

- b) Complete a figura, construindo seu lado direito.
- c) Indique os pontos, à direita da reta, correspondentes a A, B, C, D, E, F e G, respectivamente, e chame-os de A', B', C', D', E', F' e G'.
- d) Meça com a régua os segmentos \overline{AM} e $\overline{MA'}$. O que você conclui a partir dessas medidas? _____
- e) Identifique outros pares de segmentos congruentes: _____
- f) Qual a posição dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$ e $\overline{FF'}$ em relação à reta r? _____
- g) Os pontos A, B, C, D, E, F e G estão, respectivamente, à mesma distância da reta r que os pontos A', B', C', D', E', F' e G' ? _____



Dizemos, então, que os pontos A e A', B e B', C e C', D e D', E e E', F e F' e G e G' são *simétricos* em relação à reta r.

- h) A figura à direita de r é uma transformada da figura à esquerda de r? _____
- i) Dobre a figura na reta r. As duas partes coincidem? _____



Simetria axial de eixo r é a transformação de pontos do plano em seus simétricos em relação à reta r.
A reta r é chamada *eixo de simetria*.

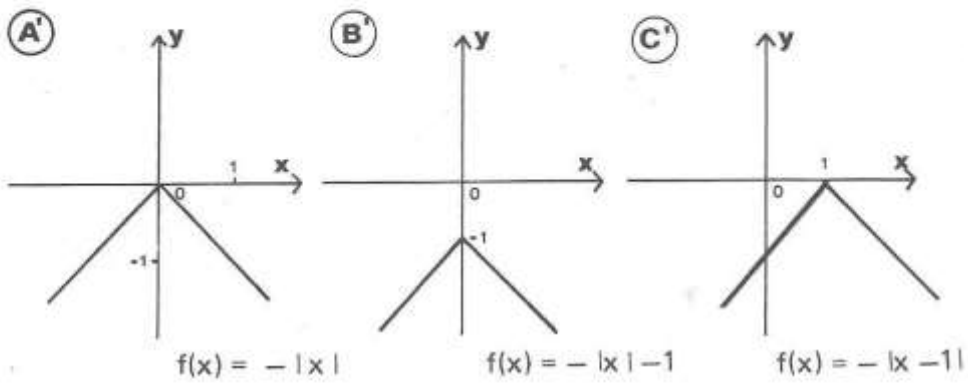
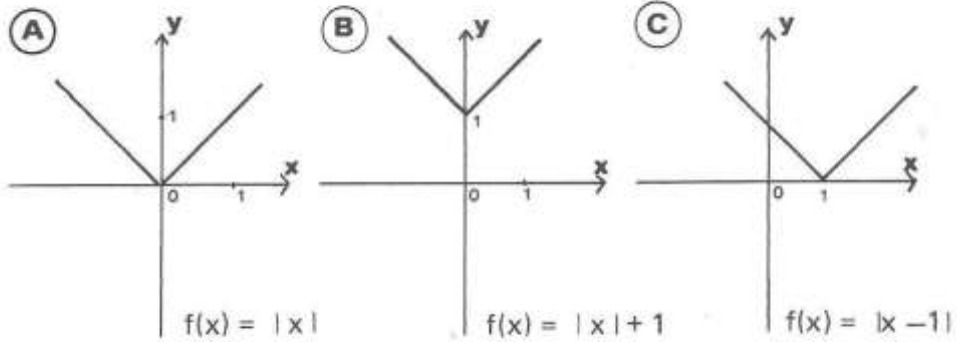
ATIVIDADE II

Nesta etapa o aluno já deve trabalhar organizadamente, mas ainda de forma elementar, com as noções adquiridas, transferir e aplicar estas noções a outros conteúdos.

Os conceitos de translação e/ou simetria estão freqüentemente presentes e auxiliam bastante no estudo de muitos itens, tais como:

- A congruência de figuras geométricas.
- A introdução do conceito de número inteiro.
- A construção e interpretação de gráficos de funções.

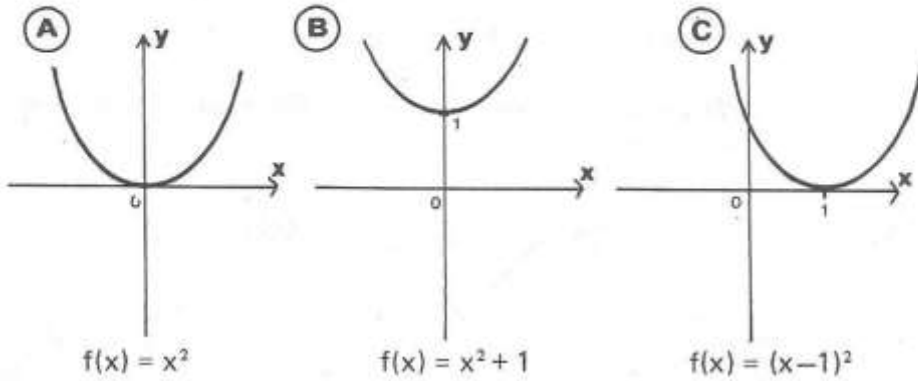
Ex.: a) Em cada par de gráficos abaixo, AA', BB' e CC', identifique a transformação:



Resposta:

AA' _____
 BB' _____
 CC' _____

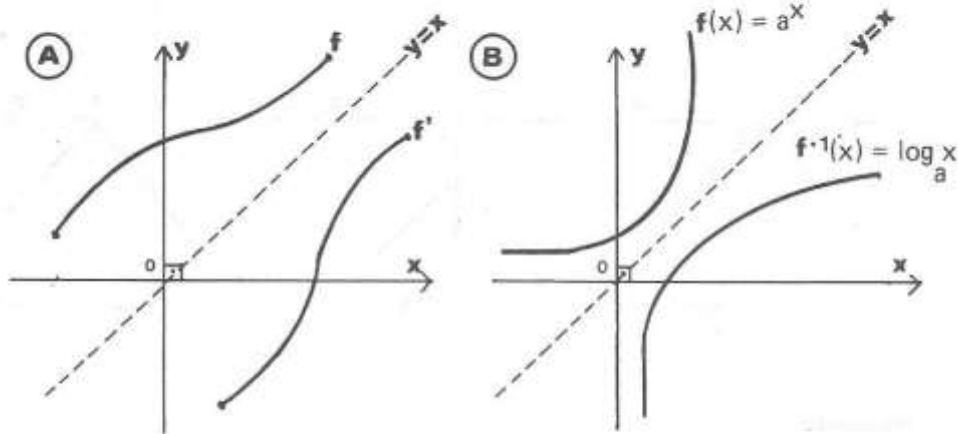
b) Quais as transformações sofridas pelos gráficos B e C em relação ao gráfico A?



Resposta:

B _____
C _____

c) Que transformação você identifica em A? E em B?



Resposta: _____

Resposta: _____

d) Determinar na reta r um ponto C tal que o percurso $AC + CB$ seja o menor possível.

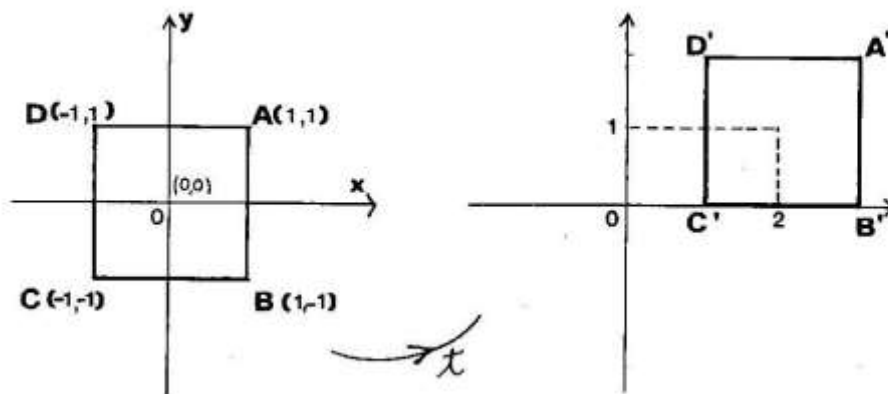


ATIVIDADE III

Nesta etapa, já no 2º grau, a translação e a simetria já podem ser gradativamente apresentadas na sua forma abstrata, como funções que transformam pontos do plano em pontos do plano. Este é o momento em que os conceitos e as propriedades características de cada transformação podem ser formalizados, de maneira natural, como consequência de todo o trabalho desenvolvido anteriormente, através de atividades tais como:

- Observar figuras e deduzir a lei da transformação efetuada bem como as suas propriedades.

Ex.: O quadrado $A'B'C'D'$ foi obtido por translação do quadrado $ABCD$. O seu centro O' tem coordenadas $(2,1)$. Determine as coordenadas dos vértices e a lei da transformação.



Resposta:

$A' (\quad), B' (\quad),$
 $C' (\quad), D' (\quad).$

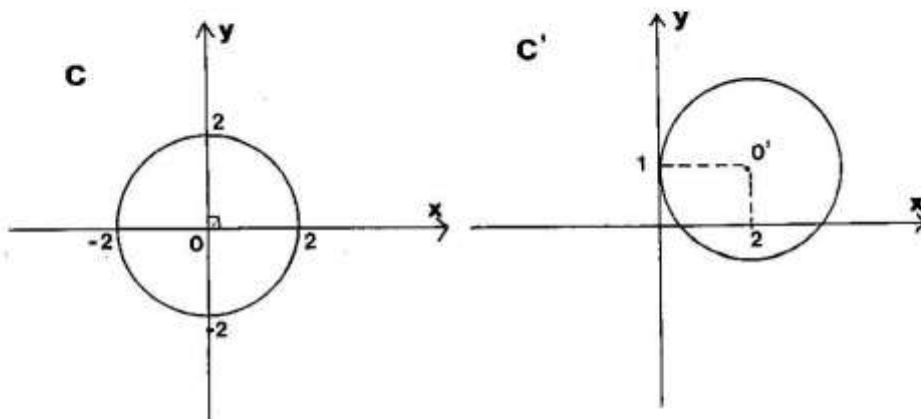
$f(x,y) =$

- Foram mantidas todas as características geométricas intrínsecas da figura original (ângulos, distâncias, áreas . . .) e tal propriedade é uma ISOMETRIA.
- Obter a equação da transformada a partir da lei da transformação.

Ex.: a) Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / (x, y) \mapsto (x + 2, y + 1)$ e

$C = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$. Escreva a equação de $f(C)$.

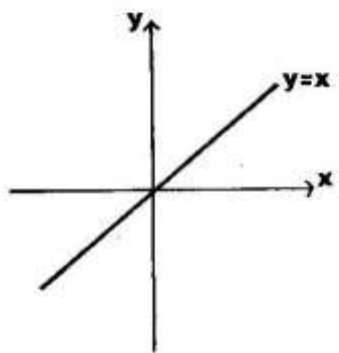
Resposta: _____



b) Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ e $a, b \in \mathbb{R}$
e a reta $r: y = x$

Temos: $y - b = x - a$

ou $y = x + \underbrace{b - a}_{k \in \mathbb{R}}$

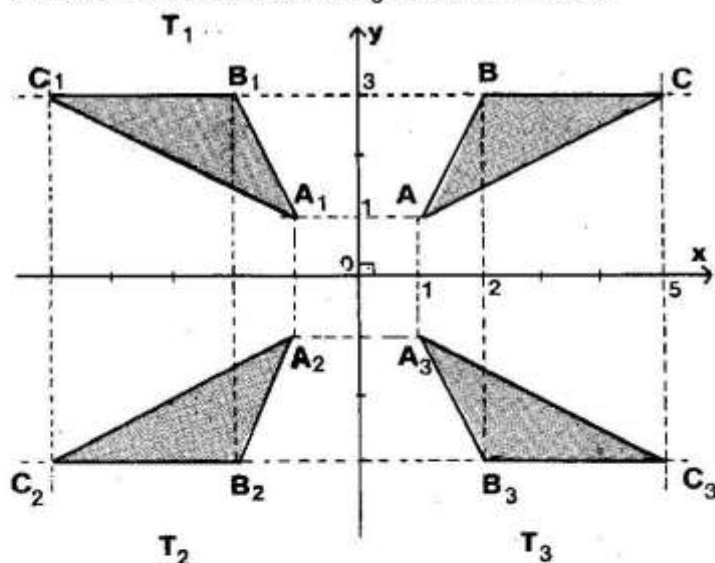


As transformadas da reta r formam uma "família" de retas $y = x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

- Como será constituída esta família? _____
- Indique no desenho alguns elementos desta família.

- Observar figuras e identificar simetrias centrais ou axiais, deduzindo as leis que as definem e destacando suas propriedades.

- c) Os triângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ foram obtidos por simetria do triângulo ABC , onde $A(1,1)$, $B(2,3)$ e $C(5,3)$. Identifique, em cada caso: o tipo da simetria, a lei que a define e as coordenadas dos vértices do triângulo transformado.



Resposta:

$$\begin{aligned}
 T_1: & \text{_____} & T_2: & \text{_____} \\
 T_1(x, y) = & \text{_____} & T_2(x, y) = & \text{_____} \\
 A_1(\quad), B_1(\quad) \text{ e } C_1(\quad) & & A_2(\quad), B_2(\quad) \text{ e } C_2(\quad) & \\
 T_3: & \text{_____} & & \\
 T_3(x, y) = & \text{_____} & & \\
 A_3(\quad), B_3(\quad) \text{ e } C_3(\quad) & & &
 \end{aligned}$$

- Identificar, quando possível, a matriz associada a uma transformação e expressá-la através de um produto matricial.

- d) Observe a figura do item C e escreva o produto matricial referente às transformações T_1 , T_2 e T_3 .

$$\begin{aligned}
 T_1: & \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \\
 T_2: & \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \\
 T_3: & \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Gostaríamos ainda de acrescentar que, ao longo das atividades desenvolvidas, as propriedades, as diferenças, as analogias entre as transformações estudadas devem ser verificadas e enfatizadas a cada passo. Assim, como culminância deste trabalho, já na 3ª série do 2º grau, os alunos devem ser capazes de identificar as transformações que mantêm as características geométricas das figuras — ângulos, distâncias, áreas . . . (ISOMETRIAS). Devem também observar que as translações não podem ser expressas como um produto matricial, ou seja, não são TRANSFORMAÇÕES LINEARES.

Esperamos que esta sucinta amostragem de nossa experiência sirva de incentivo aos nossos colegas. Com ela quisemos passar a idéia de um processo de aprendizagem progressiva preconizado pelo nosso saudoso e inesquecível mestre José Carlos de Mello e Souza; adotando-o e aplicando-o estamos certas de que já ajudamos muita gente a “flutuar com tranquilidade” e alguns até a “nadar com desenvoltura”.

Somos profundamente gratas ao nosso mestre e também aos nossos alunos e colegas que têm sido colaboradores importantes na nossa experiência. Continuamos aprendendo com eles e estamos abertas e receptivas às suas críticas e sugestões. O trabalho que cada um de nós realiza no dia-a-dia em sala de aula, deve ser sempre trocado e discutido pois ele é um agente transformador e enriquecedor na descoberta de novos caminhos para o ensino da Matemática.

AO NOSSO SAUDOSO MESTRE

José Carlos de Mello e Souza

Alunos da USU da última Turma por ele regida

Com o intuito de colaborarmos com esta pequena homenagem ao nosso saudoso mestre, nós, Carla Giovana da Silva e Claudia Loureiro, alunas da graduação em Matemática (atualmente no 6º período), tentaremos passar um pouco do pequeno convívio que tivemos com esta pessoa maravilhosa.

No 1º semestre do ano letivo de 1990, através da Profa. Franca Cohen Gottlieb, foram indicadas quatro alunas do Curso de Álgebra III, das quais apenas uma seria escolhida pelo Prof. Mello e Souza para auxiliá-lo com sua turma de Álgebra II (turno da tarde), prestando serviços de monitoria, os quais serão descritos adiante. Dessas alunas, Carla, Claudia, Daniela Mortari e Madalena Vieira, com a impossibilidade de duas, devido ao horário, ficamos apenas nós. Mas como o Prof. sentiu-se sem o "mérito" de julgar-nos, acabamos entrando num acordo. Já que o objetivo deste trabalho era ajudar a turma uma vez por semana, horas antes de sua aula, na resolução de suas "folhinhas" de exercícios, decidimos que cada semana ficaria uma. Após termos apresentado ao professor nossa proposta, ele teve um pouco de dificuldade, pois não conseguia compreender como ele faria o "contrato" com uma monitora, já que no decorrer do período ele conviveria com duas. Mas concluiu que era melhor pensar que Carla e Claudia eram uma só pessoa. Logo no primeiro dia ele nos mostrou a ementa do curso e algumas "folhinhas" de exercícios que seriam resolvidas posteriormente. Mostrou-nos também sua exemplar conduta profissional, seu jeito metódico de organizar as coisas, sua assiduidade e principalmente seu grande carinho para com os alunos.

Apesar do tempo ter sido pequeno, mais ou menos 2 meses, este trabalho foi muito bom, muito enriquecedor. Fez com que adquiríssemos novos conhecimentos de Álgebra (matéria da qual particularmente gostamos

muito) e além disso, passamos a conhecer e a conviver melhor com alguns colegas do curso de Matemática. Inclusive, foi daí que surgiu o "casal 20" do curso de Matemática: Claudia e Luiz.

Como este trabalho auxiliou muito os alunos e teve a aprovação do professor, era de seu agrado que este tivesse uma continuidade no semestre seguinte. Vê-se então a grande importância deste tipo de trabalho acadêmico. Este vínculo aluno-professor-monitor, é altamente válido, ao ponto que surge um ciclo vicioso, onde, a troca de conhecimentos é mútua. Mas não foi possível que isto se concretizasse. Após um breve contato com o professor, já no início do segundo semestre em 1990, soubemos por parte dele, que o curso de Álgebra III não seria ministrado por sua pessoa, já que os horários ficaram muito inconvenientes. Para ele, não seria possível dar uma aula no primeiro horário do turno da tarde (quando os alunos não conseguem acertar seus relógios e chegar na hora certa) e no último horário do dia posterior (horário em que os alunos já estão super dispersos, cansados). Mas o professor nos prometeu que no próximo ano, ele estaria firme e forte, dando continuidade ao que ele mais gostava: ENSINAR. Pena que ele não pôde cumprir com sua promessa.

O importante é que disto tudo pudemos tirar e continuamos a tirar grandes lições e sobretudo experiências que nos acompanham dia-a-dia. O Prof. Mello e Souza não foi apenas um mestre que passou por nossas vidas, mas sim um amigo, um GRANDE AMIGO que sempre teremos em nossa companhia e com quem poderemos contar esteja ele onde estiver.

As "folhinhas"

Tentamos reunir aqui, algumas de suas "folhinhas", exercícios passados em aula.

Muitas delas contavam como presença. Ele as recolhia no final da aula e podia verificar a partir destas, quais os alunos que tinham comparecido.

1. Em \mathbb{R} a operação T assim definida $aTb = a+b-1$ é associativa?
2. Em \mathbb{R} a operação média aritmética, $*$, ou seja $a * b = \frac{a+b}{2}$ é associativa?
3. Consideremos em \mathbb{Z} as operações $+$ e T , sendo T assim definida

- $aTb = a^2b$. A operação T é distributiva à esquerda em relação a $+$? E à direita?
4. Dê cinco partes de \mathbb{R} , que não sejam um singleton, fechadas para a operação \times .
 5. Estude a existência de elemento neutro nos conjuntos (e respectivas operações) abaixo:
 - 5.1. $(\mathbb{Z}, *)$, $a * b = a + b^2$
 - 5.2. (\mathbb{Q}, \square) , $a \square b = ab + a^2(b-1)$
 - 5.3. (\mathbb{Q}, T) , $aTb = 2a + b$
 6. Diga se em \mathbb{R}^+ a operação média geométrica, $a \square b = \sqrt{ab}$, é associativa.
 7. A operação $\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \perp y = y$, possui neutro?
 8. Supondo $E \neq \emptyset$:
 - 8.1. O neutro para a operação \cap em $P(E)$ é
 - 8.2. O neutro para a operação \cup em $P(E)$ é
 9. Em \mathbb{R} o elemento 0 é para a operação \times . Em $P(E)$ o elemento E é absorvente para a operação e o elemento \emptyset é absorvente para a operação
 10. Em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{T} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, temos, por definição de T , $(a,b) T (c,d) = (ac, ad + b)$.
 - 10.1. Calcule $(-2,5) T (3,4)$
 - 10.2. Diga se a operação T é associativa
 - 10.3. Diga se a operação T é comutativa
 - 10.4. Diga se a operação T admite neutro e, se o admitir, qual é esse neutro e qual o simétrico de (a,b)
 - 10.5. Complete $U_T(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - 10.6. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, T)$ tem a estrutura de
 11. Demonstre que em um grupo (G, \square) o simétrico de um elemento $x \in G$ é único.

12. A operação $*$ definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$a * b = a^b, 0^0 = 1.$$

12.1. Pode ser estendida a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Por quê?

12.2. Pode ser estendida a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$? Por quê?

12.3. Pode ser estendida a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Por quê?

13. Não há, em homenagem aos superticiosos.

14. Se $A = \{1, 2\}$, $S(A) = \{e, a\}$, sendo $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. O grupo $(S(A), o)$ é comutativo?

15. Se $B = \{1, 2, 3\}$ então $S(B) = \{e, a, b, c, d, f\}$ onde $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \dots, (S(B), o)$ é comutativo?

16. Se $C = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto $S(C) = \{e, a, b, \dots\}$ quantos elementos possui?

17. Se $X = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ o grupo $S(X) = \{e, a, \dots\}$ quantos elementos possui?

18. O conjunto dos números decimais $S = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$?

$S - \{0\}$ é uma parte estável de (\mathbb{Q}^0, \times) ?

$S - \{0\}$ é um sub-grupo de (\mathbb{Q}^0, \times) ?

19. Sejam $(S_1, *)$ e $(S_2, *)$ dois sub-grupos de $(G, *)$. Prove que $S_1 \cap S_2$ é um sub-grupo de $(G, *)$. Prove que $S_1 \cup S_2$ não é um sub-grupo de $(G, *)$, através de um contra-exemplo.

20. Verifique se $\left(\left\{ 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}, \times \right)$ é um grupo abeliano.

21. A aplicação f de (\mathbb{R}_0, \times) em (\mathbb{R}_0, \times) em que $f(x) = x^2$, é um endomorfismo ou um automorfismo?

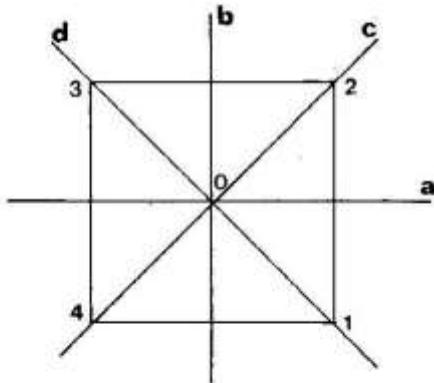
22. Mostre que o grupo cíclico finito $[-i]_X$ é isomorfo do grupo (\mathbb{Z}_4, \oplus) .

23. Os grupos (\mathbb{Z}_6, \oplus) e $(\mathbb{Z}_7^0, \otimes)$ são isomorfos?

24. O conjunto $\{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$ de classes residuais mod. 15 munido da operação \otimes é um grupo?

25. Se a resposta de 24 for afirmativa, pergunta-se: qual o seu neutro? qual o simétrico de $\bar{3}$? qual a o $(\bar{9})$? qual a o $(\bar{12})$?

26.



Considere o quadrado de vértices 1, 2, 3 e 4. Os deslocamentos que aplicam este quadrado nele mesmo são dados pelas seguintes aplicações: *simetrias* de eixos a, b, c, d. *rotações* em torno do ponto O, no sentido horário, de am-

plitudes $e = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 270^\circ$ mostre que estas 8 aplicações formam um sub-grupo do grupo simétrico do quadrado (grupo simétrico) sobre $(\{1, 2, 3, 4\})$.

e	α	β	γ	a	b	c	d
e							
α							
β							
γ							
a							
b							
c							
d							

Uma pesquisa interessante

*Pesquisa da associatividade de um grupoide $(G, *)$*

Seja $(A, *)$ um grupoide, onde $A = \{a, b, c, \dots, n\}$. Chamemos S_a uma aplicação de A em A assim definida:

$$\text{Se } a \in A, \forall x \in A, S_a(x) = a * x$$

Chamemos \bar{A} o conjunto das S_a ou $\bar{A} = \{S_a, S_b, \dots\}$

Dotemos o conjunto \bar{A} da operação \circ (composição de elementos do conjunto \bar{A}).

Seja f a aplicação de $(A, *)$ em (\bar{A}, \circ) seguinte: $f: a \rightarrow S_a$

Se a aplicação f for um isomorfismo, a operação $*$ em A é associativa, pois sabemos que a operação \circ em \bar{A} é associativa. Temos o seguinte TEOREMA: *A operação $*$ em A é associativa se f for um isomorfismo de $(A, *)$ em (\bar{A}, \circ) .*

Se f for um isomorfismo, a operação $*$ é associativa em A , pois \circ é associativa em \bar{A} . Resta provar que se a operação $*$ for associativa em A , f é um isomorfismo de $(A, *)$ sobre (\bar{A}, \circ) . Partamos, pois, da hipótese que $*$ é associativa em A .

Se $(A, *)$ é um grupoide, então se $a \in A$ e $b \in A$ então $(a * b) \in A$.

Ora, por definição, temos: $\forall x, x \in A, S_{a*b}(x) = (a * b) * x = a * (b * x) = S_a(b * x) = S_a(S_b(x)) = (S_a \circ S_b)(x)$.

Então $S_{a*b} = S_a \circ S_b$, isto é a imagem do composto $a * b$ é o composto pela operação \circ das imagens S_a e S_b e o homomorfismo de f fica evidente. Sendo f bijetora, será então um isomorfismo.

QUESTIONÁRIO

Este questionário foi aplicado pelo Prof. Mello e Souza no 1º dia de aula de Álgebra II, com o objetivo de conhecer melhor os hábitos de estudo de seus alunos.

UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA

Curso de Matemática: disciplina "ÁLGEBRA II"

HÁBITOS DE ESTUDO E/OU ATITUDES EM CLASSE

Questionário sobre hábitos de estudo e/ou atitudes em classe

	Freqüentemente	Às vezes	Quase nunca
01. Um livro texto não me agrada, pois não gosto de estudar em livros. Acho-os enrolados e complicados.	0	3	5
02. Prefiro minhas notas de aula, apostilas ou notas de colegas.	3	2	1
03. Consigo manter minha atenção concentrada no que estou estudando.	4	4	1
04. Os intervalos de tempo que destino ao estudo são pequenos.	3	4	2
05. Os intervalos de tempo que destino ao estudo são mal aproveitados por mim. Tudo serve para me distrair e afastar minha atenção do meu propósito de estudar.	2	2	5
06. Quando estudo acompanhado aproveito mais que quando estudo só.	1	4	4
07. Boa parte do meu tempo livre é gasto em ver televisão.	0	3	6
08. Gasto tempo em conversas inúteis ou em outras atividades dissipativas.	0	3	6
09. Deixo para estudar quando já estou cansado, com sono e com possibilidades mínimas de me concentrar.	0	0	(100%) 9
10. Reservo meu horário certo, por dia ou por semana, para estudar e manter em dia a matéria que vem sendo dada.	3	4	2

11. Só estudo na véspera da prova. Deixo tudo para última hora, por não dividir inteligentemente o tempo de estudo e de lazer.	0	5	3
12. Recorro ao professor sempre que me deparo com dificuldade que não consigo vencer.	3	4	2
14. Para aumentar meu domínio e segurança no que estou estudando; Procuro em meu estudo ir além do que foi dado em aula. Procuro abordar, num enfoque diferente, o que está sendo dado.	1	4	3
15. Esforço-me por resumir, sintetizar e arrumar o que foi ensinado, fixando e realçando os pontos importantes, como quem prepara os alicerces de um edifício a construir.	7	1	1
16. Tenho consciência que, por vezes, me faltam conhecimentos básicos (em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, etc) e procuro sanar tais lacunas visando todos os recursos ao meu alcance.	3	5	0
17. Minhas atividades na Universidade ou fora dela estranhas ao curso tomam-me tempo e atenção, prejudicando meu estudo regular.	0	4	5
18. Recorro ao professor quando deparo temas que não entendi e não tenho como esclarecer.	3	3	3
19. Consigo bem caracterizar a matéria que está sendo dada e quais os seus pontos decisivos.	3	5	0
20. Consigo vencer as dificuldades surgidas quando o professor usa palavras novas, e incorporo-as com facilidade à minha linguagem habitual.	5	2	1
21. Luto para manter minha atenção concentrada no trabalho em classe. Minha imaginação começa a divagar e acabo por me alheiar inteiramente do tema que está sendo abordado.	2	5	2
22. Participo com interesse dos exercícios e tarefas, individuais ou em grupo, dados pelo professor durante a aula.	7	2	0
23. Perco partes importantes de uma aula por querer tomar nota de tudo, inclusive de pontos que depois verifico que eram irrelevantes ou secundários.	1	3	4
24. Gosto de conversar com os colegas vizinhos e acabo por perder a seqüência do que está sendo abordado.	1	5	3

25. O fato de não gostar de certos professores e/ou certas matérias prejudica minha aprendizagem.	1	5	3
26. Tenho dificuldade em caracterizar claramente os pontos decisivos da matéria que estou estudando.	0	5	3
27. Só consigo estudar quando estou com uma disposição especial, sem a qual todo esforço que faça me parece inútil.	0	3	5
28. Meus períodos de estudo são muito curtos e, quando consigo atingir certo grau de concentração, já estão terminados.	0	4	4

OBS.: Só 9 alunos devolveram o questionário.

DEPOIMENTOS DOS ALUNOS

Como o professor era muito democrático e gostava que as coisas corresse de forma justa, antes de dar qualquer nota definitiva aos seus alunos, ele lhes pedia, após ter sido feita a correção das provas, que eles mesmos se avaliassem e se dessem uma nota. A partir desta, ele tirava a sua nota final.

Muitas vezes, após a correção, gostava que seus alunos fizessem observações (críticas) a respeito de suas provas.

Auto-avaliação de alguns alunos após a primeira prova (crítica da prova)

Mestre,

A correção da prova foi perfeita, eu é que não dediquei tempo suficiente para fazer uma boa prova. Já refiz a prova e já estou me dedicando mais a álgebra.

*Obrigado,
Tânia*

A prova não estava difícil, estava bem elaborada e trabalhosa.

Eu errei questões por falta de atenção. Eu me distraio à toa.

Angélica

Como toda crítica tem seu lado positivo e seu lado negativo, começamos pela melhor parte. Por um lado, a prova estava simples e bem dentro do esquema de exercícios que estávamos acostumados a fazer, porém estava longa e trabalhosa. Por outro lado, não sei se não compreendi bem mas, foi dito que era possível se errar uma questão e ainda tirar nota 10. No meu caso, não tirei zero em nenhuma das questões, embora tivesse sido descontada, do total de pontos da minha prova, uma questão que, mesmo sendo a de menor valor, me surpreendeu. Não estava ciente de que uma questão da prova seria descartada. Isso me prejudicou, pois em vez de completar todas as questões, uma vez que o tempo era curto, perdi tempo fazendo uma questão trabalhosa que não me trouxe resultados.

Andreia Martins Hamerski

DEPOIMENTOS SOBRE O PROFESSOR

O professor Mello e Souza em seu primeiro dia de aula na turma de Álgebra I do 2º semestre de 1989, se apresentou, deu a bibliografia que seria usada no curso e começou o seu curso, com sua calma e paciência que eram suas principais características. Explicou como era o seu jeito de dar aula e disse que, se um dia ele se atrasasse mais de 10 minutos, que poderíamos ir embora porque ele não viria. Ele era realmente assim. Geralmente chegava antes da hora e jamais se atrasava.

Ele era o tipo de professor que gostava de chamar os seus alunos para resolverem exercícios no quadro negro. Na primeira vez em que fez isso ele falou mais ou menos assim:

Prof.: "Gostaria que você (apontando o dedo para um aluno) fosse ao quadro resolver este exercício".

Este aluno não quis ir e ele foi perguntando um a um, todos recusaram, até que ele chegou em mim e eu fui fazer o exercício. Fiz e ele me parabenizou por estar correto e pela rapidez com que eu fiz o exercício. Aí ele explicou para o resto da turma e a aula seguiu adiante.

Na segunda vez em que fez isso foi a mesma coisa, o professor ofereceu o giz a todos, estes recusaram e eu aceitei ir ao quadro. E assim foi se repetindo até que chegou um dia no qual ele ofereceu o giz direto a mim, pedindo para ir ao quadro.

No final do curso de Álgebra I, eu ia ao quadro todas as aulas e ele com sua paciência, atenção e carinho para com todos procurava dar atenção e explicação a todos quantas vezes fossem necessárias.

No primeiro semestre de 1990, tive o prazer de saber no primeiro dia de aula que seria ele o professor do curso de Álgebra II. A turma era praticamente a mesma, apenas com alguns acréscimos. Já no início do curso de Álgebra II, ele já não oferecia o giz a mais ninguém, somente a mim. Isto às vezes me deixava constrangida, mas ele tratava logo de explicar a turma, que ele fazia isto pois sabia que eu ia ao quadro sem problemas, enquanto que os outros sempre se recusavam. Nesse semestre aconteceram aulas nas quais eu passava quase que a aula inteira ajudando-o e isto fez com que eu me aproximasse muito dele e sentisse uma admiração cada vez maior por ele. Ele sabia perceber se algum aluno estava mais triste ou mais alegre, nervoso ou não e sabia compreender.

O professor Mello e Souza não poupava esforços para fazer com que todos os seus alunos entendessem a matéria. Repetia a explicação quantas vezes fosse necessário, preparava exercícios para casa, dava aulas de revisão antes de uma prova e ficava triste quando alguns dos seus alunos tiravam notas muito baixas. Sempre fez de tudo pelo aluno, com muito amor, carinho e dedicação. Conhecia todos pelo nome e jamais passava sem cumprimentar. Se faltássemos a aula, na aula seguinte ele se lembrava e, às vezes, fazia um resumo da aula anterior para que o faltoso não ficasse "perdido" na aula. Entre nós, os alunos, ele era chamado carinhosamente, de vovô.

Uma declaração mais particular

Sempre fui da opinião que o professor contribui bastante para que o aluno goste ou não da matéria. Então não saberia dizer se foi pelo professor Mello e Souza, ou se foi por um interesse natural, meu ou pela soma dos dois, mas atualmente uma das matérias que eu mais gosto é Álgebra. Gosto de estudar, ler sobre ela, enfim tenho um interesse muito grande pela matéria.

Eu senti muito a morte do professor Mello e Souza, pois tinha e tenho um carinho muito grande por ele e sei que ele também o tinha por mim. Com o fato de eu ajudá-lo muito em suas aulas, isto nos aproximou, eu era aquele ponto de referência. Lembro-me de uma aula que ao acabar de explicar uma determinada matéria eu disse a ele que não tinha entendido di-

reito, e se ele poderia explicar novamente, e ele respondeu:

Prof.: "Se a Ângela não entendeu é porque eu realmente não me expressei bem".

Parou uns minutos, pensou e falou.

Prof.: "Tentarei ser mais claro" e recomeçou a explicação.

Lembro-me desta aula como se fosse hoje. Citei alguns exemplos, mas teria muitos outros a lembrar. Nessas horas ele conseguia me deixar realmente sem graça diante da turma, mas ele era assim e era assim que todos nós gostávamos dele.

Ângela Bonifácio Matos

É impossível falar tudo sobre o prof. Mello e Souza, e por mais que tentemos enumerar vários adjetivos — qualificadores, seria um crime, pois, por mais que enumeremos, ainda assim, estaria sempre faltando, formando uma lacuna que nunca seria preenchida, para qualificar o ser humano incrível que foi este professor.

Sinto-me orgulhoso de ter sido seu aluno e poder testemunhar nesse meu relato toda a minha admiração por tudo que ele foi para mim e, poder agradecer "a tudo" o que foi possível extrair de positivo deste tão glorioso mestre.

Obrigado mestre,
Luiz Antônio Gomes Leme

*"Por algumas coisas: desculpe-me,
Por outras: obrigado".*

Claudia Loureiro

CÁLCULO NUMÉRICO DA RAIZ QUADRADA

José Paulo Q. Carneiro
IBGE/ENCE
Pós-Graduação – USU/GEPEM

1. O Processo Iterativo Básico

Imaginemos que se disponha de uma máquina de calcular, capaz de fazer apenas as “4 operações”: adição, subtração, multiplicação e divisão de números reais. Com esta máquina, como calcular a raiz quadrada de um número positivo dado M ?

Para fixar idéias, suponha inicialmente que tenhamos uma aproximação por excesso de \sqrt{M} , digamos a . Na realidade, a é um “chute” positivo qualquer, desde que $a^2 \geq M$. Se a fosse exatamente igual a \sqrt{M} (neste caso, o problema estaria resolvido com o “chute”), teríamos $a^2 = M$, isto é, $M/a = a$. Como, porém, $a \geq \sqrt{M}$, o que acontecerá com M/a ? Observe o cálculo:

$$a \geq \sqrt{M} \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{M}{a} \leq \frac{M}{\sqrt{M}} = \sqrt{M}$$

Isto é: se a for uma aproximação por excesso de \sqrt{M} , então M/a será uma aproximação por falta de \sqrt{M} .

O fato de que \sqrt{M} está entre M/a e a sugere que a média aritmética entre estes dois números, isto é, $\frac{1}{2} (a + \frac{M}{a})$, seja uma aproximação de \sqrt{M} melhor ainda do que o “chute” inicial a . Será porém esta outra aproximação por falta ou por excesso? Acompanhe o cálculo:

$$\frac{1}{2} (a + \frac{M}{a}) - \sqrt{M} = \frac{a^2 + M - 2a\sqrt{M}}{2a} = \frac{(a - \sqrt{M})^2}{2a} \geq 0 \quad (1)$$

provando que $\frac{1}{2}(a + \frac{M}{a})$ é também uma aproximação por excesso de \sqrt{M} e *melhor* do que a , pois está mais próxima de \sqrt{M} do que estava a (faça uma figura na reta, para verificar este fato).

Isto tudo sugere um processo *iterativo*, ou seja, repetitivo, para encontrar, sucessivamente, aproximações por excesso de \sqrt{M} cada vez melhores, a saber:

1. Escolhe-se um número positivo a_0 tal que $a_0^2 \geq M$.

2. Toma-se $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + \frac{M}{a_0})$

3. Toma-se $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{M}{a_1})$

etc.

Costuma-se resumir este processo na definição "por recorrência" da seqüência de aproximações $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_0 = \text{número positivo tal que } a_0^2 \geq M \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{M}{a_{n-1}}) \text{ para } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Exemplo 1:

Seja $M = 781,54$. Tomemos $a_0 = 50$ (confira se serve!). Utilizando o processo, obtém-se a seguinte seqüência (confira!):

$$a_1 = \frac{1}{2} (50 + \frac{781,54}{50}) = 32,81540000$$

$$a_2 = 28,31582850$$

$$a_3 = 27,95832274$$

$$a_4 = 27,95603701$$

$$a_5 = 27,95603692$$

etc.

Observe que:

$$a_0^2 = 2.500$$

$$a_1^2 = 1.076,85047716$$

$$a_2^2 = 801,78614368$$

$$a_3^2 = 781,66781037$$

$$a_4^2 = 781,54000523$$

$$a_5^2 = 781,54000000$$

etc.

de modo que, realmente, as aproximações vão sempre melhorando e que a_5 já é uma excelente aproximação de $\sqrt{781,54}$, dentro da precisão indicada.

Exemplo 2:

Tomemos novamente $M = 781,54$, mas agora $a_0 = 30$. A seqüência de aproximações seria:

$$a_0 = 30$$

$$a_1 = 28,02566667$$

$$a_2 = 27,95612341$$

$$a_3 = 27,95603602$$

etc.

Nota-se que, com a escolha de $a_0 = 30$, obtivemos melhores aproximações de $\sqrt{781,54}$ mais rapidamente, ou seja, com menos iterações, do que tínhamos conseguido com $a_0 = 50$. Naturalmente, isto ocorreu por 30 já estar mais perto da solução.

Os exemplos 1 e 2 ilustram algumas questões que deverão ser abordadas daqui por diante, no caso geral. A primeira delas é a seguinte: o processo (2) sempre "convergirá"? Ou seja, quaisquer que sejam M e a_0 , ao final de um certo número de passos, chega-se à raiz quadrada de M , com a aproximação que desejarmos? A resposta a esta pergunta é afirmativa, e a justificativa é a seguinte: a seqüência de aproximações a_0, a_1, \dots, a_n , é de-

crescente e limitada inferiormente por \sqrt{M} , logo converge a um número $\geq \sqrt{M}$, digamos c . A seqüência de termo geral a_{n-1} , sendo uma subsequência da primeira, também converge ao mesmo valor. Usando então (2) e as propriedades aritméticas dos limites, conclui-se que:

$$c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{M}{c} \right)$$

donde vem que $c^2 = M$ e, como $c \geq \sqrt{M}$, segue-se que $c = \sqrt{M}$. (Se os seus conhecimentos de Cálculo ainda não são suficientes para acompanhar a demonstração que acabou de ser feita, não se preocupe, guarde apenas o fato.) Concluindo:

Quaisquer que sejam M e a_0 positivos, ao final de um certo número de passos, o processo iterativo (2) fornece a raiz quadrada de M , com qualquer aproximação desejada.

Exercício 1. Aplicando o processo iterativo (2), faça 4 iterações para achar aproximações de \sqrt{M} nos seguintes casos (invente outros):

$$\begin{array}{ll} M = 2 & a_0 = 2 \\ M = 2 & a_0 = 20 \\ M = 231,19 & a_0 = 20 \\ M = 231,19 & a_0 = 16 \end{array}$$

Exercício 2. O que acontece no processo (2) se a_0 for tomado uma aproximação (positiva) *por falta* de \sqrt{M} ?

O fato de que o processo sempre converge é importante mas não suficiente para os propósitos do Cálculo Numérico. O que desejamos saber agora é o seguinte:

Problema: dado um número positivo M , que valor de a_0 deve ser escolhido e quantas iterações devem ser realizadas para se obter \sqrt{M} com p decimais exatas?

Responderemos a esta pergunta nos próximos parágrafos, após termos estudado o erro cometido em cada passo do processo. Veremos que há várias maneiras diferentes de escolher a_0 e o número de iterações, cada uma dessas maneiras caracterizando um processo acabado, que, em Cálculo Numérico é chamado de *algoritmo*.

2. O erro de cada aproximação

Chamemos de ϵ_n o erro cometido na n -ésima iteração, isto é, o erro cometido ao se tomar a_n em vez do valor verdadeiro \sqrt{M} . Como a_n é uma aproximação por excesso, tem-se, por definição:

$$\epsilon_n = a_n - \sqrt{M}$$

Exemplo 3.

No exemplo 1, se você admitisse 27,95603692 como valor exato de $\sqrt{781,54}$ (o que não é "exatamente" verdadeiro), os erros seriam:

$$\epsilon_0 = a_0 - \sqrt{M} = 22,04396308$$

$$\epsilon_1 = a_1 - \sqrt{M} = 4,85936308$$

$$\epsilon_2 = a_2 - \sqrt{M} = 0,35979158$$

$$\epsilon_3 = a_3 - \sqrt{M} = 0,00228582$$

$$\epsilon_4 = a_4 - \sqrt{M} = 0,00000009$$

$$\epsilon_5 = a_5 - \sqrt{M} = 0,00000000$$

Observe que os erros ϵ_n vão diminuindo à medida que n aumenta, o que já se previa, pois cada a_n é uma aproximação melhor do que a_{n-1} . (Note que aqui estamos também admitindo como "exatos" os valores calculados de a_1, a_2, \dots , desprezando os erros envolvidos nos cálculos das adições, multiplicações e divisões realizadas, bem como as aproximações resultantes da decisão de parar a escrita na oitava decimal. Observação análoga vale para os próprios erros; por exemplo, ϵ_5 não é exatamente igual a zero. Esta atitude será sempre tomada neste texto. Deve-se pois estar atento a que toda discussão que segue supõe que as "4 operações" são feitas com precisão infinita.)

A fórmula (1) acarreta que:

$$\frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{M}{a_{n-1}} \right) - \sqrt{M} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{M})^2}{2a_{n-1}} \geq 0$$

ou seja:

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \quad (3)$$

Esta fórmula fornece o erro da n -ésima aproximação em termos do erro da aproximação anterior. Veremos como aproveitá-la para resolver o problema colocado no final do parágrafo anterior.

3. Uma alternativa (I) para controlar o erro

Suponha primeiro que $M \geq 1$. Os exemplos já vistos sugerem que, quanto mais próximo do resultado final for escolhido a_0 , tanto mais rápida será a convergência. Inspirados nisto, tomemos a_0 como a melhor aproximação inteira por excesso de \sqrt{M} (para achá-la, basta testar os quadrados dos naturais até que M seja ultrapassado). Com esta escolha, tem-se que \sqrt{M} está entre os inteiros $a_0 - 1$ e a_0 ; portanto, $\epsilon_0 < 1$. Por outro lado, como $M \geq 1$, também $\sqrt{M} \geq 1$ e, como todas as aproximações a_n são por excesso, tem-se $a_{n-1} \geq 1$, de modo que $1/a_{n-1} \leq 1$. Levando este resultado em (3), vem:

$$\epsilon_n \leq \frac{1}{2} \epsilon_{n-1}^2$$

Fazendo sucessivamente $n = 1, 2, 3, \dots$, obtém-se:

$$\epsilon_1 \leq \frac{1}{2} \epsilon_0^2 < \frac{1}{2} 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon_2 \leq \frac{1}{2} \epsilon_1^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^3}$$

$$\epsilon_3 \leq \frac{1}{2} \epsilon_2^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 = \frac{1}{2^7}$$

etc.

Isto sugere que:

$$\epsilon_n < \frac{1}{2^{2^n - 1}} \quad (4)$$

Exercício 3. Demonstre, por indução, a fórmula (4).

A fórmula (4) dá as seguintes cotas superiores para o erro da n-ésima aproximação:

Tabela 1

n	$1/2^{2^n - 1}$
1	0,50000000
2	0,12500000
3	0,00781250
4	0,00003052
5	0,00000000

(o valor da última linha não é zero e sim $0,47 \times 10^{-9}$)

Exemplo 4.

Achemos $\sqrt{781,54}$ com 3 decimais exatas. Testando: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; ...; $27^2 = 729$; $28^2 = 784$, de modo que $a_0 = 28$. Para obter $\sqrt{781,54}$ com 3 decimais exatas, é necessário que o erro seja menor que 0,0005. Pela Tabela 1, constata-se que $n = 3$ ainda não garante isto, porém $n = 4$ já satisfaz. Pode-se usar também diretamente a fórmula (4), isto é, determinar n de modo que

$$\frac{1}{2^{2^n - 1}} < 0,0005$$

ou seja

$$2^{2^n - 1} > 2000$$

Constata-se novamente que é necessário que $n \geq 4$. (Na realidade, a quarta iteração dará $\sqrt{781,54}$ com, no mínimo, 4 decimais exatas, já que $\epsilon_4 < 0,00003052 < 0,00005$). Utilizando agora o processo iterativo:

$$\begin{aligned} a_0 &= 28 \\ a_1 &= 27,956 \\ a_2 &= 27,956 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 27,956 \\ a_4 &= 27,956 \end{aligned}$$

Ou seja, $\sqrt{781,54} = 27,956$ com 3 decimais exatas.

Exercício 4. No exemplo 3, já com $n = 1$ obtivemos 3 decimais exatas. Isto contraria a discussão feita no texto?

Até agora, supusemos $M \geq 1$. Se $0 < M < 1$, então $1/M$ será > 1 e podemos aplicar o processo indicado para achar $\sqrt{1/M} = 1/\sqrt{M}$, e obter, como consequência, \sqrt{M} (lembre que estamos supondo as "4 operações" calculadas sem erro).

Exemplo 5.

Calculemos $\sqrt{0,0342}$ com 4 decimais exatas.

Temos $n = 4$; $1/0,0342 = 29,23976608$; $a_0 = 6$ (confira!). Daí:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5,4366 \\ a_2 &= 5,4075 \\ a_3 &= 5,4074 \\ a_4 &= 5,4074 \end{aligned}$$

Donde:

$$\sqrt{0,0342} = 1/5,4074 = 0,1849$$

Exercício 5. Faça um programa de computador para calcular \sqrt{M} com p decimais exatas, segundo a alternativa I. Rode o programa para os seguintes valores de M : 2; 0,2; 20; 0,02; 123,45; 6789,01; 0,543; 384.666,2; 0,000191.

4. Uma alternativa (II) que converge mais rapidamente

Na alternativa I, anteriormente discutida, a escolha de a_0 como a melhor aproximação inteira de \sqrt{M} foi conveniente, para garantir $\epsilon_0 < 1$. No entanto, ela implica numa procura custosa para a máquina. Tentemos tornar este inconveniente. Acompanhe o cálculo:

$$\frac{1+M}{2} - \sqrt{M} = \frac{1-2\sqrt{M}+M}{2} = \frac{(1-\sqrt{M})^2}{2} \geq 0 \quad (5)$$

Isto prova que $(1+M)/2$ é sempre uma aproximação por excesso de \sqrt{M} , e sugere que tomemos sempre $a_0 = (1+M)/2$, numa escolha imediata que não implica em busca alguma. Infelizmente, com esta escolha, se M for razoavelmente "grande", ϵ_0 pode ser muito alto, retardando a convergência. Por exemplo, se $M = 781,54$, tem-se $a_0 = 391,27$, e portanto $\epsilon_0 = 363,31396309$ e seriam necessárias 7 iterações para atingir a precisão que conseguimos atingir com apenas uma no exemplo 3.

Procurando então controlar melhor o erro inicial, vamos, primeiramente, supor que $1/4 \leq M < 1$. Neste caso, $1/2 \leq \sqrt{M} < 1$, de modo que $1 - \sqrt{M} \leq 1/2$ e, portanto:

$$\epsilon_0 = a_0 - \sqrt{M} = \frac{(1-\sqrt{M})^2}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}$$

onde utilizamos a fórmula (5). Por outro lado, como $\sqrt{M} \geq 1/2$ e todas as aproximações são por excesso, tem-se $a_{n-1} \geq 1/2$ e, portanto, $1/(2a_{n-1}) \leq 1$. Levando este resultado em (3), vem:

$$\epsilon_n \leq \epsilon_{n-1}^2$$

Fazendo sucessivamente $n = 1, 2, \dots$:

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_0^2 < \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\epsilon_2 \leq \epsilon_1^2 < \left(\frac{1}{8}\right)^4$$

etc.

o que sugere:

$$\epsilon_n < \frac{1}{8^{2^n}}$$

Exercício 6. Demonstre (6), por indução.

Neste caso, a convergência é muito rápida, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2

n	$1/(8^{2^n})$
1	0,01562500
2	0,00024414
3	0,00000006
4	0,00000000

Na verdade, o valor da última linha não é zero e sim $0,36 \times 10^{-14}$, ou seja, com 4 iterações, já se garantem 14 decimais exatas.

O que acontece porém se M não estiver no intervalo $[1/4; 1[$?

Em primeiro lugar, se $M \geq 1$, determinamos entre que potências de 4 está M , isto é, encontra-se o único natural k tal que:

$$4^{k-1} \leq M < 4^k$$

(Você vai observar que a procura deste natural é muito mais rápida do que a procura de α_0 na alternativa I). Mas então:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{M}{4^k} < 1$$

Aplicando-se o processo descrito para $M/4^k$, calcula-se

$$\sqrt{\frac{M}{4^k}} = \frac{\sqrt{M}}{2^k}$$

Basta agora multiplicar o resultado por 2^k para obter \sqrt{M} .

Finalmente, se $M < 1/4$, então $1/M > 4$ e recai-se no caso anterior, achando-se $\sqrt{1/M} = 1/\sqrt{M}$ e invertendo o resultado.

Exemplo 6. Calculemos $\sqrt{0,371}$ com 6 decimais exatas pela alternativa II. Como $0,25 < 0,371 < 1$, o processo é direto e, pela Tabela 2 ou pela fórmula (6), três passos são suficientes.

$$a_0 = \frac{1 + 0,371}{2} = 0,685500$$

$$a_1 = 0,613355$$

$$a_2 = 0,609112$$

$$a_3 = 0,609098$$

Exemplo 7. Calcule $\sqrt{781,54}$ com 6 decimais exatas pela alternativa II. Sendo $M > 1$, testa-se:

$$4^1 = 4 \quad 4^2 = 16 \quad 4^3 = 64 \quad 4^4 = 256 \quad 4^5 = 1.024$$

Portanto, $4^4 < 781,54 < 4^5$. O processo vai incidir sobre o número $781,54 / 4^4 = 0,763223$, com $k = 5$.

$$a_0 = 0,881611$$

$$a_1 = 0,873662$$

$$a_2 = 0,873626$$

$$a_3 = 0,873626$$

Finalmente:

$$\sqrt{781,54} = 0,873626 \times 2^5 = 27,956037$$

Exemplo 8. Calculemos $\sqrt{0,0197}$ com 6 decimais exatas pela alternativa II. Sendo $M < 1$, considera-se o seu inverso:

$$4^2 < \frac{1}{0,0197} = 50,761421 < 4^3$$

O processo será aplicado a

$$\frac{50,761421}{4^3} = 0,793147$$

obtendo-se:

$$a_0 = 0,896574$$

$$a_1 = 0,890608$$

$$a_2 = 0,890588$$

$$a_3 = 0,890588$$