estrutura da linguagem. Nós não temos o direito de matematizar fora do limite nitidamente prescrito pelos requisitos do matematismo, símbolos convencionais e leis, regras de construção de proposições, de derivação de proposições e de criação de teoremas. Alí, sim, é o domínio do certo e do errado, daquilo que vai unidirecionalmente como conseqüência fatal - logo, portanto, por conseguinte, inevitavelmente... - e se chega àquilo que foi dito antes. Isto porém depois de um trajeto tão luminosamente delongado, claro, glorioso, que é como se se tivesse chegado a alguma coisa nova, que não é se não o desentranhamento daquilo que já foi dito antes, mas que é elástico, flexível, rico e que se espraia como uma luz que avança sobre a escuridão.

E no campo da não-razão matemática? No campo da prova não analítica? Aqui, geralmente, os intelectuais ocidentais reduziram toda a prova. Este é um grande equívoco, diz Perelman. Reduziu-se toda a prova à prova analítica. Fez-se de um tipo raro de convicção, a evidência, o parâmetro para todo tipo de adesão a qualquer tipo de proposta, quando muitas propostas não podem ser evidentes, nem podem ser assumidas enquanto evidentes.

As escolhas que fazemos no dia-a-dia - votamos neste ou naquele? compramos isto ou aquilo?... - a angústia existencial, para dar uma expressão "à la Sartre", não se resolve com nenhum tratado de Lógica ou de Matemática. Ela é irredutível ao matematismo. As escolhas políticas, éticas, estéticas, afetivas, de todos os tipos, são escolhas que, pensamos, têm um fundo de racionalidade. É um fundo de racionalidade, já, ou é um estofo de racionalidade de outro tipo, que permite ainda trabalho de racionalidade, sim, de racionalização, mas não de racionalização analítica, mas quem sabe, de um jogo, de um confronto, um sopesamento, um pesamento, um pensamento. Como é que nós nos decidimos? Transformando isto ou aquilo em teoremas? Jamais, dirá Sartre. Nós, humanos, concretos, contingentes, não somos o caso particular de uma lei geral. Não somos uma espátula, por exemplo, entre muitas espátulas. Nós temos uma singularidade, uma concretude, uma contingência que faz com que jamais possamos definir as nossas escolhas com a tranqüilidade - e aí estão nossas angústias - de um professor de Matemática que diz: aqui ele errou, aqui está errado, zero. Nós não podemos dar zero a nenhuma das argumentações que nós mesmos fazemos conosco, submetendo-nos às nossas próprias provas dialogando conosco mesmos, numa dialógica que, como mostra Platão no Fedro, começa neste jogo do pensamento consigo mesmo. Eu sou um outro diante de mim e argumento diante de mim como se eu fosse um advogado que tenha diante de sí um outro promotor e tenho causas para optar o tempo todo e na vedade pensar no sentido humano, humanístico das Humanidades, das Ciências Sociais. Pensar humanamente não é deduzir analiticamente, não é dos analíticos de Aristóteles, cair no Discurso do Método, nas regras do método de Descartes, é na verdade arbitrar, julgar como um juiz diante de processos, de depoimentos de dois litigantes que podem estar dentro de mim ou diante de mim. Não há a unidade em que eu sou um réu, um juiz e um advogado. Eu sou sempre um ser dilacerado e múltiplo. Todas as minhas escolhas, quaisquer que elas sejam, na verdade, têm um pró e um contra e nós sopesamos em cada caso o pró e o contra. Começamos a tirar do bolso aquilo que Zeus tira na Ilíada para apaziguar os ânimos das deusas, umas torcendo para os gregos e outras para os troianos. Zeus, atormentado por aquela fofoca olímpica e divina, nem pode dizer qual é sua opinião. Então tira uma balança de ouro. É a balança de um pesamento, de um pensamento. Surge então o Zeus juiz, árbitro que vai julgar agora não no sentido definitivo - vão embora, que nenhuma de vocês tem razão, oh defensoras dos troianos! ou oh! defensoras dos gregos! - na verdade havia razões e razões, umas mais fortes outras mais fracas. Mas pensando, pesando, sopesando, ponderando, e fazendo com que a balança não fique estática, mas penda no ato de pensar, pesar, sopesar, ponderar, efetua-se uma ação de relacionar argumentações diferentes. Por isto quero lembrar que o que Perelman diz daí por diante é o seguinte: Ao contrário do que pensava Descartes e o que passaram a pensar os pós-cartesianos até à euforia cienticista dos positivistas e neo-positivistas, o modelo matemático nem é único, nem é um modelo para ser usado indiscriminadamente e universalmente. Pelo seu valor, pela sua grandeza e pela sua utilidade ele tem que ser preservado no seu lugar que é o seu limite. Deve ser preservado naquilo que ele é e para aquilo que ele foi feito. Transferí-lo para o território da linguagem não formal, que não é seu território de direito, é cometer um crime de autoritarismo. É querer impor uma prova analítica onde tem que haver, e tem que continuar havendo, o debate, o conflito, a dialética, a argumentação e a persuasão.

Por outro lado, fora disto, que é o campo da nossa linguagem natural em todos os níveis, até nos níveis das chamadas Ciências Humanas e Sociais e da Filosofia, no campo da História e da Sociologia, e assim por diante, o modelo não pode ser o matemático. Não cabe aí o modelo matemático. O modelo é, sempre foi, ainda que os participantes destas áreas não o percebessem, o modelo jurídico. Quem pensa na Sociologia ou na História, quem interpreta de novo a Revolução Francesa ou quem dá uma nova explicação do Golpe de 64, ou quem..., na verdade está propondo uma tese, está defendendo uma tese e é pena que para nós, acadêmicos, a tese seja um ritual frequentemente esvaziado da grande significação lógica e epistemológica que ela deveria ter. Alí, naquele momento da defesa da tese, existem vários advogados e alguns juízes. Mas uma pessoa está defendendo alguma coisa diante de outras opiniões, que ela tem que rebater, e no final ninguém tem razão absoluta, mas as coisas foram reformuladas e enriquecidas, frequentemente, "hélas", como dizem os franceses, quando se sai da tese se esquece que a tese era uma proposta e ela agora passa a ter fórum de verdade absoluta e perde seu caráter dialético. Torna-se dogma, torna-se aquilo que passa a ser repetido, repetido, repetido "ad nausea". Ora, Perelman diz que é pelo caminho de uma estrutura jurídica do pensamento interpretativo, permanentemente reinterpretativo, que os processos, no sentido realmente jurídico, são posto e repostos e reabertos. Recebem novos testemunhos, novas provas, novos argumentos. Vão permanentemente se refazendo sem nenhuma possibilidade de se estancarem numa conclusão definitiva, pois aquilo alí não é o caminho de uma linguagem abstrata, artefeita e atemporal, é um processo de pesamento, de ponderação, onde não significa que se entregou este campo ao relativismo do "assim é se lhe parece", "tanto faz como tanto fez", mas onde a noção de arbítrio voluntarioso que está frequentemente ligado ao relativismo, pode e deve ser substituída pela noção de arbitragem.

Intelectuais na Ciências Humanas e nas Humanidades, nós somos árbitros. Isto acarreta a responsabilidade do árbitro e também acarreta a abertura e a permanente reabertura do processo sobre o qual, provisoriamente, arbitramos. Verdadeiro, nestes campos, é aquilo que a "Cité Scientifique" como diz Bachelard, a Cidade Científica, ou, como diz o próprio Perelman, o auditório de especialistas, considera, pela força dos argumentos usados para defender a proposta, que não há nenhuma contra-proposta mais forte. Mas é preciso discutir a lógica dos argumentos, porque é lógica, não é desrazão, não é palpite nem impressionismo, é preciso estudar as estruturas do pensamento argumentativo, porque ao lado de uma razão matemática que permanentemente continua como um canto de sereia a nos atrair para uma perfeição absoluta, atemporal e desumana, por outro lado nós atravessamos, como Ulisses, um mar intenso de argumentações e é através daí que nós conduzimos a nossa vida pessoal, a nossa vida social, a nossa vida política, como seres argumentativos em confronto, em combate numa dialética permanente que não se fecha porque estamos no campo do ambíguo, do temporal, do provisório, do mutável e, felizmente, do humano.

Transcrito e adaptado pelas professoras Franca Cohen Gottlieb e Circe Novarro Vital Brasil.

OBSERVAÇÕES SOBRE O ENSINO DAS FUNCÕES LINEARES

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Professor Titular da UFRJ
Colaborador no Mestrado em Educação
Matemática da USU

O presente artigo é o resumo de uma conferência feita pelo autor na II Semana da Matemática, realizada na Universidade Santa Úrsula em maio de 1991. O objetivo é chamar a atenção sobre o aspecto geométrico das matrizes. Acredita-se que ensinar matrizes visando apenas seu aspecto calculatório torna-se pouco atraente do ponto de vista educativo. Por esse motivo, acredita-se que a parte conceitual exposta cuidadosamente, aliada à geometria, traz consigo um significante conteúdo pedagógico que não deve ser esquecido.

Limitar-se-á aos casos uni e bidimensionais.

Com $\mathbb{R}$ representa-se o corpo dos números reais, identificado geometricamente a uma reta. Considere-se um número real fixo A e uma função f definida em $\mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{R}$, definida por:

(1) $f(x) = Ax$, para todo x em $\mathbb{R}$.

Note-se que Ax é um polinômio homogêneo do grau um. Diz-se que $f(x) = Ax$ é uma função linear. Observe-se que se x e y forem dois números reais, então:

(2) $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$

Uma função satisfazendo à condição (2) diz-se aditiva. Se λ for um qualquer número real, tem-se:

(3) $f(\lambda x) = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda f(x)$

Diz-se que f, satisfazendo à condição (3), é uma função homogênea.

Conclui-se que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por (1) satisfaz às condições (2) e (3). Em geral, as funções satisfazendo às condições (2) e (3) são denominadas funções lineares.

Indaga-se o problema inverso, ao procurar caracterizar as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que são lineares, i.e., satisfazendo às condições (2) e (3).

De fato, suponhamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ homogênea, i.e., satisfazendo apenas à (3).

Tem-se para dois números reais quaisquer x e y:

(3 bis) $f(xy) = x\, f(y)$

Fazendo-se $y = 1$, e $f(1) = A$, número real fixo, obtêm-se:

$f(x) = Ax$, para todo x em $\mathbb{R}$.

Assim, as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, homogêneas, são do tipo (1), logo são também aditivas. Suponha-se que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja apenas aditiva, i.e., satisfaz à (2) para todo x e y em $\mathbb{R}$. Tem-se:

(2 bis) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Deseja-se caracterizar tais funções. Quando $x = y = 0$, obtem-se: de (2 bis) $f(0) = f(0) + f(0)$, isto é

(4) $f(0) = 0$

Quando $y = -x$, resulta $f(0) = f(x) + f(-x)$ ou seja,

(5) $f(-x) = -f(x)$

Para $y = x$ em (2 bis), conclui-se que $f(2x) = 2f(x)$. Se $y = 2x$, vem $f(3x) = 3f(x)$. De modo indutivo, prova-se que para todo número natural n, tem-se:

(6) $f(nx) = nf(x)$

Por (5) conclui-se que (6) se estende aos números inteiros $\mathbb{Z}$. Tem-se:

(7) $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

A etapa seguinte é estender (7) aos números racionais. Considere-se um número racional $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Tem-se:

(8) $f(rx) = mf\left(\frac{x}{n}\right)$, por (7).

Multiplicando ambos os membros de (8) por n e usando novamente (7), obtem-se:

$$nf(rx) = n\, mf\left(\frac{x}{n}\right) = mf(x)$$

isto é,

(9) $f(rx) = rf(x)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$.

Para concluir que a (9) vale para todo número real λ, é necessário que f, além de aditiva, seja também contínua. Supondo f contínua, considere-se um número real λ. Sabe-se que dado um real λ, existe uma sucessão $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de racionais λ_n, tal que

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n$$

Portanto,

(10) $f(\lambda x) = f(\lim_{n \to \infty} \lambda_n x) = \lim_{x \to \infty} f(\lambda_n x) = \lim_{n \to \infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$

Resulta de (10), que se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for aditiva e contínua então ela é homogênea. Portanto, pela caracterização das funções homogêneas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, resulta que f é do tipo:

(1 bis) $f(x) = Ax$,

isto é, uma função linear.

Considerando-se um sistema de coordenadas cartesiano ortogonal no plano, representa-se a função linear $f(x) = Ax$ por uma reta pela origem do sistema.

A seguir serão caracterizadas as funções lineares no plano $\mathbb{R}^2$.

Relembre-se que o plano $\mathbb{R}^2$ é o espaço vetorial de pares ordenados de números reais, com as operações:

- Igualdade: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ equivale a $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$
- Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplicação por um real $\lambda : \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Os objetos do $\mathbb{R}^2$, pares de números reais, denominam-se vetores do plano.

Os números reais que multiplicam os vetores denominam-se escalares. É educativo interpretar-se geometricamente as operações acima definidas. Diz-se que $\mathbb{R}^2$ é o plano $\mathbb{R}^2$.

Pensando-se nas funções f definidas no $\mathbb{R}^2$, diferenciam-se as que tomam valores reais, denominadas numéricas e as que tomam valores no $\mathbb{R}^2$, ditas vetoriais ou transformações do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$. Escreve-se

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente.

REPRESENTAÇÃO DOS VETORES DO $\mathbb{R}^2$.

Dado (x,y) do $\mathbb{R}^2$, escreve-se:

$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1)$

Tomando-se

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, base do $\mathbb{R}^2$, conclui-se que todo vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$, representa-se sob a forma:

(11) $(x,y) = xe_1 + ye_2$

Em $\mathbb{R}^2$, denomina-se produto escalar dos vetores (x_1,y_1) e (x_2,y_2), ao número real:

(12) $[(x_1,y_1), (x_2,y_2)] = x_1x_2 + y_1y_2$

FUNCÕES LINEARES - Diz-se que uma função f definida no $\mathbb{R}^2$, com valores em $\mathbb{R}^2$, é linear, quando for aditiva e homogênea, como em (2) e (3).

FUNÇÕES LINEARES NUMÉRICAS - Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, linear. Considere-se o vetor (x_1,x_2) do $\mathbb{R}^2$. Tem-se $f(x_1,x_2)$ é um número real. Viu-se que $(x_1,x_2) = x_1e_1 + x_2e_2$. Sabe-se que f é linear. Logo:

(12) $f(x_1,x_2) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = f(x_1e_1) + f(x_2e_2) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2)$

Sendo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se $f(e_1) = a_1$, $f(e_2) = a_2$, sendo a_1 e a_2 números reais. Portanto (a_1,a_2) é um vetor do $\mathbb{R}^2$. Fazendo $x = (x_1,x_2)$ qualquer vetor do R^2, (12) afirma que se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for linear, existe um vetor $A = (a_1,a_2)$ do $\mathbb{R}^2$, dependendo de e_1,e_2 tal que:

(13) $f(x) = [A,x]$, produto escalar de A por x.

A (13) é uma caracterização das funções do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, isto é, numéricas, lineares. A (13) afirma, que, fixada a base $\{e_1,e_2\}$ do $\mathbb{R}^2$, existe um vetor A do

$\mathbb{R}^2$, tal que para todo x do $\mathbb{R}^2$, f(x) é o produto escalar de A por x.

Como $f(x) = [A,x]$ é uma função linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, fixando-se A, conclui-se que (13) é, de fato, uma caracterização das funções lineares numéricas no $\mathbb{R}^2$.

FUNÇÕES VETORIAIS LINEARES - Considera-se uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, linear. Dado o vetor $x = (x_1,x_2) = x_1e_1 + x_2e_2$, sendo f linear obtem-se:

(14) $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2)$, pois x_1,x_2 são escalares.

Sendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tem-se que $f(e_1)$ e $f(e_2)$ pertencem ao $\mathbb{R}^2$, logo:

(15) $f(e_1) = ae_1 + be_2$; $f(e_2) = a^*e_1 + b^*e_2$

De (14) e (15) obtem-se:
(16) $f(x) = (ax_1 + a^*x_2)e_1 + (bx_1 + b^*x_2)e_2$

Examinando-se a expressão (16), deduz-se que a função linear $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, fixada a base e_1,e_2, transforma
(x_1,x_2) em $(ax_1 + a^*x_2 , bx_1 + b^*x_2)$

Represente-se por A o quadro de números reais:

$$\begin{pmatrix} a & a^* \\ b & b^* \end{pmatrix}$$

o qual denomina-se a matriz associada à função linear f, quando fixada a base $\{e_1,e_2\}$ do $\mathbb{R}^2$. Define-se, a seguir, a ação da matriz em qualquer (x_1,x_2) do $\mathbb{R}^2$. Representa-se por $(x_1,x_2)^*$ a coluna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Assim, define-se

$$\begin{pmatrix} a & a^* \\ b & b^* \end{pmatrix} \quad (x_1,x_2)^*$$

como sendo o vetor $(ax_1 + a^*x_2, bx_1 + b^*x_2)$, isto é, a primeira coordenada é o produto escalar de (a,a^*) por (x_1,x_2) e a segunda é o produto escalar de (b,b^*) por (x_1,x_2). Portanto, se $X = (x_1,x_2)$, define-se $X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(17) $\begin{pmatrix} a & a^* \\ b & b^* \end{pmatrix} (x_1,x_2)^* = AX^*$

De (16) resulta que
$f(X) = (ax_1 + a^*x_2, bx_1 + b^*x_2)$

e de (17),
(18) $f(X^*) = AX^*$

Conclui-se que dada uma f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, linear, a ela fica associada uma matriz A, com duas linhas e duas colunas, tal que f(X) é a ação de A no vetor X*. Diz-se que A é a matriz da função linear f, a qual depende da base $\{e_1, e_2\}$ fixada em $\mathbb{R}^2$.

Observe a analogia formal entre (1 bis), (13), (18).

EXEMPLOS:

1. Seja f a simetria do $\mathbb{R}^2$ em relação ao eixo dos x.

Tem-se f: $(x_1, y_1) \to (x_1, -y_1)$

Portanto: $f: e_1 = (1,0) \longrightarrow (1,0)$
$f: e_2 = (0,1) \longrightarrow (0,-1)$

Logo: $f:(e_1) = 1e_1 + 0e_2$; $f(e_2) = 0e_1 - 1e_2$

A matriz de f é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1, -y_1)$$

2. Projeção sobre o eixo dos y.

Tem-se

$f: (x_1, y_1) \longrightarrow (0, y_1)$
$f: e_1 = (1,0) \longrightarrow (0,0)$
$f: e_2 = (0,1) \longrightarrow (0,1)$

Logo:

$f(e_1) = 0e_1 + 0e_2$; $f(e_2) = 0e_1 + 1e_2$

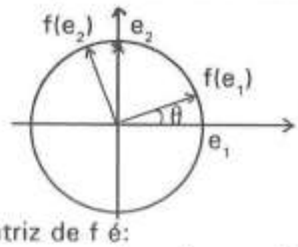
e a matriz é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (0, y_1)$$

3. Rotação do $\mathbb{R}^2$ de um ângulo θ, em torno da origem.



f: $e_1 = (1,0) \rightarrow (\cos\theta , \text{sen}\,\theta)$

f: $e_2 = (0,1) \rightarrow (\cos(90+\theta), \cos\theta) = (\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$

Tem-se:

$f(e_1) = e_1\cos\theta + e_2\text{sen}\,\theta$

$f(e_2) = e_1\text{sen}\,\theta + e_2\cos\theta$

matriz de f é:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Assim,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Quando $\theta = \frac{\Pi}{6}$, qual a imagem do vetor $x = (2,4)$ pela f? Tem-se:

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (\sqrt{3} - 2\ ,\ 1 + \sqrt{3})$$

Logo:

$$f(2,4) \longrightarrow (\sqrt{3} - 2\ ,\ 1 + \sqrt{3})$$

4. Suponha que f seja definida por:

f: $(x_1,y_1) \longrightarrow (x_1 + 2y_1, y_1)$

A f representa-se, geometricamente, por um cisalhamento paralelo ao eixo dos x.

Tem-se:

f: $e_1 = (1,0) \rightarrow (1,0)$

f: $e_2 = (0,1) \rightarrow (2,1)$

Logo a matriz é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tem-se:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1 + 2y_1\ ,\ y_1)$$

como foi definida.

5. Projeção sobre a reta $y = ax$

Dado um ponto (x_0, y_0) do $\mathbb{R}^2$, denomina-se projecão P sobre a reta $y = px + q$, o ponto de inserção desta reta com a perpendicular por (x_0, y_0). Efetuando os cálculos obtem-se:

$$P: (x_0, y_0) \rightarrow \left(\frac{x_0 + ay_0}{1 + a^2}, \frac{a(x_0 + ay_0)}{1 + a^2} \right)$$

Dai:

$$f: (1,0) \rightarrow \left(\frac{1}{1 + a^2}, \frac{a}{1 + a^2} \right)$$

$$f: (0,1) \rightarrow \left(\frac{a}{1 + a^2}, \frac{a^2}{1 + a^2} \right)$$

Assim a matriz de P é:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + a^2} & \frac{a}{1 + a^2} \\ \frac{a}{1 + a^2} & \frac{a^2}{1 + a^2} \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{(1 + a^2)^2} (x + ay, ax + a^2y)$$

que é a expressão da projeção de (x,y) sobre $y = ax$.

Se a reta não passar pela origem, tem-se a noção de projeção sobre $y = px + q$, mas não será linear.

Estuda-se o anel das matrizes do $\mathbb{R}^2$, motivando as operações com propriedades geométricas das funções lineares do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$.

Instituto de Matemática - UFRJ
Caixa Postal 68530
CEP 21944 - Rio de Janeiro - RJ

INFLUÊNCIAS DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO DO 2º GRAU

REDE SBM - ENSINO

PROJETO CIRCUNSTANCIADO

Prof. Frederico Palmeira
PUC-RJ
Coordenador das Olímpiadas Brasileiras de Matemática - SBM

O Problema

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) é uma sociedade sem fins lucrativos cujo objetivo principal é o de incentivar a pesquia científica em Matemática em nosso país.

Já há algum tempo, a SBM está convencida de que a consecução desse objetivo passa pela melhoria do ensino da Matemática nos primeiros níveis. Foi assim que, há mais de uma década, a SBM tem exercido algumas atividades ligadas à Matemática Elementar. Começou instituindo uma coleção de monografias, a Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Passou depois a realizar anualmente as Olímpidas Brasileiras de Matemática (em 1990, aconteceu a 12ª), a incentivar a realização de Olimpíadas Regionais e a coordenar, preparar e acompanhar as equipes que participam das Olimpíadas Internacionais e das Ibero-Americanas. Finalmente, como fruto de reuniões conjuntas entre professores de Matemática e matemáticos brasileiros, instituiu, em 1982, o que pretendia ser, e tem sido, um ponto de encontro entre várias comunidades comprometidas com o processo de ensino-aprendizagem de Matemática no Brasil, a Revista do Professor de Matemática (RPM).

O desafio que a SBM se colocou pode ser, portanto, resumido da seguinte maneira: como pode a comunidade matemática brasileira (professores dos três graus e pesquisadores, juntos) contribuir para o aperfeiçoamento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática nos primeiros graus em nosso país?

Num primeiro momento, já ficou claro que a atenção da SBM deveria ficar no 2º grau, pela proximidade dos tópicos de Matemática, dos interesses e idades dos alunos de 2º e 3º graus. A atuação em níveis mais elementares seria em caráter mais indireto ou, por via de conseqüência, num momento posterior.

O presente projeto da Rede engloba as atividades das Olimpíadas e da

RPM, que se apresentaram, até aqui, como projetos isolados ao SPEC - Sub-Programa de Educação para Ciência do PADCT -, mas que já mantinham áreas comuns, além, é claro, da Instituição promotora. É interessante aprimorar e aumentar esse entrosamento, para o que a Constituição de uma Rede muito deverá contribuir. Aspectos que já eram comuns a ambos os projetos, além da SPM como instituição organizadora, eram, por exemplo, a presença de elementos comuns às duas equipes encarregadas: a profª Renate G. Watanabe, por algum tempo, o prof. Paulo F. Leite e, mais recentemente os professores A.C. Morgado e E. Wagner têm participado das duas equipes. Também a RPM mantem uma seção sobre as Olimpíadas, publica artigos de alunos, alguns dos quais premiados em Olimpíadas e envia lista de questões de Olimpíadas a leitores que as solicitem.

Com a criação da Rede, todavia, espera-se que esse intercâmbio aumente ainda mais. Nessa direção fazem parte deste projeto a publicação de um caderno de RPM sobre a recente Olimpíada Ibero-Americana, um 2º volume de questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática com soluções comentadas (o 1º volume que cobre as olimpíadas de 1 a 8 foi publicado em 1988), um 1º volume de questões de olimpíadas regionais, textos de palestras de preparação para olimpíadas sob a forma de cadernos da RPM e a busca de um maior envolvimento dos coordenadores regionais das Olimpíadas na divulgação da RPM em seus estados e na captação de artigos para a Revista.

Propostas da SBM para enfrentar o desafio

Ao sentir as dificuldades e falhas na formação básica em matemática do aluno iniciante em nossas universidades, a Comissão de Ensino da SBM procurou alguns professores do ensino de 2º grau para discutir o problema em reuniões nas quais surgiram várias idéias a respeito de atitudes que poderiam ser tomadas. A que mais depressa se cristalizou foi a da criação de uma publicação periódica.

Não havia, entretanto, unanimidade quanto ao público-alvo desse periódico. Ele deveria dirigir-se ao professor ou ao estudante? As opiniões se dividiam, as experiências em outros países apontavam em outras direções. A SBM, no entanto, não se sentia em condições de abrir duas novas frentes em campo já tão difíceis.

Desde 1977 havia em São Paulo, sob a coordenação do prof. Shigueo Watanabe e patrocínio da Academia de Ciências de São Paulo, olimpíadas de matemática em todas as séries do secundário. Em 1979, um grupo de professores da PUC-Rio propôs a SBM a realização de uma olimpíada brasileira de matemática. Na mesma época, tendo sido convidado a enviar uma equipe brasileira a Olimpíada Internacional de Matemática, o prof. Shigueo consultou a SBM sobre a possibilidade dela se encarregar nos anos seguintes desta participação.

A escolha da SBM foi então se delineando: olimpíadas para os alunos e revista para os professores.

Desde 1979 a SBM organiza as Olimpíadas Brasileiras de Matemática. Estas olimpíadas constam de uma prova realizada nas principais cidades brasileiras e se destinam a alunos de 2° grau. Os premiados são então preparados para participarem das olimpíadas internacionais de Matemática. O programa de olimpíadas da SBM tem recebido apoio de diversas fontes. O CNPq colaborou em alguns anos, embora sendo esta uma atividade de ensino médio, e assim fora dos seus padrões usuais de financiamento. A participação dos alunos em olimpíadas internacionais tem por vezes contado com apoio da iniciativa privada. Em 1990 contamos com financiamento do SPEC para realização das olimpíadas brasileiras, e das participações na 31ª Olimpíada Internacional de Matemática e na 5ª Ibero-Americana.

Quanto à RPM, ela teve um folheto de lançamento distribuido em agosto de 1982 aos mil sócios da SBM e aos quase 56 mil professores de Matemática, das 5ªs. séries do 1° grau às 3ªs. do 2° grau, cadastrados àquela época na Editora Saraiva. Nesse mesmo semestre, saia o primeiro número da RPM, distribuído aos quase 12 mil assinantes que responderam ao folheto. Daí em diante, a RPM tem saído regularmente, um número por semestre, tem amadurecido, tem sofrido várias modificações e grande parte de sua vida está ligada à fase do SPEC.

Foi graças ao SPEC que a RPM teve um financiamento garantido por mais números em cada projeto. Não foi, porém, só no sustento financeiro que a interação do SPEC e da RPM se resumiu. O SPEC, em sua primeira fase, identificou em vários pontos do país outras equipes preocupadas e ocupadas com a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Matemática e Ciências no país, propiciando encontros valiosos entre tais equipes. Isto muito contribuiu para a divulgação da RPM e mesmo para a sua formação. Por outro lado, o SPEC submetia os relatórios críticos da RPM a diferentes comitês e retornava à equipe da RPM as opiniões e sugestões desses comitês. Foi graças a essas opiniões, por exemplo, que a RPM estendeu a confirmação de assinatura realizada no número 10 a uma pesquisa que tornou mais conhecido o perfil do leitor.

Agora, no início desta nova fase do SPEC, a possibilidade de se constituir uma Rede serviu como catalizador para a institucionalização de uma situação que já existia de fato mas que não estava devidamente formalizada: a reunião num só programa das Olimpíadas e da RPM.

Por que Olimpíadas e RPM?

Uma das grandes dificuldades nos problemas ligados à Educação é que, em geral, graças à sua natureza de auto-alimentação, ele se dispõem em círculos viciosos. Assim é que a falência do ensino é debitada, muitas vezes, à má formação dos professores que... são fruto desse mesmo sistema de ensino... e o problema se apresenta insolúvel!

Ora, tendo sido criada a RPM para ser o ponto de encontro entre os professores de todas as partes do país, era preciso, ainda, forjar um mecanismo que encaminhasse o jovem bem dotado para Matemática aos cursos de Matemática, estes pouco conhecidos ou tidos em menor valia. Como estimular o gosto pela matéria se os mestres não estão bem formados? Congressos Internacionais de Matemática têm recomendado a realização de olimpíadas como um meio eficientes de localizar jovens talentos para Matemática e estimular o interesse pela Matemática em geral. Recentemente, no II Congresso Ibero-Americano de Ensino da Matemática no nível médio, foi explícitamente recomendada a realização de olimpíadas.

Por isso a SBM procura divulgar bastante as atividades ligadas às Olimpíadas de Matemática. Diversos professores têm escrito à RPM e à Comissão de Olimpíadas pedindo sugestões para realizar torneios de Matemática em suas escolas.

O que já foi feito

Em termos de olimpíadas a SBM já tem uma experiência de 12 anos organizando as Olimpíadas Brasileiras de Matemática e enviando equipes para olimpíadas internacionais e ibero-americanas.

As olimpiadas brasileiras são realizadas sempre em outubro em quase todas as capitais de estado e algumas cidades de interior como Campinas e São Carlos em São Paulo, Juiz de Fora em Minas Gerais, Maringá no Paraná, Campina Grande na Paraíba. A evolução das olimpíadas reflete a estrutura da SBM, sociedade cuja maioria dos membros é ligada a Universidade. Assim, a primeira comissão de olimpíadas era formada por professores universitários do Rio e São Paulo, e a organização da olimpíada nas outras cidades foi confiada a um colega da universidade local. Até hoje os coordenadores regionais de olimpíadas, exceto no Rio e São Paulo, são professores universitários, o que tem assegurado apoio material das universidades, que em alguns casos têm assumido não só a organização da olimpíada brasileira como também a realização de olimpíadas regionais. As olimpíadas regionais surgiram da constatação da grande defasagem entre os alunos do eixo Rio-São Paulo e os demais. Após uma tentativa de adequar a prova às diferentes regiões, a SBM resolveu estimular os coordenadores regionais a organizarem olimpíadas locais. Hoje há olimpíada regional em Minas, na Bahia, no Ceará, no Espírito Santo, na Paraíba. No Rio de Janeiro é feita uma olimpíada regional no 2º grau separada por série, a exemplo do que é feito em São Paulo e Campinas. No próximo ano devem começar as olimpíadas gaucha e roraimense. Por ser uma atividade desvinculada da sala de aula e desafiante, as olimpíadas motivam professores e alunos igualmente. Tipicamente, uma questão de olimpíada é bem diferente do que é visto em aula. Isto faz com que as olimpíadas regionais sejam acompanhadas de discussão de problemas que trazem alunos e professores do secundário para dentro das universidades. Assim, as olimpíadas têm proporcionado uma interação entre os professores do 2º e 3º grau, benéfica para ambos. Para citar alguns dados: as olimpíadas brasileiras envolvem hoje em torno de 1.000 alunos, a maioria da 3ª série do 2º grau. As regionais de Minas envolvem em torno de 300 alunos em 30 cidades. As regionais de São Paulo envolvem em torno de 500.000 alunos em todas as séries da 5ª em diante.

Dentre os premiados na olimpíada brasileira são selecionados os que irão constituir a equipe que participará da olimpíada internacional em julho do ano seguinte. Estes alunos são preparados através de listas de exercícios enviadas pelo correio e algumas sessões de problemas. O Brasil tem se saido relativamente bem nestes eventos, tendo obtido por três vezes medalha de ouro e várias vezes medalha de bronze. Nas olimpíadas internacionais as equipes são de seis estudantes que trabalham individualmente. As medalhas são atribuídas de modo que aproximadamente 1/12 ganha ouro, 2/12 ganha prata, 3/12 ganha bronze. Assim são premiados metade dos participantes.

Quanto à RPM, como já foi dito, foram publicados, até agora em janeiro de 1991, o folheto de lançamento e 17 números, desde 1982. Grande parte deste trabalho foi financiado pelo SPEC, o que significa que ele vem sendo acompanhado pelos comitês do programa. Resumimos aqui alguns pontos que, a nosso ver, merecem destaque.

A RPM é hoje distribuída a quase 20 mil assinantes espalhados por todas as unidades da Federação. Tais assinantes foram crescendo dos iniciais 12 mil a mais do que 20 mil no número 10, quando foi pedida uma confirmação de interesse de assinatura. Daí, voltamos a pouco mais do que 11 mil e na RPM 17, entregue no 2º semestre de 90, já estamos novamente perto dos 20 mil. Essa expansão de 12 para 20 mil, em ambas as ocasiões, tem acontecido quase que somente pela divulgação por parte dos próprios leitores.

A colaboração em artigos, a correspondência dos leitores, a resposta à pesquisa junto à RPM 10 confirmam o papel que a RPM vem assumindo junto aos professores de Matemática. Do número 1 até o 17, a RPM passou de 28 páginas a 72, passou a receber o apoio da USP através de um convênio firmado com a SBM em 1987 e seu Comitê, que tinha somente a profª Renate como professora também no 2º grau (os demais sendo só professores universitários ou matemáticos), tem hoje outros 5 professores ativos no 2º grau. O intercâmbio entre os professores dos vários graus se dá também na correspondência de algumas das seções (Problemas, O Leitor Pergunta, Cartas do Leitor, em especial), nas reuniões do Comitê Editorial e entre autores e revisores, na fase de adaptação de muitos dos artigos submetidos. Seções, como Olimpíadas, Com Régua e Compasso, Artefatos, Balcão do Mestre, Coluna do Botelho, De Nossos Alunos e Magistério em Ação, foram criadas depois do lançamento, por sugestão de leitores, editores ou assessores.

INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Prof. Jácomo Palladino - IBM

No meu trabalho na IBM, a área que mais me atrai é a de Educação e Pesquisa. Embora afastado temporariamente desta área, tenho grande desejo de voltar para ela.

Hoje vou conversar um pouco com vocês, professores, enfocando quatro pontos, que me parecem de grande importância no seu trabalho, relacionados com os aparelhos dos quais dispomos hoje em dia.

. Sistema SLINS, cujo objetivo é facilitar a montagem de cursos;

. Sistema BITNET, que se iniciou há alguns anos nos U.S.A. e tem como origem a conversa entre duas universidades;

. Sistema MUSIC, que é um sistema operacional de baixo custo que permite o trabalho de um grande número de alunos com um equipamento pequeno, dando possibilidades múltiplas de utilização e de linguagem;

. Super-computação, cujo nome já diz do que se trata.

A filosofia da introdução do uso do computador em Educação e Pesquisa é facilmente explicável.

O grande ponto é se utilizar o computador como ferramenta motivacional de introspecção. A motivação nos apoia em qualquer atividade humana. O computador, por ser o caminho do futuro, e por ter hoje direcionada sob ele toda atividade humana, é um objeto altamente motivador. No futuro o computador terá o papel que tem hoje, para nós, o telefone, por exemplo.

O computador não ensina, mas aflora conceitos já existentes. A escultura, por exemplo, existe. O trabalho do escultor é retirá-la de dentro da pedra.

Vejamos agora os quatro pontos que mencionei.

Sistema SLINS

Sistema inventado por nosso companheiro Sergio Lins - é um sistema de apoio ao Professor na montagem do curso e dá ao aluno a possibilidade de acompanhar o curso. Nem o professor nem o aluno precisam ter conhecimento algum de computação.

É um "software" novo. Foi lançado há pouco tempo e ainda está em fase de teste.

Este sistema, que não é só da IBM, mas de outras empresas também, permite compartilhar de uma máquina de tal forma que cada pessoa se sinta o dono de um computador. O sistema é simples para não adicionar à dificuldade de montar o curso a dificuldade da ferramenta.

As características deste sistema são:

. Ferramenta simples;

. Rapidez da geração dos cursos;

. Possibilidade de melhoria dos cursos através de feed-back;

. Redução do tempo de treinamento;

. Permanente disponibilidade no tempo de trabalho do aluno.

Com este sistema o aluno, ao usar o curso, pode ter dúvida com alguma palavra. Neste caso o próprio sistema o apoia, pois há um glossário ao qual ele pode recorrer. Com este produto conseguimos cobrir todas as fases do trabalho de criar o curso, de gerar o curso, de testar a documentação do curso e de auto-estudo. É um pacote que pretende ser completo.

Na fase inicial se assemelha à instrução programada mas não tão monótona como era aquela metodologia efetuada em livros. Há uma pergunta. O aluno digita a resposta mas não vê a resposta correta, que lhe é apresentada no estágio seguinte, na tela, para conferência.

Vejamos agora a **rede BINET**. Nasceu nos U.S.A. nas Universidades de Yale e de Nova York. Duas pessoas nestas universidades começaram a se comunicar. O grupo foi crescendo e hoje é uma rede quase obrigatória. Há até um folclore. Um brasileiro, se encontra há algum tempo em uma reunião internacional, com um pesquisador do Kenia. Este indaga do brasileiro qual o seu endereço na rede BITNET. O brasileiro responde que o Brasil ainda não está ligado a esta rede. O pesquisador do Kenia fica admirado com este fato. Isto já foi. Hoje estamos ligados por esta rede como o mundo todo. O BITNET se iniciou no Brasil com o apoio do Laboratório Nacional de Computação Científica e é uma rede muito fácil de ser utilizada. Conseguindo uma senha do Laboratório, qualquer pessoa pode utilizá-lo de sua própria residência através de um "moden". Pode-se também fazer uma ligação através de uma linha privada, mais, neste caso, é preciso tomar uma série de providências.

É uma rede mundial; há possibilidades teóricas de se comunicar com qualquer parte do mundo. Com esta rede nós podemos utilizar os seguintes tipos de serviços:

. Correio eletrônico, que é como uma carta ou telefonema, só que é mais rápido que a carta e mais seguro de encontrar o destinatário que o telefonema. Se a pessoa está no local para onde vai a mensagem, ela entra na tela e responde. Se não está, a mensagem é guardada e o destinatário, ao voltar, liga a máquina e a lê.

. Transmissão de arquivos. Pode-se até transmitir um livro inteiro.

. Acesso a servidores. Neste caso "servidores" significa "serviços". Se uma pessoa tem interesse em uma determinada área, se inscreve e recebe via computador tudo que há arquivado em relação àquela área.

O BITNET no Brasil se iniciou em data bem recente, em 1988, com um trabalho experimental de uma hora por dia e teve no começo muitos problemas.

Houve falta de compreensão de algumas pessoas que não viam toda a utilidade que esta rede pode ter. Hoje está sendo muito usado, 24 horas por dia, e seu preço é bem razoável.

A rede funciona com várias interligações. Se duas instituições não estão diretamente ligadas, faz-se a ligação através de uma instituição intermediária, que esteja ligada a ambas.

O governo só liberou estas ligações da rede BITNET com a condição de serem ligações de Ensino e Pesquisa. Uma rede comercial com outras finalidades não tem facilidade de acesso a esta rede.

