mente essas pessoas chegam à conclusão por si só.

Com este exemplo vemos a intuição e a lógica postas a trabalhar. Todo processo de invenção matemática e com maior razão de compreensão é regido na seguinte série de fenômenos psicológicos:

Contemplação de figuras ordenadas.
Constatação de uma verdade simples.
Indução que conduz à expressão geral da lei.
Verificação geral, chamada demonstração, que consiste em fazer sobre uma classe observações que foram feitas sobre os entes daquela classe.

No nosso exemplo, fazer com que o aluno não pense em particular nos números 3 e 5, e sim, num caso geral, em um número qualquer.

Este é o processo de abstração fundamental na iniciação matemática. Somos de opinião que este poder de abstração não se apresenta em nossos alunos antes dos 12 ou 13 anos, e por isto, problemas desta natureza não devem ser apresentados nas primeiras séries do curso ginasial, pois, quando são dados, os alunos não os fazem com compreensão e sim repetem o raciocínio feito pelo professor.

Com maior razão, na geometria, devemos encaminhar os alunos para o desenvolvimento do pensamento lógico. É muito normal nas nossas escolas serem dadas demonstrações de geometria de uma maneira expositiva, demonstrações essas que são decoradas de um modo geral, não contribuindo deste modo para que o aluno utilize o raciocínio dedutivo.

O fato do aluno usar nas demonstrações geométricas o seu pensamento lógico deve ser realçado pela necessidade de que ele sinta esta demonstração e isto pode ser obtido fazendo preceder à demonstração propriamente dita, experiências concretas que levem a observações da propriedade a ser demonstrada.

Cabe aqui notar que demonstrações de propriedades evidentes aos olhos de um aluno ginasiano, não devem ser apresentados no 1º ciclo da escola secundária. Evitamos assim que o aluno julgue ser a demonstração uma ginástica mental supérflua. Por meio de material didático facilmente manuseável mostramos congruência de triângulos, semelhanças de triângulos, a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo etc. . .

Para o estudo das áreas o melhor é o uso do geoplano. Mas uma experiência banal na sua essência, mas muito sugestiva é feita por meio de um simples barbante.

A professora Emma Castelnuovo descreve esta experiência da seguinte forma:

Esticando-se um anel de barbante entre o polegar e o indicador de cada mão, obtém-se aproximadamente um retângulo (da mesma forma como se faz para a brincadeira popularmente chamada de "cama de gato"). Faz-se o aluno repetir essa experiência afastando ou aproximando os dois dedos entre si e conseqüentemente para manter o barbante esticado aproximando ou afastando as mãos entre si. Com isto ele mantém o perímetro constante, mas varia a forma do retângulo. Neste momento apresentamos o problema: "O que acontece à área do retângulo"?

A resposta imediata é de que a área não muda pois o contorno não mudou. Os alunos mais espertos ainda acrescentarão: "o que se perde na altura, se ganha no comprimento".

Observamos que esta reação de compensação é muito humana e o professor deve ter o devido cuidado para não destruí-la, pois teremos outras situações em que ela é aplicada e com muito proveito.

Façamos o aluno repetir a experiência aproximando mais os dedos de modo que a um certo momento o retângulo desapareça, tornando-se um simples segmento. Neste momento repetimos a pergunta e não teremos mais a unanimidade da resposta como na primeira vez.

A reação de cada aluno dependerá de sua sensibilidade.

Os mais sonhadores, os que têm tendência literária, se apegam à idéia da constância da área admitindo a contra gosto um desfecho brusco final cuja explicação continua para eles um mistério. Outros esboçam a idéia de uma função contínua fazendo a área diminuir progressivamente até tornar-se nula. Os mais positivos pegam o seu caderno quadriculado e desenham vários retângulos com o mesmo perímetro e calculam as respectivas áreas. Estes são os que chegam à conclusão de que a área, nula nos casos limites, tem o seu valor máximo no quadrado.

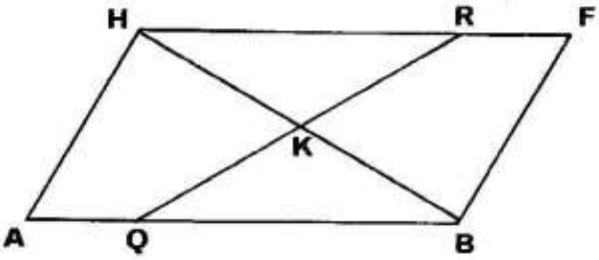
Esta experiência presta-se a uma apresentação numa seção de estudo dirigido em que o problema é apresentado e cada aluno deve escrever as suas observações e conclusões.

Outras experiências concretas serão vistas mais adiante quando apresentarmos diferentes tipos de material didático a serem usados nas diferentes técnicas modernas.

Em séries mais adiantadas, quando o aluno já pode aplicar uma certa abstração, uma técnica para desenvolver esta capacidade é feita por meio de uma esquematização bem lógica do seu raciocínio.

Nas escolas americanas o S.M.S.G. introduziu já há alguns anos uma disposição lógica para as demonstrações. O mesmo foi feito no Brasil pelo G.E.E.N. de São Paulo assim como nos livros didáticos mais atualizados e está sendo aplicado em algumas escolas como por exemplo no Instituto de Educação da Guanabara.

Consiste esta esquematização numa disposição em duas colunas, uma das afirmações de um lado e as justificativas de cada afirmações do outro lado.



Exemplo:

Na figura ao lado

med. $\overline{AH}$ = med. $\overline{FB}$

med. $\overline{AB}$ = med. $\overline{FH}$

e $\overline{RQ}$ corta ao meio $\overline{HB}$ em K,

Prove que: med. $\overline{QK}$ = med. $\overline{KR}$

$$\text{Hipótese} \begin{cases} \text{med. } \overline{AH} = \text{med. } \overline{FB} \\ \text{med. } \overline{AB} = \text{med. } \overline{FH} \\ \text{med. } \overline{HK} = \text{med. } \overline{KB} \end{cases} \qquad \text{Tese} \left| \ \text{med. } \overline{QK} = \text{med. } \overline{KR} \right.$$

AFIRMAÇÕES	JUSTIFICAÇÕES
1) med. $\overline{AH}$ = med. $\overline{FB}$	1) Por hipótese
2) med. $\overline{AB}$ = med. $\overline{FH}$	2) Por hipótese
3) med. $\overline{HK}$ = med. $\overline{KB}$	3) Por hipótese
4) $\triangle$ ABH $\cong$ $\triangle$ BFH	4) Caso LLL de congr. de triângulos
5) med. $\widehat{ABH}$ = med. $\widehat{BHF}$	5) Ângulos Alternos Internos

6) med. $\widehat{QKB}$ = med. $\widehat{HKR}$	6) Ângulos opostos pelo vértice
7) med. $\overline{HK}$ = med. $\overline{KB}$	7) Por hipótese
8) $\triangle$ BQK $\cong$ $\triangle$ HRK	8) Caso ALA de congr. de triângulos
9) med. $\overline{QK}$ = med. $\overline{RK}$	9) Lados Homólogos em triângulos congruentes

Esta esquematização presta-se para ser aplicada nas provas de verificação de aprendizagem, permitindo com maior facilidade a apresentação de demonstrações a primeira vista onde o professor pode avaliar o desenvolvimento lógico do aluno em vez de fazer o aluno repetir os teoremas já demonstrados em aula.

Neste tipo de avaliação, o professor dará o esquema deixando lacunas a fim que o aluno as preencha.

A medida que o aluno se torne mais seguro, o professor aumentará o número de lacunas, às vezes à esquerda e às vezes à direita, até que o aluno seja capaz de fazer sozinho seu desenvolvimento.

O exemplo citado é uma adaptação de um exercício dado no Instituto de Educação em 1965 como questão de prova.

Na questão dada foram deixados em branco as afirmações 1, 2, 3, 6, 7, 8 e as justificações 1, 2, 3, 4, 5, 8 e 9.

MATERIAL DIDÁTICO

Um auxiliar muito importante para as técnicas construtivas é o material didático.

Na escola tradicional o material didático usado na Matemática restringe-se ao quadro negro, giz e alguns modelos de sólidos para a Geometria.

O panorama na escola moderna apresenta-se com outras características quanto ao material didático.

A característica principal do material didático na escola tradicional é ser estático, isto é, o aluno não participa da sua execução, não o movimenta e não trabalha com ele, tem para o material uma atitude passiva e contemplativa, sem tirar conclusões próprias. Todas as observações lhe são sugeridas pelo mestre. Ele não "descobre" por si só as propriedades por meio de experiências concretas, e sim "as encontra já descobertas". Qualquer material que seja apresentado ao aluno com estas características não poderá ser considerado como material da escola moderna mesmo que se utilize das últimas descobertas tecnológicas.

O material da escola atual é essencialmente dinâmico. O aluno participa na sua execução, pode manuseá-lo e, mesmo que isto não se dê, como no caso dos filmes, tem uma atitude ativa nas conclusões ou observações a serem feitas quando o material lhe é apresentado. Deixa-se o aluno dar vasão a seu instinto de observação e fazer trabalhar sua imaginação, de modo a ele sentir cada experiência como realmente "sua". Estudos e aplicação dessa faceta das técnicas modernas foram feitas especialmente na Bélgica.

Citaremos dentro do possível alguns exemplos de material didático utilizado nas escolas modernas.

– REGUINHAS COLORIDAS DE CUISENAIRE

O material consiste em uma caixa contendo 241 reguinhas de 10 tipos diferentes que se distinguem um do outro pela cor e pelo comprimento.

branco	1
vermelhão	2
verde claro	3
rosa	4
amarelo	5
verde escuro	6
preto	7
marron	8
azul	9
laranja	10

As cores não são arbitrárias, existem as famílias dos Vermelhos:

vermelhão	(2)
rosa	(4)
marron	(8)

As famílias dos azuis:

verde claro	(3)

verde escuro	(6)
azul	(9)

As famílias dos amarelos:

amarelo	(5)
laranja	(10)

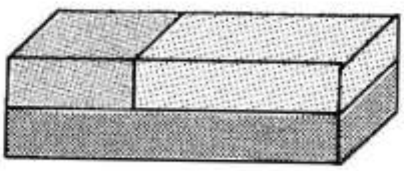
O branco (1) e o preto (7) não formam família.

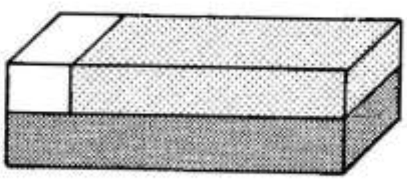
Estas reguinhas têm várias aplicações:

– NA ARITMÉTICA: para ensinar as operações com números inteiros, para introduzir as noções de frações, equivalência de frações e operações com frações.

EXEMPLOS:

– Para ensinar a adição de números inteiros (na escola primária), colocam-se duas ou mais reguinhas, uma em seguida à outra e procura-se uma reguinha de comprimento igual às reguinhas consecutivas.





Notamos que com este processo a criança aprende as operações antes de saber representar os números.

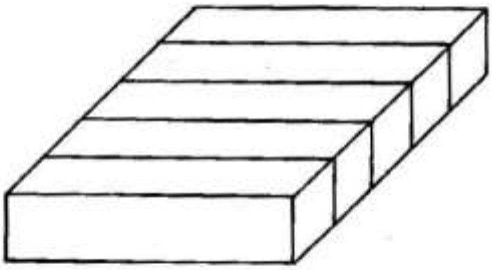
Esta riqueza de experiência que acompanha cada número (maneiras diferentes de compor o número etc.) vai mudar radicalmente a relação que cada criança estabelece com os números; cada número vai adquirir para ela uma outra personalidade que ficaria desconhecida se os números fossem apresentados abstratamente compostos de unidade. Os números vão ganhar em complexidade, podendo o professor tirar vantagens de várias observações para apresentar as diferentes propriedades das operações.

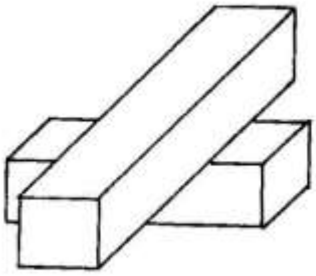
A operação de subtração é obtida imediatamente da observação da adição através da pergunta: "quanto falta à reguinha vermelha para obter o comprimento da reguinha amarela"?

Com esta técnica a multiplicação é obtida imediatamente pelo alinhamento de reguinhas da mesma cor.

Para números maiores, a fim de tornar a multiplicação mais abreviada, usa-se colocar a reguinha que vai ser repetida e a reguinha que indica o número de repetições uma sobre a outra, em forma de uma cruz.

Quando por exemplo tomamos 5 reguinhas verde claro (3) e as colocamos uma ao lado da outra como na figura abaixo a esquerda, a criança observa imediatamente um dos retângulos formado no plano horizontal; seu comprimento é o da reguinha verde e sua largura a medida da reguinha amarela. Isto justifica aos seus olhos a representação em cruz do produto.





A divisão torna-se compreensível para crianças de 6 anos, com este material, através da pergunta: "Quantas vezes a reguinha vermelha está contida na amarela"?

Quanto às outras maneiras das reguinhas serem aplicadas no ensino da Aritmética, o professor interessado poderá consultar as publicações do Prof. Gattegno.

1) Eléments de Mathématiques par les nombres en couleurs par Gattegno.

2) Initiation à la méthode "Les nombres en couleurs" – Cuisenaire G. et Gattegno C.

3) Série de Manueles "L'Arithmétique avec les nombres en couleurs." Gattegno C.

O prof. W. Servais do "Athéne du Centre, Morlarlauwels – Bélgica" num artigo publicado no Cahier nº 5 de Documentation do Ministère de L'Instruction Publique da Belgica cita entre outras as seguintes experiências aplicadas a turmas que correspondem ao nosso nível colegial:

— *Progressões Aritméticas:* Uma progressão aritmética é formada pela repetição da adição de um termo constante, a razão.

Para representar uma progressão, junta-se por exemplo, à reguinha verde claro (3), uma, duas, três vezes a reguinha vermelha (2).

Representa-se em seguida os diversos termos da progressão colocando sucessivamente uma debaixo da outra (no plano horizontal) uma reguinha verde claro seguida de uma vermelha, uma verde claro seguida de 2 vermelhas e assim por diante.

Chega-se assim à configuração muito sugestiva em escadinha, em que cada degrau representa a razão.

A lei de formação do n — ésimo termo é obtida por indução. Ela torna-se imediata quando o aluno percebe que o comprimento obtido ao colocar a n — ésima reguinha ele tem na sua frente uma reguinha verde clara e (n—1) reguinhas vermelhas.

Com esta configuração várias propriedades tornam-se imediatas:

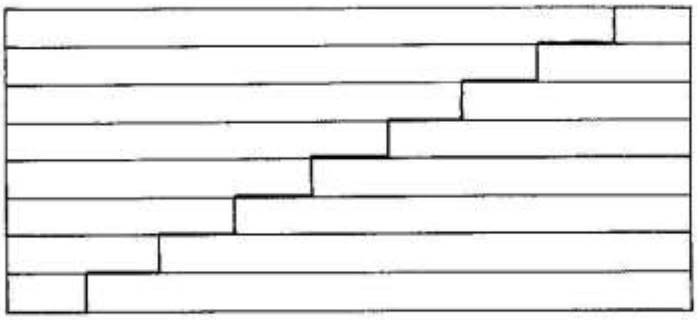
a) Partindo-se de 2 quaisquer termos da progressão passamos aos termos intermediários vizinhos (o sucessivo do 1º e precedente ao 2º) e verificamos que num caso somamos uma razão e no outro subtraímos uma razão de modo que a soma dos 2 novos termos é igual à soma dos 2 termos escolhidos inicialmente.

b) cada termo é média aritmética dos termos que o ladeiam.

c) a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

Esta última propriedade se torna compreensível formando 2 vezes a mesma progressão sob a configuração de escadinha, uma vez crescente e outra vez decrescente.

Encaixando-se de maneira a formar um retângulo, observa-se que em cada linha o comprimento total é igual ao comprimento do último termo com o primeiro.



d) A soma dos termos de uma progressão é visível por esta mesma configuração do retângulo formado acima. Deste modo a dedução da fórmula da soma nos leva a dedução da área do trapézio, pois, basta imaginarmos, que as reguinhas se tornam infinitamente mais finas para chegarmos, no limite, à dois trapézios.

Por um atalho chegamos à 1ª noção de cálculo infinitesimal (ou integral).

– *Progressões Geométricas* são formadas pela repetição da multiplicação por um fator constante, a razão.

Com o auxílio das reguinhas o produto de dois números é indicado superpondo as reguinhas correspondentes, cruzando-as em ângulo reto.

Para representar as progressões geométricas superpomos a uma reguinha inicial sucessivamente outras reguinhas, todas iguais entre si cruzando-as cada vez.

Forma-se assim uma torre japonesa representando um elemento da progressão.

A analogia, com a construção da progressão aritmética traz imediatamente como um jogo a transformação das fórmulas.

Quando o manejo dos modelos que representam as duas progressões se tornar familiar chega o momento de introduzir a noção do isomorfismo entre a adição e a multiplicação. Faz-se compreender imediatamente como, por meio deste isomorfismo, a unidade, elemento neutro da multiplicação, corresponde ao zero, elemento neutro da adição. Está assim aberto o caminho para a introdução do conceito do logarítmo por meio das progressões.

— *Análise Combinatória* — Existindo esse material na escola, também pode ser utilizado como objetos diferenciáveis pela cor e pelo formato para se compreender bem os diferentes tipos de agrupamentos estudados na análise combinatória.

O professor W. Servais afirma ter usado esse material e ter obtido ótimos resultados. Os alunos, apesar de tatearem um pouco no começo, depois "descobriram" por si só as fórmulas.

Com este material ou outro qualquer do mesmo gênero chega-se a uma demonstração não tradicional das combinações simples.

Para formar uma combinação simples de $\underline{m}$ objetos tomados $\underline{n}$ a $\underline{n}$, basta separar $\underline{n}$ destes objetos a direita deixando a esquerda os (m--n) objetos restantes.

O número de combinações simples é então o mesmo que o número de permutações com repetição de $\underline{m}$ objetos quando consideramos que os $\underline{n}$ objetos a direita representam o mesmo objeto repetido $\underline{n}$ vezes, o mesmo acontecendo com os (m—n) restantes, logo:

$$C_m^n = P_m^{n,\ (m-n)}$$

— Na *Teoria dos Conjuntos:* Na conceituação de conjuntos, subconjuntos, conjunto unitário, conjunto vazio, conjuntos complementares, partições, relações de equivalência, conjunto quociente e relações de ordem.

A utilização deste material para este fim não se distingue da utilização de outro material qualquer diferenciável pela cor e pelo tamanho.

— Na *Geometria:* Sendo as reguinhas prismas retangulares, podem ser elas usadas para ilustrar as propriedades destes sólidos.

Em particular, sendo a reguinha branca um cubo, podemos através dela, investigar suas propriedades e quais as propriedades comuns ao cubo e aos prismas retangulares. Aliás, a este respeito, é interessante notar que os alunos reconhecem com dificuldade que o cubo pertence à classe dos prismas, devido ao fato de ser ele habitualmente estudado separadamente. Por meio das reguinhas este defeito é facilmente sanado.

Além disto pode-se, por meio de elásticos, empilhar reguinhas iguais de modo a formar prismas retangulares de dimensões desejadas, e estudar deste modo áreas e volumes.

Como derradeira aplicação, as reguinhas podem ser usadas como simples barras para, sobre uma mesa, construir modelos de polígonos.

MECANO

É um material de fácil aquisição, pois, é um jogo manuseado pelos meninos de mais de 8 anos. A sua maior aplicação é no estudo da geometria devido a sua rigidez aliada a sua fácil articulação.

Exemplos:

— *Estudos dos Triângulos*

A manipulação deste material permite que o aluno tire por si só várias conclusões:

• Não se pode, por exemplo, tomar ao acaso três quaisquer barras para formar um triângulo, pois, em alguns casos "ele não fecha" (no caso em que a medida de um lado é maior que a soma das dos outros dois).

• Uma vez construído um triângulo ele não pode ser articulado, isto é, o triângulo fica fixo, mesmo quando se exercer pressão sobre os vértices ou sobre os lados; isto significa que todas as crianças acabam construindo triângulos congruentes utilizando barras equivalentes. Descobrem assim, um dos casos de congruência de triângulos, exatamente aquele que é mais difícil de ser demonstrado da maneira tradicional.

De maneira análoga mostram-se os outros casos.

O aluno tem realmente a sensação de "descobrir" algo. As vezes ele não é capaz de prever os resultados sem manipular o material.

• Pode-se sugerir aos alunos de construir um triângulo dados dois ângulos.

A 1ª pergunta será: "a partir de que base devemos começar a construção"?

A resposta do professor será: "Qualquer uma".

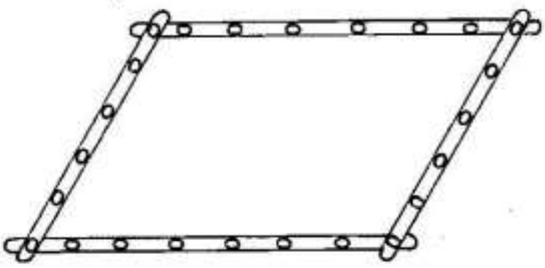
Os alunos não precisam nem acabar a construção para perceber que os triângulos assim formados não são congruentes, mas eles possuem algo em comum: "a forma".

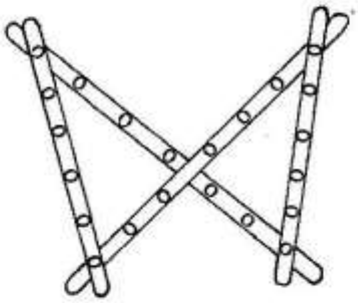
Observa-se assim que para construirmos triângulos congruentes temos que fixar *3 condições mínimas* das quais uma pelo menos é linear.

– *Estudo dos Quadriláteros*

Também neste caso o manuseio deste material faz com que o aluno retire conclusões; a mais interessante é o estudo dos paralelogramos isoperímetros, que os alunos têm normalmente a tendência de considerar congruentes.

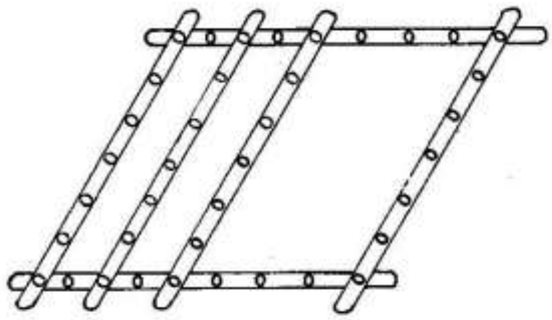
Por meio de experiências sucessivas o aluno distingue facilmente as duas noções.

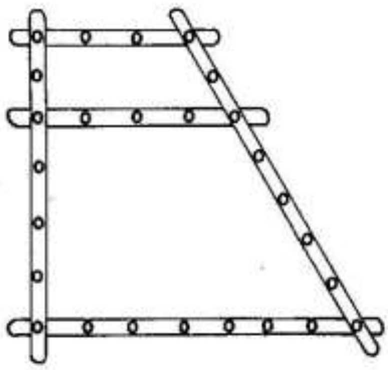




– *Construção de vários aparelhos*

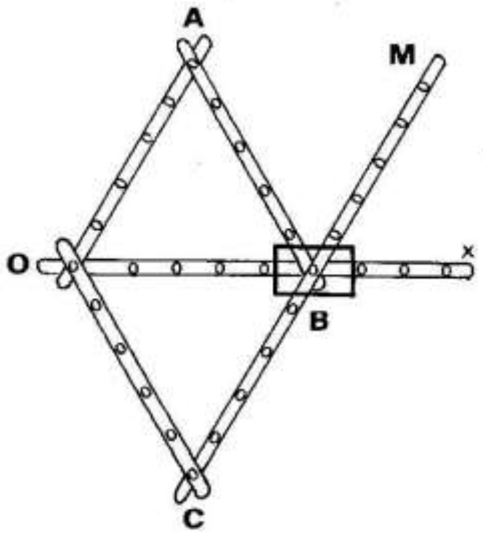
• Aparelhos para dividir um segmento de reta em segmentos proporcionais a números dados permite traçar paralelas eqüidistantes.



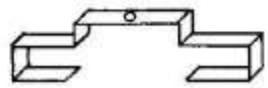


- Elipsógrafo: aparelho que permite o traçado de 1/4 de elipse.

Para este aparelho é preciso também da fabricação do cursor.



Constrói-se um losango articulado AOCB sendo que o lado CB será formado de uma barra mais comprida, de modo a possuir o prolongamento BM.

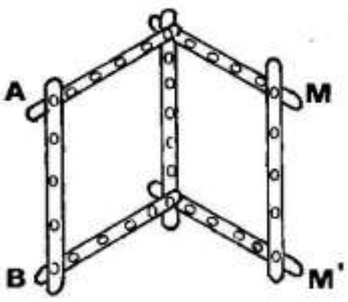


cursor B

O eixo $\overleftrightarrow{OX}$ é uma das diagonais prolongadas do losango. Munindo a articulação B de um cursor que permita ao vértice B deslisar sobre o eixo $\overleftrightarrow{OX}$, com uma ponta de lápis colocada em M, traçaremos um quarto de elipse.

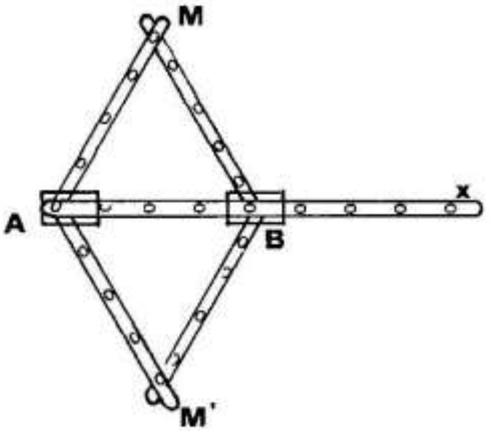
– *Aparelho para estudo das transformações*

- Translação: Translador de Kempe (duplo paralelogramo articulado)



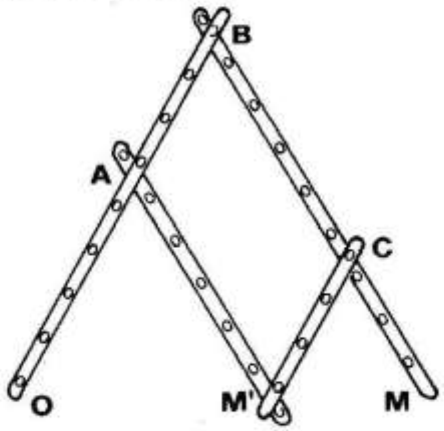
AB sendo fixo, M' será transformado de M, pela translação $\overrightarrow{AB}$.

• Simetria em relação a uma reta.



Construindo o losango ABMM' com dois cursores nos vértices A e B e fazendo deslizar os vértices mencionados sobre o eixo $\overleftrightarrow{OX}$, suporte da diagonal $\overline{AB}$, a cada posição de M teremos o seu transformado M' pela simetria em relação a reta $\overleftrightarrow{OX}$.

• Pantógrafo (aparelho que serve para reproduzir um desenho numa certa escala). Estudo das homotetias.



Seja a homotetia de centro 0 e de razão 2/3. Construamos o pantógrafo da seguinte maneira:

Consideremos como unidade de comprimento a distância entre dois furos consecutivos de uma mesma barra. Tomemos a barra OB de 24 unidades e OA de 16 unidades. Construamos o paralelogramo como na figura de modo que os pontos O, M e M' fiquem alinhados; para tal o segmento CM deve medir a metade de BC. Com o ponto 0 fixo e duas pontas de lápis, uma em M' e outra em M, fazendo o lápis em M descrever o desenho, o lápis em M' nos dará o desenho homotético na razão desejada.

Combinando estes 3 aparelhos básicos (que nos dão os 3 tipos de transformações) podemos estudar produtos de transformações e por meio de muitos exercícios chegarmos de uma maneira experimental à estrutura de grupo.

GEOPLANO

Existem dois tipos de geoplano:

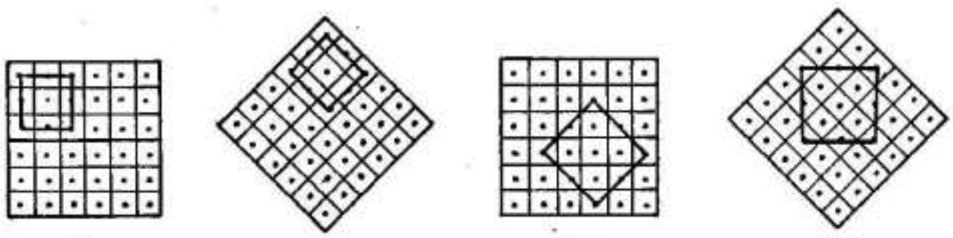
- Uma tábua sobre a qual estão pregadas taxas e traçado, em baixo relevo, um reticulado (com as taxas nos centros dos quadrados do mesmo).

- Uma tábua com taxas nos vértices de um polígono regular e outra no centro do polígono.

Em ambos os tipos, com elásticos de cores diferentes esticados e presos nas taxas, os alunos formam polígonos.

– *Aplicações do geoplano*

- Figuras geométricas: Os alunos do 1º ano ginasial sabem normalmente reconhecer uma figura geométrica simples (quadrado, retângulo, triângulos, paralelogramos, losango e outros) sempre que eles ocupem uma posição particular. Um quadrado, por exemplo, não é reconhecido se uma de suas diagonais for horizontal.



(1) (2) (3) (4)

Apresentamos aos alunos o geoplano na posição da figura (1) e perguntamos qual o nome da figura. A resposta de que é um quadrado é unânime.

Colocamos o geoplano na posição da figura (2) sem deslocar o elástico.

Repetindo a pergunta, alguns alunos responderão que é um losango.

Repetimos o movimento inicial várias vezes sem comentários.

Não precisamos intervir para que se crie na turma uma situação de debates com forte maioria a favor do quadrado.

Apresentamos uma nova situação (figura (3)) e perguntamos o nome da figura formada.

Teremos ainda alguns alunos respondendo que é um losango.

Colocamos o geoplano em uma outra posição (figura (4)) sem deslocar o elástico e repetimos a pergunta.

Só a esta altura passamos à pergunta: "por quê?"

As respostas farão aparecer uma definição correta do quadrado.

Nesta situação um professor habilidoso, aplicando vários outros exercícios, pode retirar o máximo das observações dos alunos.

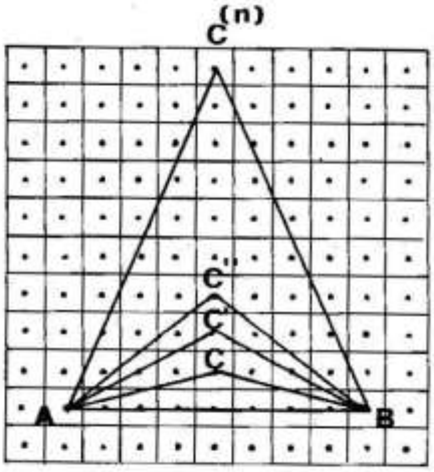
- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Queremos que os alunos fixem a sua atenção sobre os ângulos internos de um triângulo, que observem estes três ângulos e que esta observação seja espontânea.

Os ângulos, assim como os lados ou um elemento qualquer de uma figura, não são objeto de observação quando a figura é estática. A observação nasce desde que haja uma variação.

A comparação de dois ou mais triângulos, poderá fazer concluir que a medida de certo ângulo é maior ou menor do que a do outro, ou que alguns ângulos são congruentes. Mas trata-se de uma observação que não conduz a nada. Para que a observação seja construtiva no sentido matemático da palavra é preciso que se passe de um caso ao outro de uma maneira contínua. Um filme seria o ideal, mas, não sendo sempre possível este recurso, o geoplano ajuda bastante.

Coloquemos um elástico entre A e B e formemos os triângulos consecutivos ABC, ABC', ABC", —— $ABC^{(n)}$. Façamos os alunos observarem todos os triângulos obtidos e escrever livremente suas observações.



Os alunos observarão com certa facilidade que a base é sempre a mesma, que a altura varia, que os triângulos são isósceles, que a área muda, que o perímetro muda e também que as medidas dos ângulos mudam. Observarão que enquanto a medida do ângulo do vértice diminui, as dos ângulos da base aumentam.

Repetindo várias vezes o movimento de baixo para cima e de cima para baixo, induzimos o aluno a pensar nos dois casos limites: o caso dos lados se tornarem paralelos e a medida do ângulo do vértice tender para zero e o caso em que a do ângulo do vértice tende para 180º.

Nesta altura fazemos novamente o aluno escrever suas observações. Muitos alunos concluirão que o que se perde num ângulo se ganha nos outros dois e que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, será sempre igual à dos dois casos limites.

Isto acontecerá devido a uma característica do ser humano que faz com que ele deseje sempre encontrar algo constante.

Lembremos que os antigos gregos, os primeiros geómetras da humanidade, entre eles Zenão, ao quererem determinar a quadratura do círculo, julgaram ser sua área a média aritmética entre as áreas dos polígonos semelhantes, um inscrito e outro circunscrito. Eles também concluíram erroneamente, que o que se perde de um lado se ganha do outro.

No nosso caso presente este desejo de encontrar sempre algo constante é útil, pois, leva a uma conclusão verdadeira, não havendo necessidade do professor alertar o aluno de que este raciocínio através das situações limites, nos leva às vezes a erros, como no caso da quadratura do círculo e de outros.

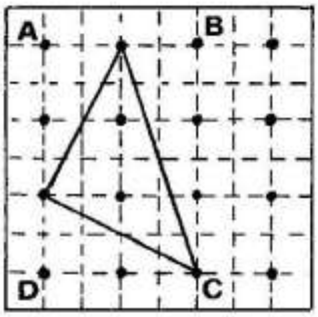
– *Áreas das figuras*

Formamos, com os elásticos, diferentes figuras que delimitam superfícies no geoplano. Adotamos por unidade de área a medida da superfície compreendida entre 4 taxas que sejam os vértices do menor quadrado possível.

Com esta premissa o professor poderá fazer exercícios que dêm oportunidade rápida de recapitulação das fórmulas relativas às áreas das figuras geométricas clássicas. Mas também, o que é mais importante, fará desenvolver no aluno faculdades importantíssimas na matemática que são: atenção e imaginação.

Para avaliar áreas o professor poderá instigar o aluno a usar outros processos além da aplicação de fórmulas como seja a decomposição do geoplano em partes menores a serem adicionadas ou subtraídas.

Por exemplo:

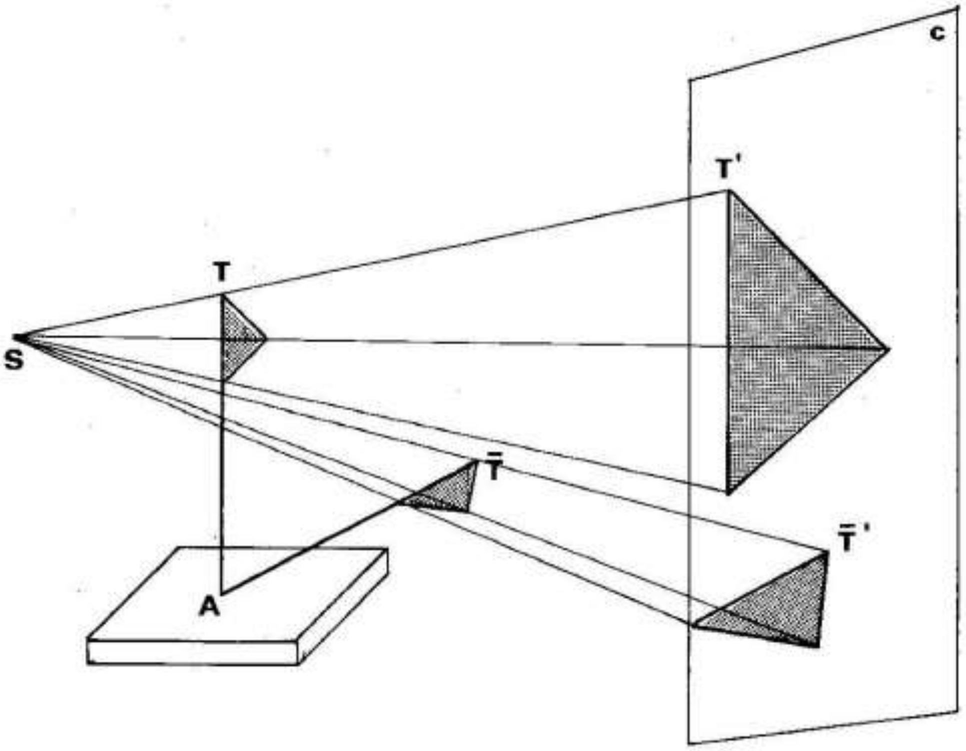


Para calcular a área do triângulo formado pelo elástico, o aluno pode calcular a área do retângulo ABCD e retirar as áreas excedentes.

Assim o aluno facilmente calculará: 6 quadrados − (1+1+1+1/2) quadrados = 5/2 quadrados.

OUTRO MATERIAL DIDÁTICO muito interessante é um aparelho de fácil construção que permite dar a noção de semelhança de triângulos.

O aparelho é constituído de uma lâmpada puntiforme S, colocada a uma certa distância de um anteparo c. Entre S e c coloquemos um triângulo de papelão T sustentado por uma haste contida no plano do triângulo e enfiada em A sobre um suporte horizontal de modo a poder girar em torno de A.



Em particular poder-se-á fazer girar a haste, no plano perpendicular ao anteparo.

O triângulo está fixado à haste de tal maneira que numa de suas posições possa ser paralelo ao anteparo. Na figura acima os triângulos T e T' são semelhantes (T paralelo ao anteparo) enquanto que o triângulo T e $\overline{T}'$ não o são.

Pela descrição não se pode imaginar o quanto a observação das sombras do triângulo são sugestivas; estas sombras se deslocam e mudam de tamanho e de forma a medida que mudamos a posição da haste. Entre todas essas sombras há somente uma que possue a mesma forma que a do triângulo dado; sobre o anteparo há um só triângulo semelhante ao triângulo dado.

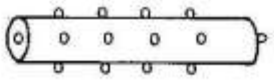
Em seguida passamos desta experiência qualitativa a uma experiência quantitativa, fazendo os alunos medir. Poder-se-á verificar que se T' tem a mesma forma que T, a cada ponto P de T corresponderá um outro ponto P' de T' que se encontra sobre a reta $\overline{SP}$ e tal que med. $(\overline{SP}') = k$. med. $(\overline{SP})$.

Como dissemos este aparelho serve para introduzir a noção de semelhança, pois só se pode chegar a uma definição através da observação e só se pode observar quando se começa por uma experiência.

A experiência à qual nos referimos permite ao aluno fazer um grande número de "descobertas matemáticas" e ao professor "observações psicológicas".

MONTE-PINOS

Para a introdução das diferentes bases de numeração usamos, com muito proveito no Instituto de Educação da Guanabara e em outras escolas, o jogo monte-pinos. Este jogo é formado de bastonetes cilindrícos todos do mesmo tamanho, munidos de um sistema de encaixe que permite sejam eles reunidos em 3 direções.



Cada bastonete representa uma unidade de 1ª ordem.

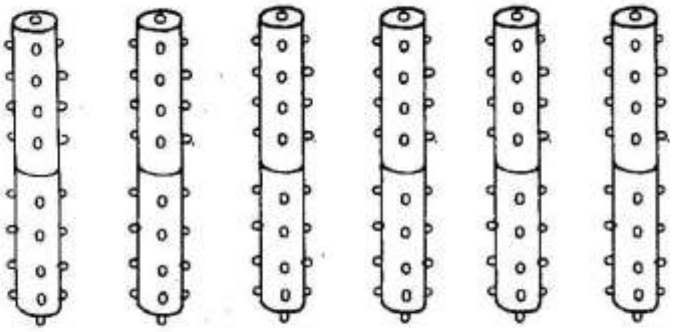
Damos a cada aluno uma quantidade de bastonetes e pedimos que sejam reunidos, de acordo com a base, no sentido longitudinal. Formam-se assim unidades de 2ª ordem, sob a forma de bastões mais compridos que o bastão unidade, todos do mesmo tamanho de acordo com a base dada. Provavelmente sobrarão bastões-unidades que não foram suficientes para formarem uma unidade de 2ª ordem. Estes serão reservados para serem computados no final.

Reunindo os bastões-unidade de 2ª ordem num dos outros sentidos, formaremos uma ou mais unidades de 3ª ordem, cujo aspecto é aproximadamente de uma tábua. Aqui também podem ou não sobrar bastões de 2ª ordem. Os que sobrarem serão reservados juntos com os de 1ª ordem remanescentes.

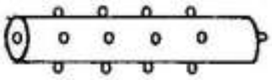
Repetimos a operação com as tábuas de 3ª ordem, formando aproximadamente paralelepípedos, que representam unidades de 4ª ordem.

Exemplo: Tomemos 13 bastonetes e escrevamos o número 13 na base 2.

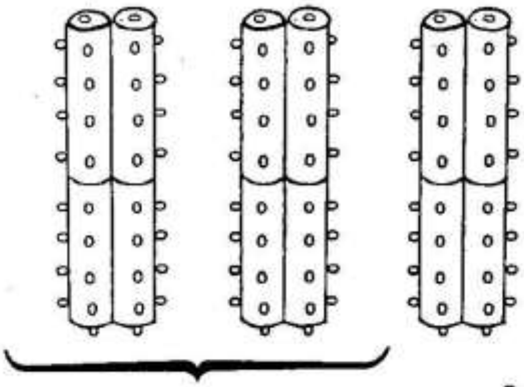
1ª etapa



Sobra:



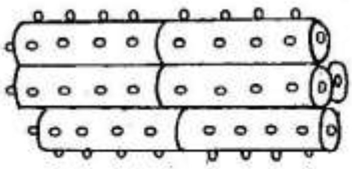
2ª etapa

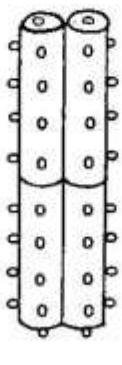


Não sobra nada

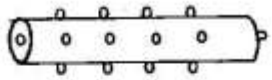
Sobra

3ª etapa





Sobrou



$13 = 1101_{(2)}$

Note-se que com este material não podemos ir além das unidades de 4ª ordem, mas isto é o suficiente para o aluno observar e tirar as suas conclusões depois de ter efetuado várias experiências.

AUDIO-VISUAL

Dentro das técnicas modernas surge com grande destaque o auxiliar audio-visual.

Desde longa data, todos aqueles que desejam transmitir ao público informações, utilizam-se dos meios audio-visuais. Aliás estes auxiliares são mais antigos do que a própria instituição da escola como organismo regular.

No Egito descobriu-se uma antiga inscrição que diz: "Quando os olhos vêem, quando os ouvidos ouvem, tudo chegará ao coração".

Um velho provérbio chinês afirma que: "Uma imagem vale por 5000 palavras".

Na idade média quando a linguagem escrita era bem pouco difundida os padres ensinavam religião ao povo por meio dos "mistérios", reproduções ao vivo de passagens da história sagrada.

Também os jesuítas na catequese dos índios do Brasil usaram o mesmo processo.

A rigor de termos, o próprio quadro negro e o giz poderiam ser considerados um recurso audio-visual, mas, devido a sua larga difusão, quando nos referimos aos auxiliares audio-visuais nos estaremos referindo a quadros murais, discos, filmes, retroprojetor, gravador, televisão etc. . .

A ciência já comprovou que para ouvirmos dois sons consecutivos nitidamente é preciso que haja entre um e outro um intervalo de 1/10 de segundo, enquanto que para vermos distintamente duas imagens basta que o intervalo seja de 1/23 do segundo. Isto quer dizer que o cérebro capta as impressões visuais 2 vezes e um terço mais depressa do que as auditivas. Isto não exclue a utilização da palavra no processo da aprendizagem. As duas técnicas devem vir sempre combinadas de uma maneira bem dosada.

Os alunos, na sua capacidade sensorial classificam-se em 3 tipos: visuais, auditivos e mistos.

O fato de que a maioria esmagadora pertença ao 1º tipo, não exclue que haja necessidade da explicação da imagem, pois, este 1º tipo é o grupo dos alunos que aprende melhor quando *vê também* e não quando *vê somente*.

* * *

Como já foi citado no artigo anterior, este artigo data de 1967. Muitas das técnicas descritas eram, na época, desconhecidas e hoje em dia são muito utilizadas, em particular as reguinhas de Cuisinaire. No artigo original descrevíamos o Ensino Programado hoje pouco apreciado por ser considerado adestrador.

TRANSLAÇÕES E SIMETRIAS NO PLANO

Estela Kaufman Fainguelernt
Noelir de Carvalho Bordinhão
USU – GEPEM

Ao Caro Mestre José Carlos de Mello e Souza

Hoje é o amanhã de ontem e o ontem de amanhã. Ontem desfrutávamos da companhia do querido mestre José Carlos de Mello e Souza e aproveitávamos suas intervenções sempre claras, simples e sábias. Hoje, cabe a nós levar adiante suas idéias e conselhos tentando passá-los aos nossos colegas e alunos.

Uma de suas constantes observações sempre nos vem à memória – "Aprender Matemática, dizia, é como aprender a nadar. Os movimentos necessários parecem simples a um observador. No entanto, para consegui-los é preciso começar batendo os pés, depois os braços, treinar a respiração e o fôlego, também, às vezes, "engolir água", enfim exercitar-se progressivamente até poder flutuar e nadar com tranquilidade. Aquele que apenas observa e depois se atira na água, tentando imitar, certamente se atrapalha, se afoga ou fica com horror à água."

Nós estamos, cada vez mais, convencidas de que para aprender matemática é preciso "fazer matemática" gradativamente. Não podemos ficar restritos à mera aplicação de fórmulas e de resultados estabelecidos pois assim "afogaremos" nossos alunos. É fundamental partir da intuição, de dados concretos e experimentais, explorar as aplicações, desenvolver o raciocínio lógico para, só então, chegar aos processos de abstração e de generalização.

A geometria oferece um vasto campo de idéias e métodos que se prestam especialmente a este tipo de abordagem. As transformações do plano, por exemplo, podem ser introduzidas desde as primeiras séries do 1º grau; as crianças adquirem seus conceitos intuitivamente vivendo situações, executando movimentos e mexendo com figuras. A partir da 5ª série tais noções começam a ser organizadas, porém de forma elementar. Ao longo do 2º grau o aluno já é capaz de utilizá-las no estudo das funções, na construção de gráficos, no estudo dos vetores e das matrizes etc; ao final do 2º grau as transformações já podem ser tratadas na sua forma abstrata a qual fornece modelos matemáticos aplicáveis a outras áreas de conhecimento.

Exemplificando, e sem nenhuma pretensão de esgotar o assunto, apresentamos algumas atividades referentes a transformações do plano tiradas de nossa vivência em sala de aula. Selecionamos apenas duas delas: a *translação* e a *simetria*. Naturalmente as demais podem ser tratadas de maneira análoga. Com estes exemplos, pretendemos ilustrar três dos momentos da vida do aluno em que os mesmos conteúdos são abordados dentro do seu nível de desenvolvimento e capacidade de apreensão, sem perder de vista a conceituação matemática correta.

Iniciamos com o significado destas palavras na linguagem corrente, segundo o "Aurélio".

TRANSFORMAÇÃO – "É o ato ou efeito de transformar; metamorfose."

TRANSLAÇÃO – "É o ato ou efeito de transladar, de transportar. É o movimento de um corpo no qual todas as partículas têm, em cada instante, a mesma velocidade e esta mantém a direção constante."

SIMETRIA – "Correspondência em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha, ou de um plano médio ou ainda que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo."

Podemos observar que as definições acima estão ligadas à idéia de movimento; o que as diferencia é a forma como esse movimento se processa. Assim, *antes de definições ou fórmulas*, o aluno deve perceber, assimilar e utilizar estas diferenças.

Exemplos de Atividades

ATIVIDADE 1

Nesta etapa o aluno é levado a adquirir intuitivamente as noções de translação e de simetria através de atividades, tais como:

- Realizar movimentos com o próprio corpo ou com objetos (carteiras, livros, esquadros etc.), deslocando-os ou colocando-os simetricamente e descrevendo verbalmente os movimentos efetuados.

- Identificar os movimentos de figuras.

Ex.: Observe as figuras e diga o que ocorreu na passagem da fig. 1 para a fig. 2.

a)

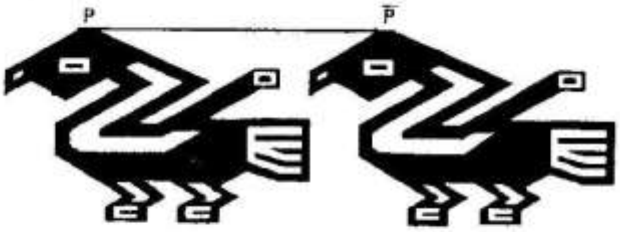


fig 1 fig 2

b)

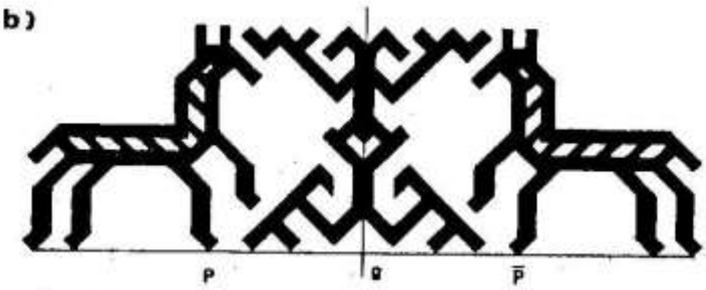


fig 1 fig 2

c)

fig 1

fig 2

d)

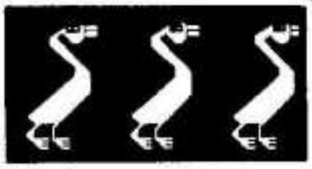
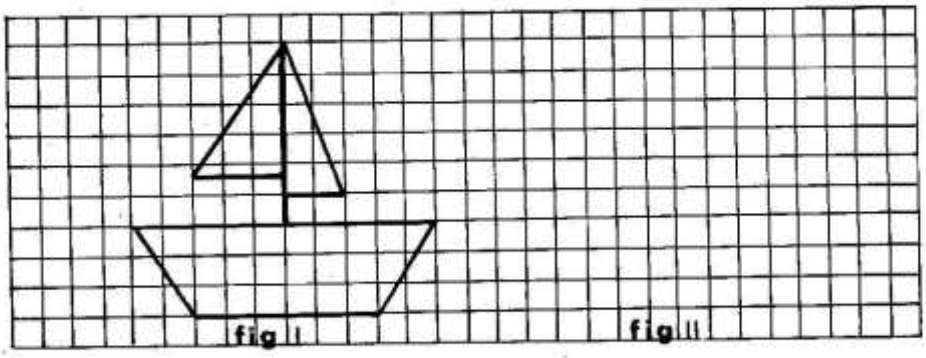


fig 1

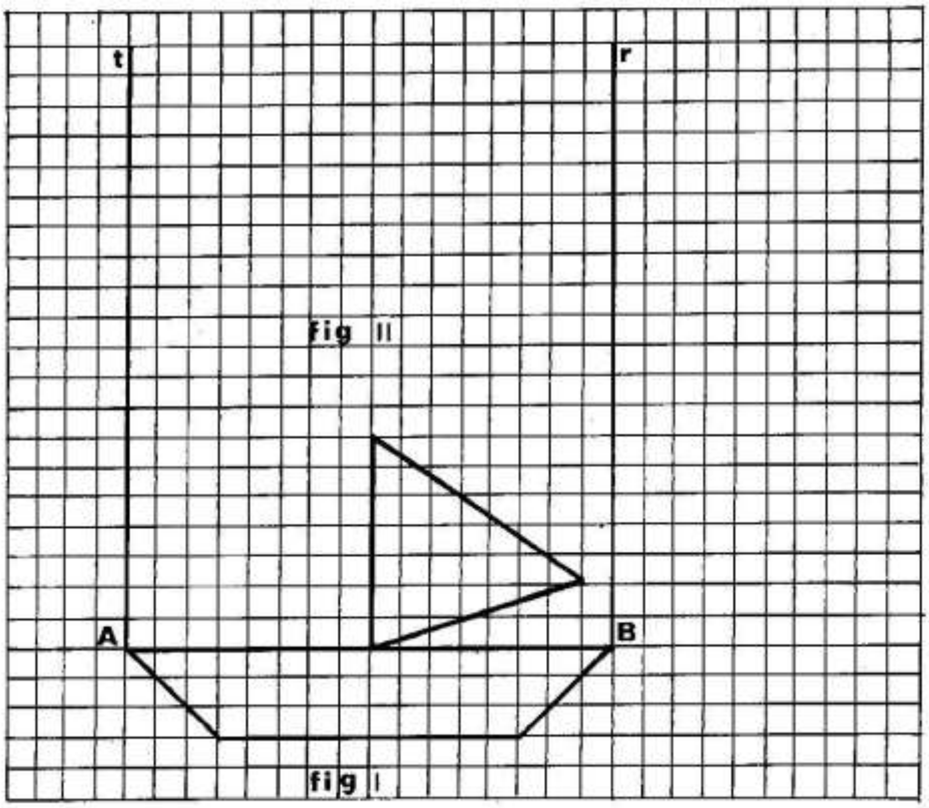
fig 2

- Reproduzir os movimentos, escolhendo e desenhando uma figura que represente o movimento identificado.

Ex.: (1) a) Reproduza, por translação, no espaço ao lado a figura I, obtendo a figura II:



(2) a) Observe a figura I abaixo:



b) Decalque em papel transparente a figura I e marque os pontos A e B.

c) Mantendo o decalque entre as retas r e t, desloque-o para cima e reproduza a figura no papel quadriculado (figura II).

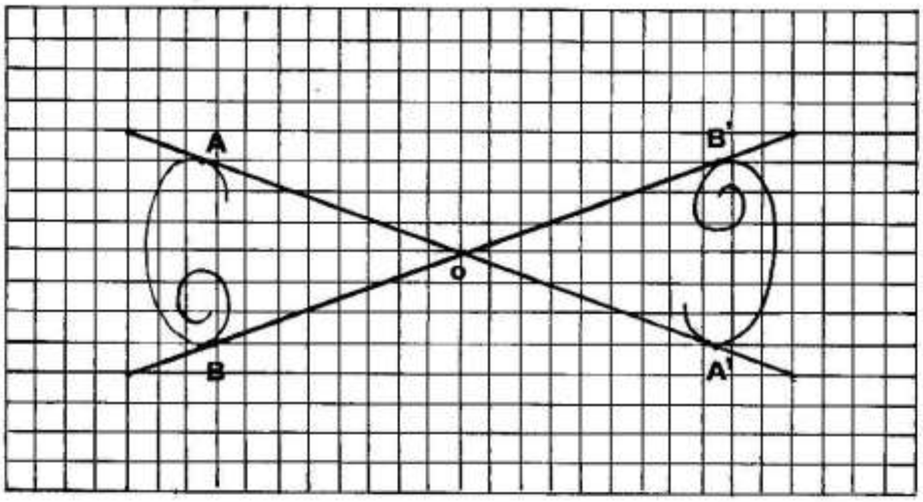
d) Compare as figuras I e II e determine:

- as semelhanças: ______________________________
- se elas são do mesmo tamanho: ______________________
- se elas ocupam a mesma posição no plano: ______________

e) A figura II é uma transformada da figura I? ______ Por quê?

____

(3) a) Observe a figura abaixo:



b) Meça com a régua e complete:

- m($\overline{OA}$) = ____________________
- m($\overline{OB}$) = ____________________
- m($\overline{OA'}$) = ____________________
- m($\overline{OB'}$) = ____________________

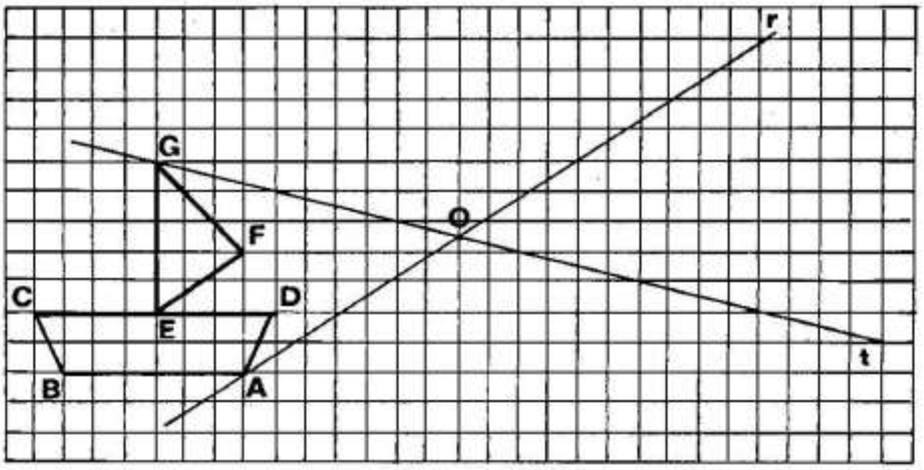
c) Compare as medidas utilizando > , < ou = :

- m($\overline{OA}$) ________ m($\overline{OA'}$)
- m($\overline{OB}$) ________ m($\overline{OB'}$)

d) A transformação apresentada é uma simetria central?
Em caso afirmativo, indique o centro de simetria: __________

____

(4) Encontre os transformados das figuras abaixo, aplicando a simetria central, sendo O o centro de simetria:



(5) a) Observe a figura: