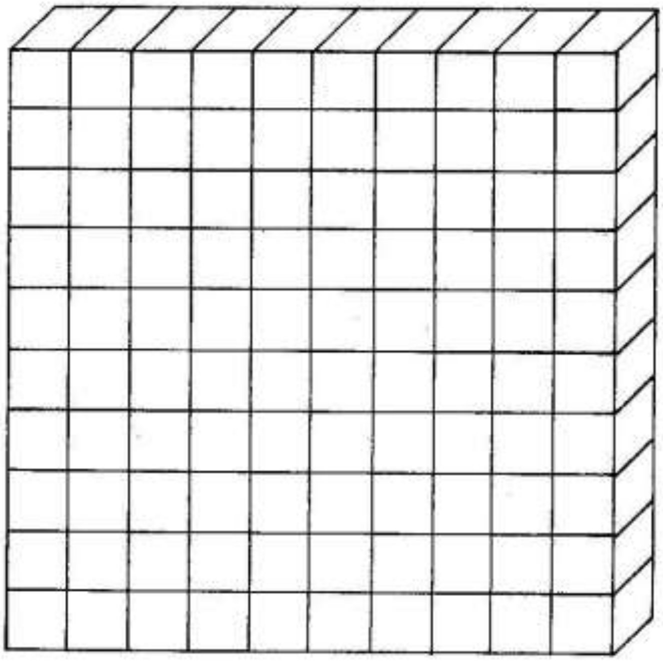
Geralmente as crianças chamam a peça desenhada abaixo de *"comprido"* ou *palito*.



A peça  é chamada de *cubinho*.

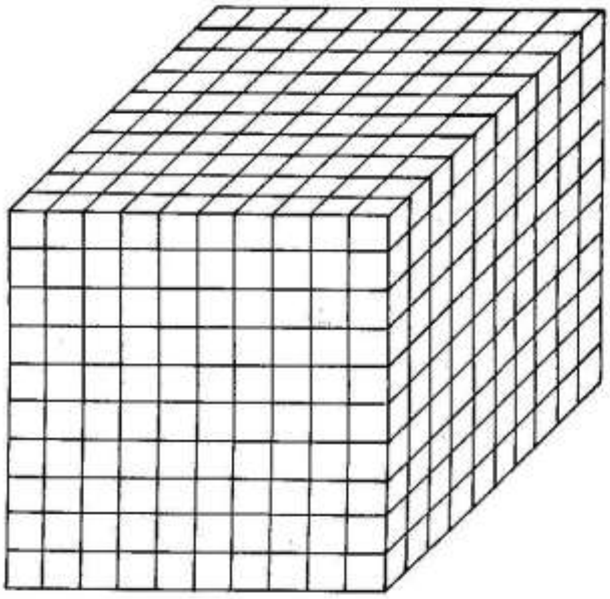
[1] Estes nomes são sugestões, os alunos podem sugerir outros nomes.

A peça



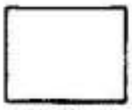
é chamada de *placa*.

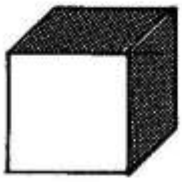
E a peça abaixo



é chamada de *cubão*.

3) **Sinais para representar as peças(*)**

Para representar um cubinho, podemos usar o sinal  , para representar um palito, podemos usar o sinal  , para representar uma placa, o sinal  e para representar um um cubão, o sinal  . Você deve ter esses sinais desenhados em cartões.

É claro que mais tarde podemos substituir o sinal  por *C*, o sinal  por *pa*, o sinal  por *Pℓ* e o sinal  por *G*.

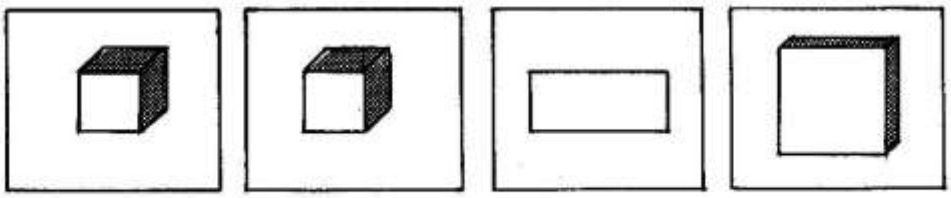
(*) *Observação:* Estes sinais são sugestões, é claro que os alunos podem sugerir outros.

**JOGO I:**

a) MATERIAL: Cartão com os sinais que representam as peças do material dourado.

OBJETIVO: Identificar as peças do material dourado através dos sinais adotados.

- Colocar na mesa vários cartões, por exemplo:



O aluno deve pegar as peças do material dourado correspondente a estes cartões.

- Repetir o jogo com outros cartões.

b) MATERIAL e OBJETIVO: Os mesmos que o jogo anterior.

- Colocar algumas peças do material dourado e o aluno deve representá-las através de sinais.

- Repetir o jogo com outras peças.

4) **A relação existente entre as peças do material dourado**

Neste item o aluno deve descobrir a estrutura do material dourado. Através de situações apresentadas, o aluno deve concluir que 10 cubinhos formam um palito, dez palitos formam uma placa, 10 placas formam um cubão, 100 cubinhos formam uma placa e assim sucessivamente.

**JOGO II:**

MATERIAL: Peças do material dourado.
OBJETIVO: Entender que um palito é formado por dez cubinhos.

- Coloque sobre a mesa 3 cubinhos de um lado e, do outro lado, 1 palito.

**Perguntas:**

1) Onde há mais cubinhos, no palito ou no monte de cubinhos? Justifique a resposta.

2) Coloque 4 cubinhos junto dos 3 cubinhos que havia sobre a mesa anteriormente e faça a pergunta anterior. Justifique a resposta.

3) No monte de cubinhos, agora, há 7 cubinhos, coloque 3 cubinhos e faça a mesma pergunta feita anteriormente. Justifique a resposta.

4) Quantos cubinhos são necessários para formar um palito?

5) Coloque sobre a mesa um palito. Pergunte a um dos alunos se é possível retirar dali 4 cubinhos e como proceder.

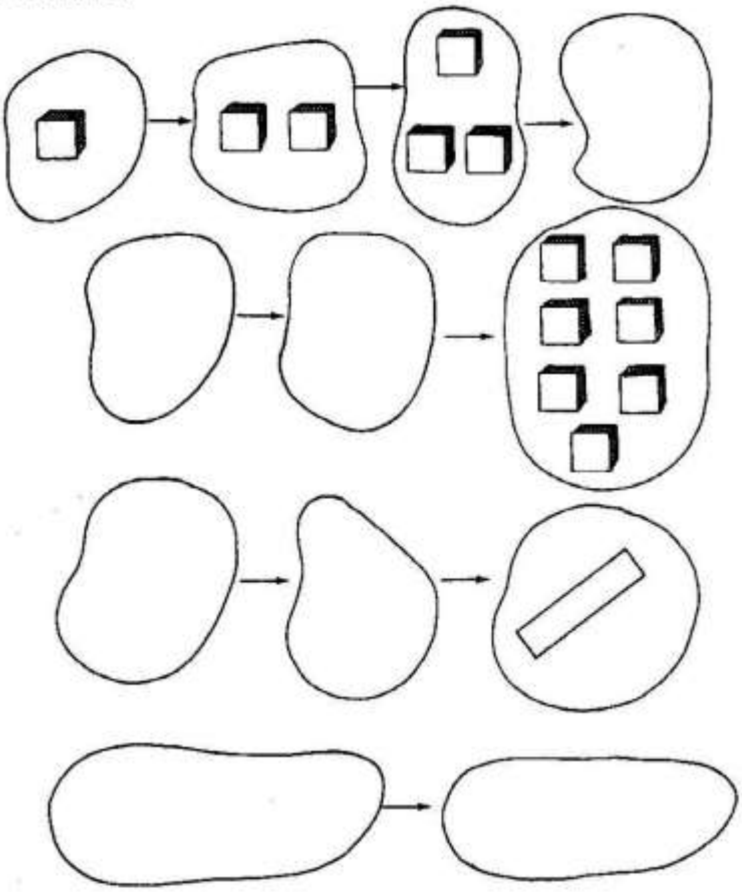
**Problemas:**

1) Maria tem 7 cubinhos, ganhou 5 cubinhos de seu irmão, com quantos cubinhos e quantos palitos Maria ficou?

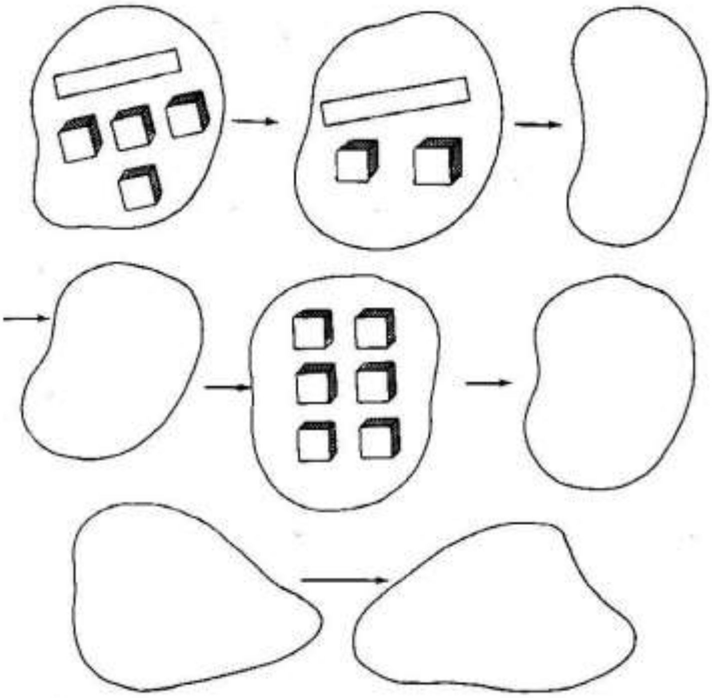
2) Margarida tem 1 palito e 3 cubinhos, deu 6 cubinhos para Antonio. Com quantos cubinhos e quantos palitos Margarida ficou?

3) Marcos tem 4 palitos e 7 cubinhos, Carlos tem 5 palitos e 2 cubinhos. Quem tem mais cubinhos? Justifique sua resposta.

4) Complete a seqüência abaixo, colocando cubinhos ou palitos que estão faltando:



5) Complete a seqüência abaixo, colocando cubinhos ou palitos que estão faltando:



6) Quantos cubinhos há em 3 palitos e 6 cubinhos?

7) Numa caixa há 78 cubinhos. Quantos palitos há na caixa? Retirando todos os palitos da caixa, quantos cubinhos ficaram?

8) Numa caixa A há 3 palitos e 7 cubinhos, numa caixa B há 2 palitos e 8 cubinhos. Juntando-se em uma caixa C as peças de A e B, quantos palitos obteremos na caixa C?
Utilize a tabela abaixo para dar a resposta.

| QUANTIDADE | PALITOS | CUBÍNHOS |
|---|---|---|
| caixa A | | |
| caixa B | | |
| caixa C | | |

9) Coloque sobre a mesa 47 cubinhos. Quantos palitos e quantos cubinhos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

10) Coloque sobre a mesa 38 cubinhos. Quantos palitos e quantos cubinhos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

11) **Agora, responda sem usar o material dourado.** Quantos palitos há em 89 cubinhos?

12) Eu tenho 8 palitos. Quantos cubinhos estes palitos representam?

13) **Faça sem usar o material dourado.** Possuo 73 cubinhos, coloque esta informação no quadro abaixo.

| Nº DE PALITOS | Nº DE CUBINHOS SOLTOS |
|---|---|
| | |

14) Mauro possui 47 cubinhos, ganhou 35 cubinhos de Carla, com quantos palitos e cubinhos soltos Mauro ficou?

**Use o quadro:**

| | PALITOS | CUBINHOS SOLTOS |
|---|---|---|
| Mauro possui | | |
| Mauro ganhou de Carla | | |
| Total que Mauro ficou | | |

15) Arme e efetue as seguintes contas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) 3 pa | 5 c | + | 6 c | 4 pa | = |
| ↑ | ↑ | | ↑ | ↑ | |
| 3 palitos | 5 cubinhos | | 6 cubinhos | 4 palitos | |

**Observação:**

*pa* → palito
*c* → cubinho
sinais sugeridos no início da apostila (3º item)

**Use o quadro**

| TIPOS DE PEÇAS | pa | c |
|---|---|---|
| 1ª parcela | | |
| 2ª parcela | | |
| TOTAL: | | |

b) 2c 3pa + 9c 4pa =

c) 4pa + 3c + 3pa 9c =

16) Coloque sobre a mesa 6 palitos e 8 cubinhos. Retire 3 palitos e 5 cubinhos. Quantos palitos e cubinhos ficaram sobre a mesa?

17) Coloque sobre a mesa 4 palitos e 3 cubinhos. Retire 1 palito e 7 cubinhos. Quantos palitos e cubinhos ficaram sobre a mesa?

**Preencha o quadro:**

| | Quantidade de palitos | Quantidade de cubinhos |
|---|---|---|
| Peças sobre a mesa | | |
| Peças retiradas | | |
| Peças que restaram sobre a mesa | | |

18) Sobre uma mesa há 9 palitos e 6 cubinhos. Retire 9 cubinhos e 6 palitos. Quantos cubinhos e quantos palitos ficaram sobre a mesa?

19) Arme, efetue e dê o resultado das contas abaixo:

a) 8pa 7c – 6pa 3c =

b) 7pa 3c – 5pa 6c =

c) 6pa – 9c =

d) 8pa – 1pa 3c =

**JOGO III:**

MATERIAL: Peças do material dourado.
OBJETIVO: Entender que uma placa é formada por dez palitos.

Coloque sobre a mesa 3 palitos de um lado e, do outro lado, uma placa.

**Perguntas:**

1) Onde há mais palitos na placa ou no monte de palitos? Justifique sua resposta.

2) Coloque 4 palitos junto dos palitos que havia anteriormente sobre a mesa e faça a pergunta anterior. Justifique a resposta.

3) No monte de palitos, agora, há 7 palitos, coloque 3 palitos e faça a mesma pergunta feita anteriormente. Justifique a resposta.

4) Quantos palitos são necessários para formar uma placa?

5) Coloque sobre a mesa uma placa. Pergunte a um dos alunos se é possível retirar dali 3 palitos e como proceder.

**Problemas:**

1) Uma pessoa tem 8 palitos, ganhou 6 palitos de outra pessoa, com quantos palitos esta pessoa ficou?

2) Paulo tem 1 placa e 4 palitos, deu 6 palitos para Manoel. Com quantas placas e quantos palitos Paulo ficou?

3) Marta tem 2 placas e 3 palitos, Carlos tem 3 placas. Quem tem mais palitos? Justifique sua resposta.

4) Quantos palitos há em 3 placas e 2 palitos?

5) Numa caixa há 43 palitos. Quantas placas há na caixa? Retirando todas as placas da caixa, quantos palitos ficaram?

6) Numa caixa A há 4 placas e 4 palitos, numa caixa B há 3 placas e 9 pa-

litos. Juntando-se em uma caixa C as peças de A e B, quantas placas obteremos na caixa C? Quantos palitos soltos obteremos na caixa C?

Utilize a tabela abaixo para dar a resposta.

| QUANTIDADE DE: | PLACAS | PALITOS |
|---|---|---|
| Caixa A | | |
| Caixa B | | |
| Caixa C | | |

7) Coloque sobre a mesa 37 palitos. Quantas placas e quantos palitos soltos há sobre a mesa?

8) **Responda sem usar o material dourado.** Quantas placas há em 89 palitos?

9) Eu tenho 8 placas. Quantos palitos estas placas representam?

**JOGO IV:**

MATERIAL: Peças do material dourado.
OBJETIVO: Entender que uma placa é formada de 100 cubinhos.

*1ª Etapa:* Coloque sobre a mesa uma placa.
*2ª Etapa:* Substitua a placa por palitos.
*3ª Etapa:* Substitua cada palito por cubinhos.

*Conclusão:*

1 placa → 10 palitos → 100 cubinhos

substituída por 10 palitos — cada palito substituído por 10 cubinhos

Cada placa é composta de . . . . . . . . . . . . cubinhos.
(complete)

**Problemas:**

1) Coloque sobre a mesa 230 cubinhos. Quantas placas e quantos palitos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

2) Coloque sobre a mesa 207 cubinhos. Quantas placas e quantos cubinhos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

3) Separe 237 cubinhos. Agora complete a sentença abaixo corretamente.
As peças que separei correspondem a: ..... placas, ..... palitos e ........... cubinhos.

4) Numa caixa A há 3 placas, 4 palitos e 8 cubinhos, numa caixa B há 2 placas, 6 palitos e 6 cubinhos. Juntando-se em uma caixa C as peças de A e B, quantas placas obteremos na caixa C? Quantos palitos soltos obteremos na caixa C? Quantos cubinhos soltos obteremos na caixa C?

Utilize a tabela a seguir para dar a resposta.

| QUANTIDADE DE: | PLACAS | PALITOS | CUBINHOS |
|---|---|---|---|
| caixa A | | | |
| caixa B | | | |
| caixa C | | | |

5) Coloque sobre a mesa uma mão cheia de cubinhos. Converta estes cubinhos em palitos, placas e depois preencha a tabela abaixo:

| Nº de cubinhos soltos | Nº de palitos soltos | Número de placas |
|---|---|---|
| | | |

Agora, observe o resultado da tabela acima e diga quantos cubinhos havia na sua mão.

6) **Responda sem usar o material dourado.** Quantos palitos há em 233 cubinhos?

7) Eu tenho 3 placas e 2 palitos. Quantos cubinhos estas placas e palitos representam?

8) **Faça sem usar o material dourado.** Possuo 732 cubinhos, coloque esta informação no quadro abaixo.

| Número de placas | Nº de palitos soltos | Nº de cubinhos soltos |
|---|---|---|
| | | |

9) Márcia possui 372 cubinhos, ganhou 149 cubinhos de Paula, com quantas placas, palitos soltos e cubinhos soltos Márcia ficou?

**Use o quadro:**

| | Placas | Palitos soltos | Cubinhos soltos |
|---|---|---|---|
| Márcia possui | | | |
| Márcia ganhou de Paula | | | |
| Total que Márcia ficou | | | |

10) Sobre uma mesa colocou-se 5 placas, 6 palitos e 7 cubinhos. Retirou-se da mesa 8 cubinhos, 7 palitos e 2 placas. Quantas placas, palitos soltos e cubinhos soltos ficaram sobre a mesa. (Tente resolver usando somente o quadro abaixo).

| | Placas | Palitos soltos | Cubinhos soltos |
|---|---|---|---|
| Colocou-se sobre a mesa | | | |
| Retirou-se da mesa | | | |
| Ficaram sobre a mesa | | | |

Resposta:

11) Arme e efetue as seguintes contas:

a) 3Pℓ 2pa 3c + 2c 1pa 2Pℓ =

**Use o quadro a seguir:**

| Tipos de peças | Placas (Pℓ) | Palitos (pa) | Cubinhos (c) |
|---|---|---|---|
| 1ª parcela | | | |
| 2ª parcela | | | |
| TOTAL: | | | |

b) 3Pℓ 2c 3pa + 2c + 7pa =

c) 9c 9pa + 9c 8Pℓ 3pa =

d) 5Pℓ 3pa − 2Pℓ 2pa =

e) 7Pℓ 2pa 3c − 5Pℓ 2pa 4c =

f) 9Pℓ 3c − 2Pℓ 4pa 5c =