Sistema MUSIC

Além do BITNET há um sistema que poderia ser chamado de sistema ideal na Educação. Claro que não é ideal a todos os níveis. Hoje a informática está atendendo a todos os níveis da Educação. Existe um projeto na Costa Rica de alfabetização com auxílio do computador muito interessante. A IBM está estudando uma maneira de trazer para o Brasil esta metodologia que lá já é uma realidade. A Costa Rica é um país pobre, mas o projeto teve lá um resultado extraordinário. Vamos ver se conseguimos implantar este projeto aqui.

Quanto ao projeto que algumas pessoas acham ser o sistema ideal para a educação, existem alguns requisitos para se traçar este sistema, capaz de gerenciar uma extensa rede de usuários. A idéia é ter um sistema grande a ser partilhado por um grande número de usuários. É verdade que cada pessoa pode ter seu micro para resolver os problemas seus. Se ele é um homem que tem seus projetos particulares e trabalha de uma forma individual, ele pode resolver seus problemas no micro. Mas se ele precisar fazer interação com outras pessoas, ou ter um banco de dados da instituição, ele já não vai poder trabalhar só como um micro.

Qualidades necessárias a um projeto voltado para a Educação. Ser:

. Capaz de contabilizar o uso a nível do usuário.

Imaginem um estudante que queira sentar a um terminal e ficar o dia inteiro utilizando-o. Os recursos são excassos, então é preciso que o sistema controle a utilização através de um sistema de contabilização. Ele vai receber um crédito, que vai dizer quanto tempo ele pode usar, qual a capacidade que ele pode usar de sistemas de entrada, de impressora, etc...

. Capaz de prevenir o uso indevido.

. Capaz de prover acesso a um grande número de linguagens de programação, programas aplicativos, cursos, etc...

O estudante ou o programador podem estar trabalhando em uma linguagem, FORTRAN, por exemplo, e de repente podem querer usar uma linguagem de Banco de Dados, de 4ª geração. Por isto é preciso que haja mesmo mais de uma linguagem. Um sistema que já possibilitasse o uso de um sistema BASIC não seria um bom sistema, eficiente na comunicação aluno-professor. Não serve só para apoiar o ensino, mas o professor pode ministrar as provas através do terminal do próprio sistema. Dá a prova e o aluno realiza o seu trabalho alí. O professor corrige no próprio terminal.

. Eficiente no uso dos recursos.
. Fácil de usar.
. Fácil de instalar.
. Testado em ambiente acadêmico.

Então surgiu o sistema Music. É um sistema que não é da IBM. Foi desenvolvido no Canadá. No Brasil a IBM comercializa este sistema, e o apoia pois é um sistema muito bom. Surgiu na década de 60 e permite a ligação de grande número de terminais. É um sistema que permite a comunicação aluno-aluno ou aluno-professor. Permite fazer uma agenda, permite que o professor prepare um bilhete, uma carta para o aluno. Enfim ele permite a comunicação entre as pessoas que estão utilizando o Music.

No Brasil temos o GUM - Grupo de Usuários do Music. Hoje são 32 entidades que se apoiam, desde a instalação até a utilização, no aproveitamento do sistema. No país há uma reunião uma vez por ano, e no exterior também há reuniões dos participantes do GUM e nestas reuniões os usuários se aperfeiçoam por meio de contatos e trocas de experiências.

O Music é muitas vezes comparado a umCMS. Eu costumo dizer, de maneira jocosa, que na verdade o Music é um CMS de pobre, pois o Music é muito econômico na utilização dos recursos. Por exemplo na utilização da memória em disco. No CMS, se uma pessoa está utilizando esta memória em disco, ou ela a utiliza ou mais ninguém a estará utilizando. Já no Music não é assim. Todos podem utilizá-la.

As pessoas que usam muito computador acham que o Music não serve. Na nossa experiência chegamos à conclusão de que 80% das pessoas podem usar o Music. Aliás, hoje, com um Music 2, mais moderno, quase a totalidade das pessoas pode utilizar o Music.

Quanto à **Super-computação**, preciso dizer que é um assunto que está muito em moda. Vi no exterior ser utilizado o Super-Computador muito seriamente. No Brasil, porém, estamos com uso muito reduzido. A PETROBRÁS o usa na pesquisa de petróleo. Existe um sistema na UNICAMP que está começando ainda. A Universidade de Santa Catarina tem este sistema e da Bahia também o tem, mas é uma coisa muito incipiente ainda. Na verdade, ainda que seja difícil definir o que é um super-computador, a melhor definição é de que um super-computador é o maior computador existente em um determinado instante. Então hoje o super-computador pode ser um computador vetorial com 6 processadores, ou 6 vetores, da mesma maneira como em tempos idos o 1130 poderia ter sido o Super-Computador da época.

O Super-Computador deve ter como características:
. uma capacidade de memória grande;
. uma velocidade muito grande;
. exatidão nos seus cálculos.

Isto se resolveu da seguinte forma: o Super-Computador tem alterações em "Hardware" e alterações "Software". As alterações em "Hardware" são a capacidade maior de registradores, de modo que haja registradores capazes de trabalhar com vetores. E na parte de "Software" há mais de 100 instruções variando de computador para computador. Com isto se trabalha cada problema com um método seu específico. Estamos "desenterrando" capítulos da Matemática que estavam colocados em uma posição que não identificava bem sua utilidade. Um destes capítulos é o das Diferenças Finitas. Vi em um Congresso em Boston um médico montando sua equação de diferenças para resolver um problema de Medicina.

Na Matemática, na Estatística se precisa do Cálculo Vetorial para resolver problemas. Problemas que se resolviam em meses agora se resolvem em horas.

O Super-Computador também permite resolver problemas de simulação, o que é muito usado em Física, Química, Medicina, Economia e até em empresas privadas tipo bancos.

O Brasil ainda está engatinhando nesta área. Entendo que as Universidades estejam preocupadas, mas a super-computação está aí para ficar. Existe algum problema político onde os governos interferem às vezes por preocupações legítimas, como o da fabricação de bombas atômicas, mas não há como escapar.

A computação e a super-computação estão presentes e não podemos ignorá-las.

APLICAÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR

Prof. José Paulo Q. Carneiro
USU/GEPEM

Introdução

Ninguém duvida da importância que têm, no ensino de qualquer parte da Matemática, as aplicações de conteúdos e métodos matemáticos em assuntos "fora" da Matemática. Estas aplicações, além de constituirem uma eficiente motivação, servem também de balizamento à imaginação dos matemáticos "puros".

Na tradição do ensino do Cálculo e da Álbebra Linear, as aplicações quase sempre se concentram na Física. Em parte, isto se deve, e com justiça, ao papel preponderante que a Física exerceu na história do progresso da Matemática; não é à toa que os três maiores matemáticos de todos os tempos (reconhecidamente, Arquimedes, Newton e Gauss) eram também físicos. Mas acredito também que este costume se apoia no domínio que, por diversos motivos histórico-sociais, a Engenharia exerceu durante muito tempo sobre as disciplinas científicas do ensino de terceiro grau. Tal domínio (atualmente em queda, devido à ascenção da Economia) fez com que ficassem indevidamente ignoradas importantes e interessantes aplicações à Estatística, à Economia, à Psicologia e a outras ciências "sociais".

Por este motivo, selecionei, para comentar, duas aplicações da Álgebra Linear, uma à Demografia e outra à Economia.

Aplicação à Demografia

Em 1945, o demógrafo P.H.Leslie, na revista "Biometrika", apresentou um modelo para elaborar projeções para uma população fechada, isto é, não sujeita a migrações externas. Para uma tal população, o crescimento se deve exclusivamente ao excesso dos nascimentos sobre os óbitos. No modelo de Leslie, é crucial a consideração da idade, já que a capacidade reprodutiva (que causa os nascimentos) e a susceptibilidade à morte variam de modo bem diferenciado com a idade. Por outro lado, o estudo da fecundidade humana, por motivos conhecidos, limita-se convenientemente ao estudo da fecundidade feminina, e, além disto, os indivíduos que já ultrapassaram a maior idade fértil não terão influência no crescimento das classes com idade inferior. Fica então convencionado que, daqui por diante, "população" quer dizer "população feminina até a maior idade fértil".

Comecemos dividindo a população em n grupos etários, cada um com amplitude de T anos e vamos, então, acompanhar a evolução desta população de T em T anos, isto é, calcular como varia o vetor de distribuição etária $x^{(k)} = [x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}]^t$, onde $x_i^{(k)}$ é o efetivo de população que se encontra no i-ésimo grupo de idade na época kT, contada a partir do instante inicial de observação (o símbolo t significa "transposto"). Para efetuar tais cálculos, necessitamos de parâmetros que expressem a fecundidade e a mortalidade da população. Estas importantes características das populações humanas certamente variam com o tempo, mas no presente modelo simplificado são supostamente constantes no tempo. Isto acarreta que os resultados que iremos obter traduzem o que ocorreria com a população se a fecundidade e a mortalidade permanecessem constantes por um longo tempo, ou seja, traduzem as conseqüências, a longo prazo, da manutenção das condições atuais.

Com estas hipóteses, vejamos como se relacionam os vetores $x^{(k+1)}$ e $x^{(k)}$, ou seja, como varia a estrutura etária da época kT para a época (k+1)T. Em primeiro lugar, para $i > 1$, é claro que as $x_i^{(k+1)}$ mulheres que estão no i-ésimo grupo de idade na época (k+1)T são as sobreviventes das $x_{i-1}^{(k)}$ mulheres que, na época kT, estavam no (i-1)-ésimo grupo etário. De acordo com nossa hipótese sobre a constância da mortalidade no tempo, a razão $x_i^{(k+1)}/x_{i-1}^{(k)}$ independe de k, sendo a proporção esperada de mulheres do (i-1)-ésimo grupo etário que sobrevivem de modo a passar para o i-ésimo grupo. Chamando de a_{i-1} esta razão, temos, para $i=2,\ldots,n$:

$$x_i^{(k+1)} = \delta_{i-1}x_{i-1}^{(k)}$$

Já as $x_1^{(k+1)}$ mulheres do primeiro grupo de idade na época (k+1)T não são, obviamente, sobreviventes de outras na época kT, já que nessa época nem eram nascidas. Elas são as sobreviventes das que nasceram nos últimos T anos. Chamando de fi o número esperado de filhas tidas por uma mulher do i-ésimo grupo durante o período [kT;(k+1)T] e que sobrevivem até a época (k+1)T, tal número é, por hipótese, independente de k e incorpora tanto a fecundidade e a mortalidade do grupo i como a mortalidade do grupo inicial. Com esta definição, temos:

$$x_1^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^{(k)}$$

Os coeficientes f_i e δ_i são calculados, na prática demográfica, a partir de diversas informações sobre a população em causa. A maneira como isto é feito não será aqui abordada (ver[1]). Vamos nos preocupar somente com o desenvolvimento matemático do modelo.

As equações até agora apresentadas se escrevem:

$$x_1^{(k+1)} = f_1 x_1^{(k)} + f_2 x_2^{(k)} + \dots + f_{n-1} x_{n-1}^{(k)} + f_n x_n^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = \delta_1 x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} + \dots + 0x_{n-1}^{(k)} + 0x_n^{(k)}$$
$$\dots$$
$$x_n^{(k+1)} = 0x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} + \dots + \delta_{n-1} x_{n-1}^{(k)} = 0x_n^{(k)}$$

Este sistema, colocado na forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

isto é:

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k)}$$

onde L é a matriz dos coeficientes do sistema. Utilizando esta equação para valores sucessivos de k, obtemos:

$$x^{(1)} = Lx^{(0)}$$
$$x^{(2)} = Lx^{(1)} = L(Lx^{(0)}) = L^2x^{(0)}$$
$$x^{(3)} = Lx^{(2)} = L(L^2x^{(0)}) = L^3x^{(0)}$$
$$\dots$$

De um modo geral, $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$, o que mostra que, para projetar a população para k períodos de T anos cada, basta pré-multiplicar o vetor estrutura etária inicial $x^{(0)}$ pela k-ésima potência da matriz L. Uma matriz do tipo da matriz L acima apresentada, onde $f_i \geq 0$ e nem todos os f_i são nulos (ou seja, em cada T anos, alguma mulher nasce e sobrevive ao período) e $0 \leq \ _i \leq 1$ (ou seją, em cada grupo etário, exceto o último, alguma mulher sobrevive e passa para o seguinte), é chamada uma matriz de Leslie.

Suponha agora que se constate que, para um certo k, o vetor $x^{(k+1)}$ seja um múltiplo do vetor $x^{(k)}$, isto é, exista um (necessariamente positivo) tal que $x^{(k+1)} = \lambda x^{(k)}$. Isto acarreta que $x_i^{(k+1)} = \lambda x_i^{(k)}$, para todo i e também que $x^{(k+2)} = Lx^{(k+1)} = \lambda x^{(k+1)} = \lambda^2 x^{(k)}$ e assim por diante, de modo que $x^{(k+m)} = \lambda^m x^{(k)}$, para todo m natural. Do ponto de vista matemático, isto ocorre quando $x^{(k+1)} = Lx^{(k)} = \lambda x^{(k)}$, ou seja, quando λ for um autovalor de L e $x^{(k)}$ um autovetor correspondente. Do ponto de vista demográfico, isto significa que:

(i) A partir da época kT, a população passa a variar geometricamente a uma taxa de crescimento λ-1, por cada T anos. De fato, as populações totais nas épocas kT e (k+1)T são, respectivamente,

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} \quad \text{e} \quad P_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k+1)} = \ P_k, \text{ de modo que} (P_{k+1} - P_k)/P_k = \lambda - 1.$$

(ii) A estrutura etária relativa permanece invariável a partir da época kT; de fato, a proporção de indivíduos que se encontram na i-ésima faixa de idade é, na época (k + 1)T, igual a $x_i^{(k+1)}/P_{k+1} = \lambda x_i^{(k)}/\lambda P_k = x_i^{(k)}/P_k$, exatamente a que havia na época kT.

Por este motivo, a distribuição etária x é dita estável para a matriz L quando x for um autovetor relativo a um autovalor positivo de L.

Acontece que, pelo aspecto muito especial das matrizes de Leslie, é possível demonstrar que a matriz L tem um único autovalor positivo λ, o qual é raiz simples do seu polinômio característico, é maior ou igual ao valor absoluto de qualquer outro autovalor (inclusive os complexos), e seu subespaço característico é uni-dimensional. Este número é chamado autovalor principal da matriz L e estes fatos mostram que ele determina a única estrutura etária relativa estável para a população em questão. O número $\lambda^{1/T} - 1$, que é a taxa anual de crescimento da população, uma vez atingida a estabilidade, foi descoberto por A.Lotka, o criador da Demografia Matemática, e é chamado taxa intrínseca de crescimento associada ao conjunto de dados de mortalidade e fecundidade embutidos nos δ_i e f_i, sendo uma importante "medida-resumo" para a população.

Porém, o mais interessante ainda está por vir. Até agora, o fenômeno da estabilidade estava preso à hipótese remota de que em algum momento, a estrutura etária estável fosse atingida. No entanto, com mais uma hipótese simples e realista, é possível ir muito além. Se o autovalor principal for estritamente dominante, isto é, se λ for maior do que o valor absoluto de qualquer outro autovalor (e não somente maior ou igual, como já sabemos que é), é possível mostrar que : qualquer que seja a estrutura etária inicial $x^{(0)}$, a estrutura etária da população irá aproximar-se, a longo prazo, da estrutura estável. Este importante teorema, chamado *Teorema da População Estável*, foi primeiramente descoberto por Lotka no contexto de um modelo contínuo para o crescimento populacional. Mais precisamente, ele afirma que, qualquer que seja $x^{(0)}$, tem-se que o limite:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^{(k)}}{\lambda^k}$$

existe e é estável, isto é, é autovetor correspondente a λ.

É interessante ressaltar que a condição de estrita dominância (suficiente para garantir o teorema da estabilidade) é satisfeita, por exemplo, se houver dois índices consecutivos i e i + 1 tais que f_i e f_{i+1} sejam não nulos, condição que é naturalmente satisfeita em populações humanas, se o período de projeção T não exceder 15 anos (na prática demográfica, ele costuma ser 6 ou 10 anos).

Finalmente, deve ser observado que, no caso de a matriz L ser diagonalizável (não se conhece exemplo em Demografia onde isto não ocorra), o teorema da população estável possui uma demonstração muito bonita, baseada num "teorema espectral" feito "ad hoc" para matrizes de Leslie. (As demonstrações dos fatos aqui apresentados podem ser encontradas em [1]).

Aplicação à Economia

Por volta de 1960, o prêmio Nobel de Economia W.Leontieff elaborou diversos modelos matemáticos ligados à Economia. Vamos tratar aqui daquele que é conhecido como "modelo estático aberto de Leontieff"(ver[2]).

Imaginemos uma economia com n produtos (ou grupos de produtos, reunidos em setores produtivos), sendo x_i a quantidade produzida do produto i, digamos, em um certo ano. Esta produção é (por hipótese do modelo) aplicada, em parte, no "consumo intermediário" da fabricação dos outros produtos, destinando-se o restante para a "demanda final". Chamemos provisoriamente de p_{ij} a parcela da produção do produto i que serve de insumo para a fabricação do produto j, de modo que:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} + d_i$$

onde d_i é a demanda final pelo produto i. Admitamos agora que o processo de produção seja de tal modo simples que cada produto se fabrique em proporções fixas, a partir do consumo intermediário dos outros produtos. Isto significa que, sendo c_{ij} a quantidade do produto i consumida na fabricação de uma unidade do produto j, tem-se: $p_{ij} = c_{ij}x_j$, de modo que a equação anterior fica:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i$$

Esta equação escreve-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$x = Cx + d$$

ou ainda:

$$(I - C)x = d$$

onde I é a matriz indetidade n x n, enquanto a matriz C é a chamada matriz dos coeficientes técnicos, uma das matrizes de "relações inter-industriais" que figuram nos modelos de Leontieff, e que traduz o padrão de tecnologia da economia em questão. Naturalmente, x é o vetor produção e d o vetor demanda final. Para que isto tudo faça sentido econômico, é evidentemente necessário que todas estas matrizes sejam não-negativas, isto é, todos os seus elementos devem ser maiores ou iguais a zero.

Um dos problemas fundamentais no modelo de Leontieff é descobrir, dada uma certa economia, que demandas são "factíveis", isto é, para que demanda de cada produto, existe um nível de produção de cada um deles que as satisfaça? Matematicamente, isto significa: dada a matriz C, para que vetores $d \geq 0$ existe pelo menos um vetor $x \geq 0$ tais que $(I - C)x \geq d$? (naturalmente, $x \geq y$ entre vetores significa que $x_i \geq y_i$, para cada i). Pode-se também perguntar se a própria economia é factível, no sentido de que qualquer demanda seja factível.

Observe que, se a matriz I - C for inversível, já se sabe que, dado qualquer d, existe um (único) x tal que $(I - C)x = d$, a saber $x = (I - C)^{-1}d$. Se pudéssemos garantir que, neste caso, a não-negatividade de d, para um certo d (ou para todo d) acarreta a não-negatividade de x, este d (respectivamente, a economia) seria factível.

O primeiro fato interessante que pode ser demonstrado é que, para uma dada matriz de coeficientes técnicos, uma demanda será factível se e somente se qualquer demanda for factível. Além disto, demonstra-se que isto ocorre se e somente se a matriz $(I - C)^{-1}$ for não-negativa e tiver todos os termos da diagonal principal não inferiores a 1 (ver[2]).

A matriz $(I - C)^{-1}$ é chamada "matriz de impacto" e tem uma interpretação econômica imediata, pois, sendo y_{ij} o seu termo genérico, a igualdade $(I - C)^{-1}d = x$ traduz-se:

$$x_i = y_{i1}d_1 + \dots + y_{ij}d_j + \dots + y_{in}d_n$$

ou seja, um aumento de uma unidade na demanda do produto j (mantidas constantes as demandas pelos outros produtos) provocará o impacto de um aumento de y_{ij} na produção do produto i (daí o seu nome).

O fato de termos uma condição de factibilidade expressa em termos da matriz de impacto não é muito agradável, já que são conhecidas as dificuldades de ordem numérica envolvidas no cálculo da inversa de uma matriz de ordem razoavelmente grande. Para se ter uma idéia desta problema, registre-se que o IBGE, de 5 em 5 anos (a partir dos dados dos Censos Econômicos), calcula, para o país, matrizes de impacto em diversos níveis de agregação dos setores da economia, obtendo matrizes cujas ordens variam aproximadamente de 10 a 400 (1). Por isto, é importante que se tenha uma condição (suficiente, pelo menos) de factibilidade expressa em termos da própria matriz dos coeficientes técnicos.

Uma condição deste tipo pode ser obtida a partir da verificação de que, pelo simples fato de a matriz C ser não-negativa, ela possui um autovalor não-negativo λ, o qual é dominante ($\lambda > |\mu|$,para qualquer outro autovalor μ) e tem, associado a si, um autovetor não-negativo. Demonstra-se então que, se $\lambda < 1$, a economia é factível. Note-se ainda que, apesar de que o cálculo de autovalores também apresenta consideráveis problemas numéricos, a teoria de autovalores permite aplicar esta condição sem ter que calcular de fato os autovalores (ver[3]).

Conclusão

Os exemplos aqui abordados mostram a importância da teoria de autovalores e autovetores, especialmente quando aplicada a matrizes de termos não-negativos e quando se refere ao autovalor dominante. A teoria das matrizes não-negativas remonta aos matemáticos Perron e Frobenius na primeira década do século, mas tem ganho um grande ímpeto justamente a partir do crescimento de suas aplicações à Economia e à Estatística, como se pode ver pelos trabalhos de Varga, Debreu, Herstein, Hawkins, Simon e outros.

Espero que as aplicações apresentadas, mesmo tendo sido superficialmente tratadas (como costuma acontecer em palestras), tenham contribuido para mostrar a diversidade e a riqueza das aplicações da Álgebre Linear e, por consequência, motivar o estudo desta disciplina.

Bibliografia

[1] CARNEIRO,J.P.Q.; MONTEIRO,P.K.. Matrizes de Leslie e Projeção de População. Revista Brasileira de Estatística, 42(167):227-264,jul-set. 1981.

[2]SIMONSEN,M.H.. Teoria Microeconômica. Ed. Fund. Getúlio Vargas, 1979.

[3] BURMEISTER,E.; DOBELL,A.P.. Mathematical Theories of Economic Growth. The Macmillan Company, London, 1970.

AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DE SOFTWARE

Profª Ana Regina Rocha
COPPE - UFRJ

INTRODUÇÃO

Qualidade é um conceito multidimensional que se realiza através de um conjunto de atributos. Para que se possa desenvolver software com a qualidade desejada é necessário, primeiramente, definir-se o que se entende por qualidade.

Qualidade, entretanto, não pode ser definida universalmente. Ao tentarmos chegar a uma definição de qualidade, ficamos diante de uma pergunta: qualidade de quê? Assim sendo, qualidade deve ser definida para um determinado objeto. Deste modo ao nos referirmos à qualidade de software temos que diferenciar qualidade de especificações, qualidade de projeto, qualidade de programas, qualidade da interface homem-computador, etc.

Qualidade de software é ainda dependente da área de aplicação desse software. Não é o mesmo se falar de qualidade para uma folha de pagamento ou para um software de controle de uma usina nuclear, onde um defeito no produto pode colocar em risco vidas humanas.

Mesmo sem levarmos a discussão a estes casos extremos, temos que considerar especificidades relacionadas às características das diferentes áreas de aplicação. Deste modo podemos falar de qualidade de software científico, qualidade de software educacional, etc.

Entretanto, qualquer que seja o produto e sua respectiva área de aplicação um objetivo está sempre presente: o atendimento às necessidades de seus usuários. Assim sendo, podemos definir qualidade de software como um conjunto de atributos que devem sre atingidos, em um determinado grau, de modo que o produto atenda às necessidades de seus usuários.

MÉTODO PARA AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DE SOFTWARE

Qualidade de software é um conjunto de atributos. Para podermos medir a qualidade de software e organizar as medidas obtidas é necessário que tenhamos um método. Nesta seção descrevemos um Método para Avaliação da Qualidade de Software que foi definido com este objetivo. Este método está baseado nos seguintes conceitos: