3) A escolha das escalas precisa levar em conta o intervalo de variação das medidas das grandezas representadas. Pode ser necessário o emprego de escalas diferentes nos dois eixos, não só para que o gráfico caiba no papel (ou nas telas de computador), mas também para que o gráfico obtido apresente as características da função subjacente (intervalos de crescimento e decrescimento, interseções com os eixos, etc...)

Vejamos um exemplo:

- Ao esboçar o gráfico da função

$$f(x) = \frac{2x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - x + 50}$$

com a mesma escala nos dois eixos obtemos a Fig.5. Porém a função não tem um intervalo de zeros como sugere o desenho.

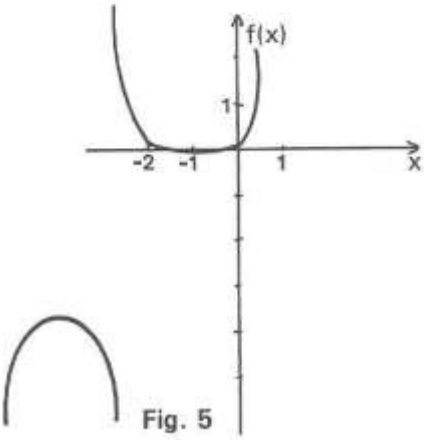


Fig. 5

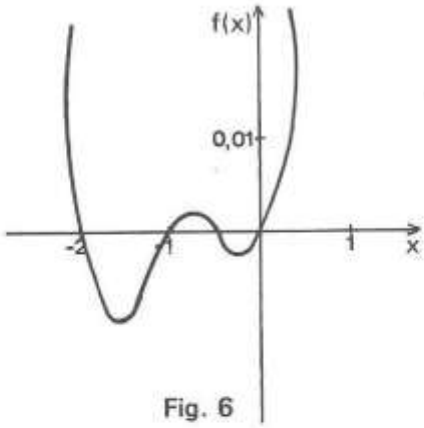


Fig. 6

Com uma nova escolha de escalas, na qual a unidade de comprimento é bem maior no eixo Oy do que no eixo Ox, obtém-se uma nova figura (Fig.6). Neste desenho os quatro zeros aparecem e, se não fossem conhecidos, poderiam ser estimados.

Mas agora uma parte do gráfico desapareceu. De fato nem sempre podemos obter um gráfico "global" com uma só figura, em um papel ou tela de dimensões fixas. Em aula, muitas vezes, sem pensar, distorcemos as escalas para que todas as características importantes da função apareçam em um só desenho.

A utilização de calculadoras gráficas e de softwares gráficos em computadores por nossos alunos levará a discussões desses fatos.

4) A ausência de informação, em livros didáticos, sobre as escalas empregadas

pode induzir leituras errôneas sobre o comportamento de funções. Por exemplo, se um aluno examinar os gráficos das funções $y = a^x$ e $y = log_a x$, $a > 1$, esboçados nas Fig. 7 e 8 pressupondo que foram usadas escalas iguais nos dois eixos, pode inferir um resultado falso (as equações $a^x = x$ e $log_a x = x$, com $a > 1$, parecem ter solução).

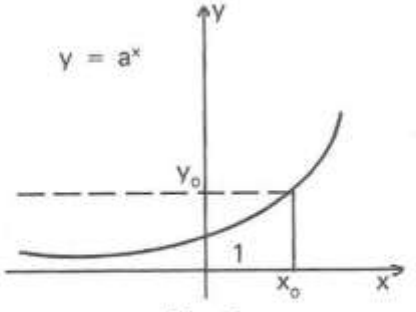


Fig. 7

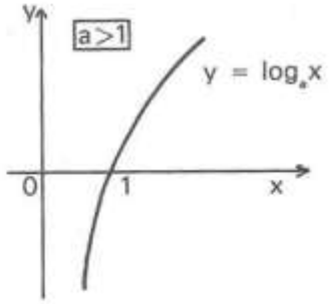


Fig. 8

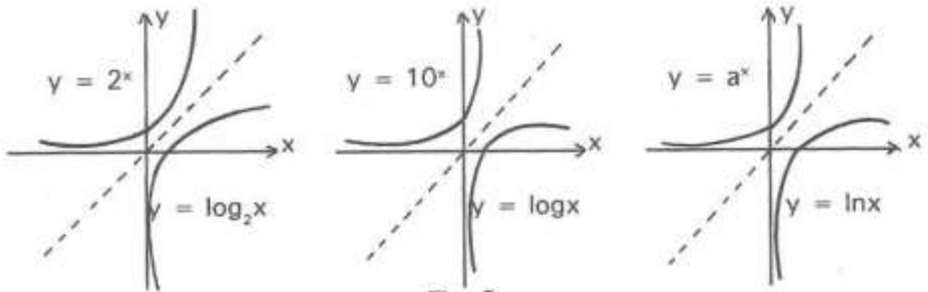


Fig. 9

A Fig. 9 reflete melhor o crescimento dessas funções. Nestas figuras os dois eixos estão graduados com a mesma unidade de comprimento. A propriedade: "Se $a > 1$ então $a^x > x$ e $log_a x < x$ para todo x" pode ser visualizada nos desenhos da Fig.9.[1]

Escalas Logarítmicas

Veremos a seguir como se define uma escala logarítmica. Estaremos empregando a notação $log(x)$ sempre que não for necessário levar em conta a base do sistema de logaritmos fixado.

Considere um eixo orientado Ox e uma escala aritmética sobre este eixo (Fig. 10a).

Uma escala logarítmica estabelece uma correspondência entre os pontos do eixo e os números reais positivos. Essa correspondência pode ser definida da seguinte maneira: (Fig. 10b)

"O ponto P está associado ao número real x, $x > 1$, se, e somente se, $\overline{OP} = log(x)$. O ponto Q está associado ao número real x, $0 < x < 1$, se, e somente se, $\overline{OQ} = |log(x)|$. O ponto O é associado ao número real $x = 1$".

Os comprimentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ acima são medidos na escala aritmética.

Fig. 10a

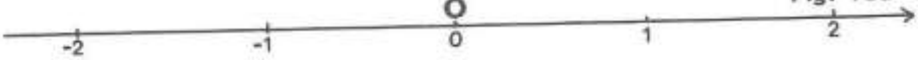
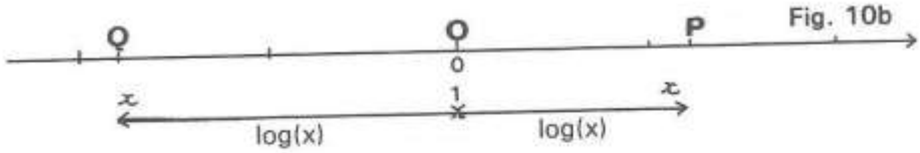


Fig. 10b



Veja na Fig. 11b uma escala logarítmica (decimal) que foi construída a partir dos valores da função $y = log_{10}x$,, dados na tabela abaixo, e da escala aritmética da Fig. 11a.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10}x$	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Fig.11a

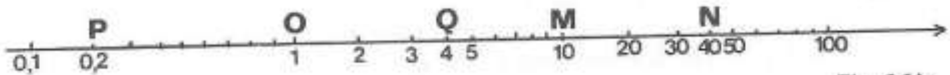


Fig.11b

Observe que os pontos M, P e Q estão associados aos números 10, (0,2) e 4 pois

$$\overline{OM} = 1 = log_{10}10 \quad \overline{OP} = 0{,}70 = |log_{10}0{,}2| \quad \overline{OQ} = 0{,}60 = log_{10}4$$

Podemos já notar que as escalas aritméticas diferem fundamentalmente das logarítmicas.

Nas escalas aritméticas os comprimentos são proporcionais aos números indicados e números em progressão aritmética encontram-se igualmente espaçados.

Nas escalas logarítmicas os comprimentos são proporcionais aos logarítmos dos números indicados e números em progressão geométrica estão igualmente espaçados.

Observe também que uma escala logarítmica representa todos os pontos de uma reta usando apenas coordenadas positivas.

Na Fig. 12 é apresentada uma outra maneira de construir uma escala logarítmica decimal, a partir do gráfico de $y = log_{10}x$.[3]

As escalas logarítmicas foram idealizadas pelo astrônomo inglês E. Gunter e utilizadas para a invenção da régua de cálculo pelo matemático, também inglês, W. Oughtred em 1622.

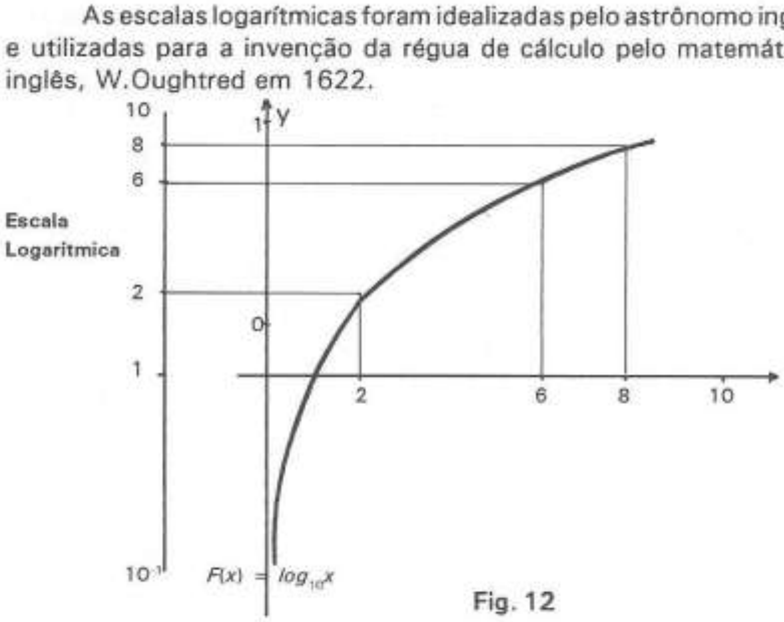


Fig. 12

Gráficos distintos de uma mesma função. Outros exemplos.

A seguir veremos mais alguns exemplos de como diferentes escolhas de escalas podem levar à obtenção de gráficos bastante distintos de uma mesma função. Nas Fig. 13 e 14 estão esboçados gráficos da função $y = x + 1$. Na Fig. 13 as escalas são aritméticas, e neste caso o gráfico de $y = x + 1$ é uma reta. Na Fig. 14 foram empregadas escalas logarítmicas nos dois eixos. Vemos que o gráfico de $y = x + 1$ tem aspecto bastante distinto, e somente os pares $(x, y(x))$ com $x>0$ podem ser representados.

Salientemos que a demonstração usual de que o gráfico de uma função do tipo $y = ax + b$ é uma reta pressupõe a utilização de escalas aritméticas nos dois eixos.

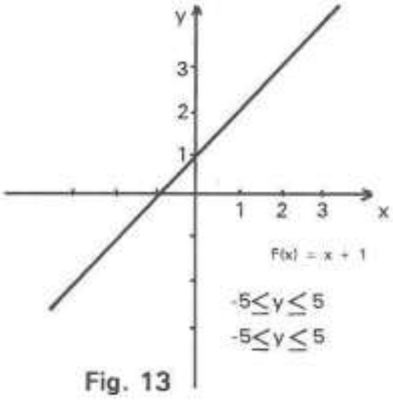


Fig. 13

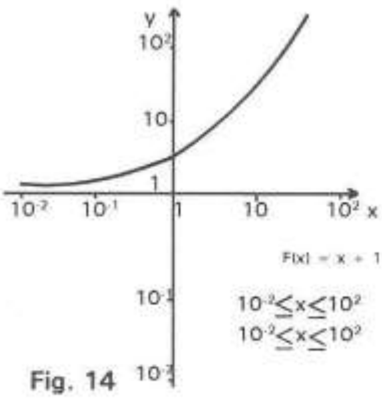


Fig. 14

Veja agora nas Fig. 15 e 16 dois gráficos distintos da função $f(x) = 10^x$. Na Fig. 15 são usadas escalas aritméticas e na Fig. 16 é utilizada escala logarítmica no eixo Oy.

Cumpre observar que nos dois esboços estão marcados os mesmos pares $(x, y(x))$ tais que $y = 10^x$; em particular os pontos de coordenadas $(0,1)$, $(1,10)$, $(2,100)$, etc...

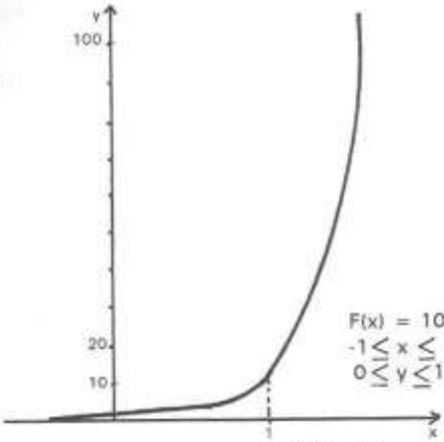


Fig. 15

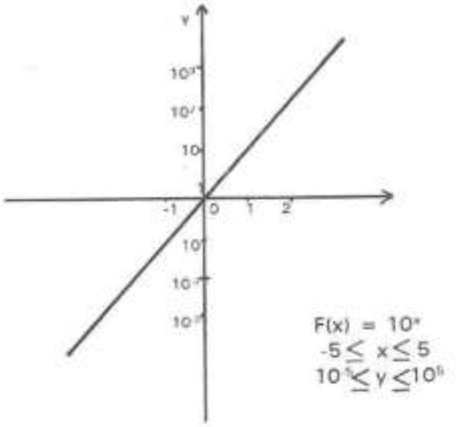


Fig. 16

Emprego de Escalas Logarítmicas

Veremos dois exemplos de problemas que as escalas logarítmicas permitem abordar.

1) Na relação abaixo encontram-se as freqüências de radiações eletromagnéticas:

Radiações	Freqüências
rádio	desde poucos ciclos/$_{seg}$ até 10^9 c/s
microondas	de 10^9 a 3×10^{11} c/s
infravermelho	de 3×10^{11} a 4×10^{14} c/s
ultravioleta	de $7{,}7\times10^{14}$ a 3×10^{17} c/s
raios X	de 30×10^{15} a 100×10^{18} c/s

As freqüências destas radiações variam então desde números razoavelmente pequenos até números bastante grandes.

Quando as medidas de grandezas variam desta forma, ou seja, podem tomar valores muito pequenos e muito grandes, elas são melhor representadas em escalas logarítmicas do que em escalas aritméticas. Isto porque naquelas escalas números em progressão geométrica estão igualmente espaçados, e uma faixa cada vez maior de números é representada na mesma unidade de comprimento.

O espectro eletromagnético está representado em escala logarítmica (decimal) na Fig. 17.

A escala decibel é um outro exemplo de uso de escala logarítmica.

As pessoas podem distinguir sons variando em uma faixa incrivelmente larga de intensidades. A escala decibel é uma escala usada para medir intensidade do som.

O número de decibéis (*db*) de um som é calculado a partir de sua intensidade I pela fórmula

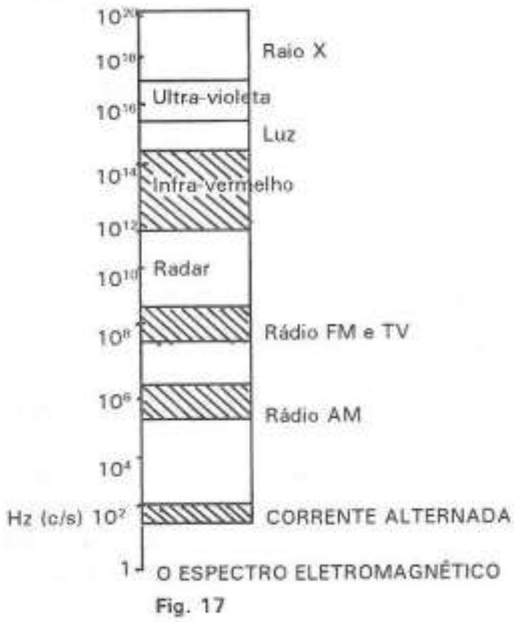
$$dB = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad I_0 = 10^{-16}\ watt/cm^2$$

onde I_0 é a intensidade do menor som audível (cuja medida em decibel é 0).

Veja na Fig. 18 uma representação da escala decibel.

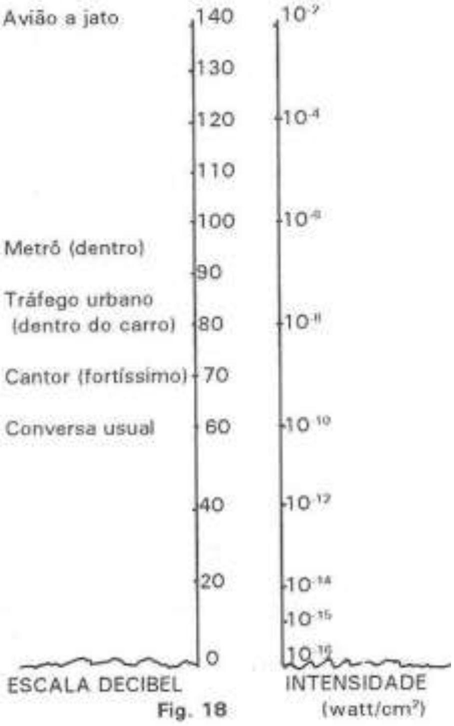
A escala decibel é na verdade uma escala aritmética obtida por redenominação das medidas (relativas a I0) de intensidade de som marcadas em escala logarítmica decimal.

Assim é que dois sons cujas medidas diferem de 20 decibéis têm intensidade na razão 100. E o som produzido por um conjunto de rock, cuja medida em decibéis é 120, tem intensidade igual a um trilhão(10^{12}) de vezes a intensidade do menor som audível.



O ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO

Fig. 17



ESCALA DECIBEL

INTENSIDADE (watt/cm²)

Fig. 18

Veremos agora um outro emprego de escalas logarítmicas.

Suponha que a observação de um certo fenômeno tenha conduzido a um conjunto de valores de duas grandezas variáveis, percebidas como mutuamente dependentes.

Esse conjunto de dados experimentais poderia consistir, por exemplo, na temperatura $T(t)$ de um corpo no instante t, na quantidade $N(t)$ de certa substância presente em uma amostra após decorrido um tempo t, ou no volume de um gás $V(p)$ submetido a uma pressão p.

Freqüentemente se busca uma fórmula para representar essa dependência levando em conta os valores observados.

Uma das técnicas para adaptar funções a dados experimentais é o método gráfico, que consiste em ajustar uma curva à representação gráfica desses dados.

Este processo é especialmente interessante quando as relações entre as variáveis x e y, $y = y(x)$, podem ser modeladas por equações dos tipos $y = ax + b$, $y = ax$ e $y = ab^x$.

Isto é óbvio quando se tem uma dependência afim $y = ax + b$ mas não é tão evidente para relações das formas $y = ax$ e $y = ab^x$.

Vamos examinar cada um desses dois casos.

Considere um conjunto de dados experimentais $(x, y(x))$ correspondentes à observação de um certo fenômeno. E suponha que, além disso, a sua representação gráfica leva à conjectura de que a curva que melhor se adapta a esses dados é gráfico de uma função do tipo $y = ax$. Poderíamos também supor que já se sabe que o fenômeno em questão é bem modelado por uma dessas funções. Como podemos determinar os parâmetros a e ?

Observe que o conjunto de dados (x, y) satisfaz à relação $y = ax$ se, e somente se, o conjunto de pares $(log(x), log(y))$ satisfaz à equação afim $log(y) = log(a) + log(x)$.

Assim, é possível ajustar uma reta à representação gráfica dos pares $(logx, logy)$, marcados em um sistema de coordenadas aritmético, e determinar graficamente os parâmetros α e $log\ a$ (consequentemente a), obtendo a relação pretendida $y = ax^{\alpha}$.

As escalas logarítmicas são freqüentemente empregadas neste tipo de problema. Ao invés de calcular todos os pares $(logx, logy)$ e depois marcar os pontos correspondentes em um sistema de coordenadas aritmético, pode-se marcar diretamente os pares (x, y) em um sistema de coordenadas do tipo *bilog*, isto é, com escalas logarítmicas nos dois eixos.

Com este processo os cálculos de logarítmos são evitados e a determinação dos parâmetros e *a* também pode ser feita graficamente.

De forma análoga pode-se determinar *a* e *b* em se tratando de relações de dependência da forma $y = ab^x$.

Neste caso os dados (x,y) estão relacionados por $y = ab^x$ se e somente se os pares $(x, log(y))$ satisfazem a equação afim $log(y) = log(a) + x log(b)$. E agora, o conjunto de pares $(x, log(y))$ marcado em um sistema aritmético coincide com o conjunto de dados (x,y) marcado em um sistema monolog (com escala logarítmica em um dos eixos, no caso Oy).

Experimente a técnica com o seguinte problema:[1]

Considere o conjunto de dados (x,y) constante da tabela abaixo:

x	y
2,3	43,8
4	283,5
5,5	1473,1
7	7654,5
9	68890,5

Mostre que se pode ajustar o gráfico de uma função do tipo $y = ab^x$ a esse conjunto de dados determinando os parâmetros *a* e *b*.

Você pode usar papel milimetrado ou papel logarítmico *monolog* e deve encontrar $a = 3{,}5$ e $b = 3$ (valores aproximados).

É claro que as situações apresentadas não têm a pretensão de esgotar as possibilidades interessantes de aplicação das funções consideradas.

Alguns exercícios sobre o tópico Escalas Logarítmicas e outras aplicações das funções logarítmica e exponencial podem ser encontradas em [2].

Referências Bibliográficas

[1] Demana,F. e Waits,B.K. Precalculus Mathematics, A Graphing Approach. U.S.A., Addison-Wesley, 1990.

[2] Palis,G.L.R. Repensando o ensino-aprendizagem de logarítmos. Cadernos do Projeto Matemática Comunidade e Universidade, PUC/RJ,1991.

[3] Echelles Logarithmiques, Brochura nº 54. Paris, IREM-Université Paris VII, 1985.

NÍVEIS DE VAN HIELE: UMA EXPLICAÇÃO DEFINITIVA PARA AS DIFICULDADES EM GEOMETRIA?

Lilian Nasser
Instituto de Matemática - UFRJ

Os professores de 7ª e 8ª séries do 1º Grau sempre se perguntam porque é tão difícil conseguir que os alunos gostem de geometria e compreendam os casos de congruência de triângulos e as demonstrações. Muitos professores têm procurado cursos de treinamento em geometria e, realmente, se sentem inseguros ao passar do ensino de álgebra para o de geometria.

Algumas explicações parecem evidentes, como a abstração em que a geometria tem sido ensinada, o fato de ser o primeiro contato com o processo dedutivo, o pequeno número de aulas dedicadas à geometria, agravado pelo fato de serem dadas no final do ano, sem mencionar as deficiências dos livros didáticos. Mas detectar os problemas somente não resolve o caso: soluções devem ser encontradas.

Soluções experimentais têm surgido nos últimos aos: introduzir geometria através de sólidos ([1]), usar jogos do tipo do Tangram, recobrir regiões do plano com ladrilhos (tecelagem) ([2]), usar dobraduras e recortes ([3]). Todas estas idéias são positivas, e têm dado bons resultados.

Mas a resposta para a pergunta inicial deve ser mais profunda, isto é, deve ser baseada não apenas na questão didática, mas também no aspecto cognitivo. Isto significa que outras perguntas devem ser consideradas: Como os conceitos geométricos são formados? A formação dos conceitos geométricos está sujeita a uma idade cronológica, ou a estágio piagetiano? Será possível antecipar a formação desses conceitos com instrução apropriada?

Estas perguntas são antigas, e uma resposta surgiu, há mais de 30 anos, por parte de dois professores secundários holandeses. Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof observaram e se preocuparam com o fraco desempenho de seus alunos em geometria, dedicando seus estudos de doutorado a esse problema. Em 1957, Pierre van Hiele apresentou num congresso de Educação Matemática na França seu artigo intitulado: "O pensamento da criança e a geometria" ([4]). Neste trabalho, ele descreve um modelo para o desenvolvimento do raciocínio em geometria, baseado em cinco níveis e em cinco fases de instrução. Dina van Hiele-Geldof, por sua vez, descreve em sua Tese de Doutorado uma experiência didática baseada nesses níveis. Resumidamente, os níveis são atingidos em seqüência e, através de instrução adequada, o aluno vivencia cinco fases ao progredir de um nível para o imediatamente superior.

A partir da sua divulgação em 1957, o modelo de van Hiele despertou o interesse de educadores soviéticos, que introduziram um currículo baseado nos níveis de van Hiele e, mais tarde, dos americanos e europeus, que têm desenvolvido vários projetos sobre o modelo.

Os níveis de van Hiele

Nível básico: *Reconhecimento* - o aluno reconhece as figuras geométricas por sua aparência global, mas não identifica explicitamente suas propriedades.
Ex.: o aluno identifica a figura de um quadrado, e ao ser perguntado porque, a resposta é do tipo: "porque se parece com um quadrado".

Nível 1: *Análise* - o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si.
Ex.: o aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

Nível 2: *Ordenação* - o aluno relaciona as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não domina o processo dedutivo.
Ex.: o aluno sabe que todo quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo.

Nível 3: *Dedução* - o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, as condições necessária e suficiente, mas não sente necessidade de usar rigor matemático.
Ex.: o aluno entende porque o postulado das paralelas implica que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°.

Nível 4: *Rigor* - o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações, e é capaz de analisar outras geometrias.

O próprio P. van Hiele, assim como vários pesquidores que trabalharam com este modelo, concordam que é praticamente impossível atingir o nível 4 no curso secundário (ou no 1° grau).

As principais características do modelo de van Hiele para o pensamento em geometria são:

(a) *Hierarquia*: os níveis obedecem a uma seqüência, isto é, para atingir certo nível o indivíduo deve passar antes pelos níveis inferiores.

(b) *Lingüística*: cada nível tem sua própria linguagem, conjunto de símbolos e sistema de relações. Por exemplo, no nível básico, o aluno se refere a ângulos de mesma medida como "iguais" e, no nível dois, como "congruentes".

(c) *Intrínseco e extrínseco*: o que está implícito num nível torna-se explícito no próximo nível.

(d) *Avanço*: o progresso entre os níveis depende mais de instrução do que da idade ou maturidade do aluno.

(e) *Desnível*: não há entendimento entre duas pessoas que estão raciocinando em níveis diferentes ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno.

Portanto, o professor deve identificar o nível de seus alunos, para usar a linguagem e a instrução adequadas. Outra conseqüência importante das propriedades é que todo aluno é capaz de progredir de nível se passar pelas experiências adequadas. E não há idade limite para os níveis. Isto é, uma pessoa que nunca passar por experiências do tipo dedutivo e formal dificilmente atingirá o nível 4.

Para progredir de um nível para o imediatamente superior, o aluno deve vivenciar 5 fases:

- *Informação*: professor e alunos envolvem-se em conversas e atividades sobre os objetivos de estudo deste nível. Observações são feitas, perguntas são formuladas e o vocabulário específico do nível é introduzido.

- *Orientação dirigida*: os estudantes exploram o tópico de estudo através de materiais que o professor ordenar cuidadosamente. Estas atividades devem revelar gradativamente aos alunos as estruturas características do nível.

- *Explicação*: acrescentando sobre suas experiências prévias, os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas. O papel do professor é mínimo: apenas auxilia os alunos a usar a linguagem apropriada.

- *Orientação livre*: os alunos procuram soluções próprias para tarefas mais complicadas, que admitem várias soluções e problemas em aberto.

- *Integração*: o aluno revê e resume o que aprendeu, com o objetivo de formar uma visão geral do novo sistema de objetos e relações.

Com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens e até simultaneamente.

Exemplos de atividades baseadas nos níveis de van Hiele e explorando diversas habilidades podem ser encontrados no Boletim do GEPEM nº 15, no artigo da Professora Maria Laura Leite Lopes. ([5]).

Baseada no modelo de van Hiele, uma nova resposta pode ser dada à pergunta: "Por que os alunos têm dificuldades em Geometria?".

- Porque, em geral, o ensino é dado no nível 3 (van Hiele) e os alunos, na maioria, não passam do nível 1. Portanto, não pode haver entendimento, e a aprendizagem é apenas por memorização e repetição.

Aceita esta explicação, ainda resta o dilema de como evitar esta discrepância de níveis. E a solução é a óbvia: fazendo coincidir o nível de van Hiele atingido pela turma com o nível em que a instrução é dada.

Isso pode ser conseguido através de várias estratégias:

1º) Elevar o nível atingido pela turma através de atividades adequadas que dêem oportunidade ao aluno de manusear, classificar e relacionar propriedades das diversas figuras geométricas;

2º) Baixar o nível em que a instrução é dada, num primeiro contato com a geometria. Isto é, antes de dar demonstrações, deixar que o aluno acredite que a propriedade é verdadeira através de experiências com material concreto e construções com régua e compasso.

3º) Usar as transformações do plano (reflexão, rotação, translação e homotetia) para justificar e clarear certos conceitos tais como: igualdade de ângulos formados por retas paralelas e uma transversal, congruência e semelhança.

Esta experiência será tentada em 1990 em algumas turmas como parte de uma Tese de Doutorado. Os resultados serão divulgados mais tarde. Mas aqueles que estiverem convencidos podem começar a modificar o seu próprio médodo de ensinar geometria desde já! E se algum professor estiver disposto a colaborar com a experiência, basta contactar o Projeto Fundão (Setor Matemática - UFRJ).

Obs.: Artigo escrito em 1989.

REFEFÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] PROJETO FUNDÃO (setor Matemática): uma introdução ao ensino de Geometria - apostila editada pelo próprio projeto.

[2] IMENES, Luiz Márcio. A Geometria dos Mosaicos. Coleção Vivendo a Matemática, Editora Scipione.

[3] FAINGUELERNT, Estela e outros. Trabalhando com Geometria (4 volumes), Editora Ática, 1989.

[4] VAN HIELE, P. La pensée de l'enfant et la géométrie. Bulletin de l'Association de Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 38e Année, nº 198, 1959.

[5] LOPES, Maria Laura M.L. Sobre o Ensino de Geometria. Boletim do GEPEM nº 15, pag. 5-16, 1983.

ETNOMATEMÁTICA E EDUCAÇÃO

Marcelo C. Borba
Tradução de Moema Sá Carvalho

Neste artigo discutirei a noção de **etnomatemática**, que pode ser vista como uma abordagem epistemológica da Matemática, e relacionarei etnomatemática à educação. Esta discussão conduzirá a uma visão de como a Matemática deverá ser incorporada nos currículos escolares e a sugestões a respeito de como pedagogicamente deverá ser praticada.

1. UM PLANO DE FUNDO FILOSÓFICO PARA A ETNOMATEMÁTICA

Nesta seção farei a síntese de uma visão da humanidade na qual se baseia a idéia de etnomatemática, uma visão de como pessoas se relacionam com outras e com o mundo. Focalizarei duas idéias importantes: "diálogo" e "problema". Finalmente estabelecerei conexão entre a idéia de etnomatemática e essa visão das pessoas.

1.1 SERES HUMANOS E SUAS RELAÇÕES DIALÓGICAS

Essa visão dos seres humanos é baseada em uma abordagem fenomenológica na qual uma pessoa é vista como um "ser-no-mundo-com-outros".

Nessa visão cada pessoa é um "ser" enquanto sua essência é manifestada nas suas cotidianas maneiras de existir no mundo. Ela está "no mundo", não no sentido da água estar "em" um copo, mas no sentido de um ser estar em relacionamento com o mundo que se expande para ocupar um espaço sem dimensões. Esse relacionamento se amplia ainda no mundo, à medida em que a pessoa abrange novos significados sobre o seu próprio relacionamento no mundo. Ela está "com outros" porque sempre trabalha com alguma coisa e/ou fala com alguém (ainda que fale somente para ela própria).

Nesse ponto de vista fenomenológico dos seres humanos, uma pessoa é vista somente em conexão com o mundo: nem o mundo deverá ser visto sem ela. Mais ainda, os conceitos "humano" e "mundo", eles próprios, são intrinsecamente ligados, já que ambos os termos refletem significações que foram construídas pelo homem. Cada relação humana com outros homens se baseia em certas percepções: compreensão dos significados existentes e elaboração de novos significados. Cada pessoa está sempre em um **lugar** no mundo e vivendo um **momento** histórico. Em sua existência, uma pessoa se defronta com fatos nos quais ela também está envolvida. Essas experiências podem ser vistas como uma "cadeia de conscientizações" que está em fluxo indivisível e contínuo, como um rio, onde o pensamento é ao mesmo tempo mutável e constantemente fluente, embora a experiência seja vivida no seu próprio tempo cronológico "oficial". A reflexão em uma experiência não se detém no fluxo original da mesma, mas está sempre em uma nova parte do fluxo em andamento, levando em consideração um tempo anterior. Essa conscientização é um processo recorrente sem fim que personifica, em sentido lato, reflexão, conhecimento e pensamento.

Na terminologia utilizada por Paulo Freire (1981), conscientização pode ser "intransitiva" ou "transitiva". Uma pessoa com conscientização intransitiva não concatena suas experiências; ela sempre vive no momento presente e não pode portanto fazer conexões importantes. É provável que ela mude só superficialmente, como por exemplo, em resposta a modismos. Uma pessoa com conscientização transitiva desenvolve uma perspectiva mais reflexiva que a permite fazer conexões entre suas diferentes experiências e, portanto, fazer mudanças significativas em resposta a tais experiências. Freire argumenta que o enriquecimento de transitividade é necessariamente um processo dialógico ativo (isto é, um diálogo com outra pessoa). Portanto, conscientização transitiva e diálogo são ambos fundamentais ao processo de crescimento pessoal e educacional.

1.2 DIÁLOGO

Diálogo pode ser visto como um relacionamento horizontal entre dois ou mais indivíduos, no qual o "ser" de cada um se abre ele próprio ao(s) outro(s) de maneira autêntica. Diálogo é um relacionamento intersubjetivo em que o ser humano tenta conhecer cada um dos outros e revelar suas próprias verdades a cada um deles (Bicudo, 1979). Os sujeitos envolvidos no diálogo se comunicam usando somente sinais (por exemplo, palavras), mas também usando sinais inconscientes como pausas, modos de andar ou respirar, gestos etc. Nesse contexto, o significado das palavras não pode se limitar aos termos compilados em um dicionário; embora o fato de apenas dar um nome a alguma coisa já mostre a importância que ela tem em uma determinada cultura. De acordo com Alfred Schutz (em Wagner, 1979), palavras são condicionadas pelos elementos passados e futuros do discurso de alguma pessoa; palavras também têm valores emocionais e irracionais que não são explícitos. Significados de sinais também mudam de um grupo cultural para outro, já que cada grupo "modela" o significado das palavras no seu contexto. Finalmente, é importante assinalar que não pode haver diálogo se as esferas relativas aos seres humanos envolvidos não têm interseção. Em outras palavras, se os problemas que os envolvem são totalmente diferentes, o diálogo não pode ocorrer.

Neste texto a palavra "problema" está sendo usada de modo muito diferente do que aparece na maior parte da literatura de educação matemática.

A próxima seção enfocará a idéia chave de "problema".

1.3 PROBLEMA

O que é um problema? Se pergunto a um adulto à minha frente: "Qual é a cor da calça que estou usando?" isso é um problema? Em educação é importante distinguir um problema de uma simples pergunta para a qual a resposta é conhecida sem nenhuma necessidade de reflexão. Um outro mau emprego comum do termo problema se dá quando vem associado ao simples "não conhecimento". Se pergunto a alguém quantas universidades existem nos E.U.A., será isso um problema para a pessoa que não conhece a resposta? Isso, provavelmente, não constitui um problema para essa pessoa, porque talvez ela não esteja se importando com a questão. Quer a resposta já seja ou não conhecida, podendo ou não ser facilmente obtida, se a pessoa não tem interesse a seu respeito, isso não significará um problema para ela. Nessa abordagem, é importante para a idéia de "problema" o que for de interesse para a pessoa a quem estejamos nos dirigindo. Se ocorre um obstáculo no caminho da própria existência de alguma pessoa e se essa pessoa não sabe como contorná-lo ou vencê-lo, então ela tem aí um problema. Um problema pode ser autêntico ou pode ser imposto. Uma dificuldade ou obstáculo imposto poderá compor um pseudo-problema, situação que frequentemente ocorre no ensino da Matemática.

Estudantes são convidados frequentemente a resolver problemas que não são problemas pessoais para eles; estudantes somente se empenham em resolver esses pseudo-problemas para obter uma boa nota.

Embora a discussão encaminhada até aqui tenha insinuado que a definição de problema que venho desenvolvendo seja subjetiva em excesso, Demerval Saviani (1985) é muito claro ao afirmar:

> Um problema, como qualquer outra experiência humana, tem no seu aspecto um lado subjetivo e um objetivo estreitamente ligados por uma unidade dialética ...
>
> O conceito de problema subentende uma conscientização de alguma situação de necessidade (aspecto subjetivo) e uma situação que embaraça sua conscientização (aspecto objetivo). (Saviani, 1985, p. 21, tradução do autor).

Os aspectos objetivo e subjetivo da definição do problema são ambos culturalmente delimitados, pois o que é interessante para alguma pessoa, o aspecto de subjetividade, depende parcialmente das tradições culturais dessa pessoa. Obstáculos (aspecto objetivo) também são culturalmente condicionados, porque o que representa obstáculo em uma determinada cultura pode não o ser em outra.

Portanto um problema pode ser visto como uma situação que envolve um impasse no fluxo da vida de uma determinada pessoa, sendo importante para ela. Quando um problema recai em um tratamento matemático, pode daí resultar alguma geração de matemática, por pessoas que tenham se sentido desafiadas perante a situação que deu origem ao problema.

2. ETNOMATEMÁTICA

Na última seção foi visto que uma pessoa é um ser informado que funciona dentro da linguagem e códigos interpretativos do seu grupo sócio-cultural. Uma linguagem é um código compreensível somente por pessoas que tenham participado de experiências passadas em comum. Cada linguagem expressa um processo de conhecimento desenvolvido por um grupo de seres humanos.

Um dos processos de conhecimento é a matemática. O conhecimento matemático expresso no código da linguagem de um dado grupo sócio-cultural é chamado de "etnomatemática". Nesse contexto, "etno" e "matemática" devem ser tomados em um sentido lato. "Etno" deve ser compreendido como se referindo a grupos culturais e não ao conceito anacrônico de raça; matemática deve ser vista como um conjunto de atividades tais como as de calcular, medir, classificar, ordenar, inferir e construir modelos. Como definida por Ubiratan d'Ambrosio (1985): "etnomatemática é matemática praticada dentro de um grupo cultural identificável, tal como sociedades nacionais tribais, grupos de trabalho, categoria de crianças de uma certa faixa etária, classes profissionais, etc". (D'Ambrosio, 1985, p.45). Mesmo a matemática produzida por matemáticos profissionais pode ser vista como uma forma etnomatemática, porque foi produzida por um grupo cultural identificável e porque não é a única matemática que tem sido produzida.

Essa visão da matemática profissional é consistente com a afirmação de George Joseph de que, por causa do viés eurocêntrico da maioria dos acadêmicos, "existe uma representação falha da história e das culturas de sociedade fora da tradição européia". Embora a afirmação de Joseph de que "a matemática pode ser vista como uma linguagem internacional com uma espécie particular de estrutura lógica" não seja consistente com uma visão etnomatemática de matemáticos profissionais. (Joseph, 1987, p.14).

Enquanto Joseph reconhece que cada matemática tenha uma espécie particular de estrutura lógica, diz que a matemática é internacional. Assim procedendo, Joseph está assumindo que a matemática independe da cultura, em lugar de ser uma construção histórica que é social e culturalmente condicionada, desde que o processo por que é organizada e o modo por que é expressa representam os códigos e o entendimento de matemáticos profissionais que são culturalmente condicionados, eles próprios. Portanto, "matemática acadêmica" não é universal (no sentido de ser independente da cultura) mais do que é "matemática do Quipu", ou "matemática de carpinteiro", ou "matemática de Shantytown" etc., nem é internacional no sentido de ser o Esperanto uma pretensa linguagem comum a todos os povos. Embora matemática acadêmica possa ser internacional no que esteja em uso corrente em muitas partes do globo, não o é naquilo que somente uma pequena porcentagem da população do globo provavelmente a usa.

No entanto a matemática pode ser considerada universal no sentido em que Alan Bishop usa o termo. Baseado em sua análise de diferentes culturas, Bishop afirma que atividades como as de contar, localizar, medir, planejar, jogar, explicar... "são universais, pois surgem para serem executadas por todo grupo cultural, já estudado, e também são necessárias e suficientes para o desenvolvimento do conhecimento matemático". (Bishop, 1988, p.182). Bishop também acredita que "...matemática tem uma história cultural, mas também que de histórias culturais diferentes tem vindo, o que só pode ser descrito como matemáticas diferentes."(p.180).

Mesmo quando Bishop não usa a terminologia etnomatemática, sua visão se volta para a abordagem desenvolvida neste artigo, ao afirmar que toda cultura faz matemática, embora a matemática seja expressa em processos unicamente para essa cultura. Assim, etnomatemática pode ser vista como um campo de conhecimento intrinsecamente ligado a grupos culturais e a seus interesses, sendo dessa maneira fortemente ligada à realidade desses grupos e expressa por uma linguagem comumente diferente da usada na matemática vista como ciência. Essa linguagem está umbilicalmente ligada à cultura do grupo, a seu "ethnos". (Borba, 1987, p.38).

2.1 EFICIÊNCIA DA ETNOMATEMÁTICA

As etnomatemáticas desenvolvidas por diferentes grupos são provavelmente mais eficientes para resolver problemas relacionados às suas culturas do que a matemática acadêmica (a menos que o problema esteja, talvez, na rede escolar) porque a etnomatemática desenvolvida por um dado grupo cultural está ligada aos obstáculos que emergiram nesse grupo. Um obstáculo e a necessidade de ultrapassá-lo conduz a atenção das pessoas para uma situação que pode ser descrita, como foi discutido neste artigo. Quando a solução desse problema envolve um tratamento matemático, essa solução contribui para o desenvolvimento da etnomatemática nessa cultura. Através do tempo essa etnomatemática caminha para se tornar provavelmente mais eficiente do que os modelos contidos nos livros-texto e escritos em códigos, nem sempre acessíveis a um dado grupo cultural, por estarem mais relacionados com a cultura na qual o problema foi gerado. Etnomatemática não deve, portanto, ser subcompreendida, como uma matemática "vulgar" ou de "segunda classe", mas como uma **diferente** expressão cultural de idéias matemáticas.

3. ETNOMATEMÁTICA, EDUCAÇÃO E IDEOLOGIA

A noção de etnomatemática tem claras implicações para a educação. Se povos diferentes produzem espécies diferentes de matemática, então não é possível pensar sobre educação como sendo um processo uniforme a ser desenvolvido da mesma maneira para grupos diferentes. Ao contrário, educação matemática deve ser pensada como um processo no qual o ponto de partida deve ser a etnomatemática de um dado grupo e o objetivo deve ser o de o estudante desenvolver uma abordagem multi-cultural da matemática.

Para educadores, desenvolver uma abordagem educacional baseada em etnomatemática, é importante que considerem o conceito de problema acima discutido. Problemas podem ser encontrados e desenvolvidos no que são baseados em etnomatemática, evitando assim os pseudo-problemas. Estudantes devem participar ativamente no esboço do seu programa pedagógico, como proposto por Freire. "O conteúdo de uma educação para conscientização crítica deve ser desenvolvido procurando-se com os estudantes experiências que dêem sentido a suas vidas". (Freire, 1970, p.28). Portanto, problemas para serem resolvidos devem ser escolhidos por estudantes e professores em um relacionamento de diálogo que promova uma conscientização crítica (como foi discutido na seção I.I). Conhecimento pode ser visto como um produto do seu relacionamento dialógico. Cada parte (professor, aluno) se encaminha para aprender com a outra em um processo dialético.

Visões mecânicas de um processo educacional dialógico devem ser evitadas; não se deve esperar das crianças de onze anos que desenvolvam uma compreensão sofisticada das contradições de um sistema político-econômico. Crianças desenvolvem uma conscientização de relacionamento com o mundo além de suas reflexões nos modos por que brincam, nas regras de um jogo e mesmo nos relacionamentos matemáticos desse jogo.

Uma pedagogia com estudantes como parceiros dos professores não significa que o processo educacional tenha um sentido livre. A incorporação de aspectos sócio-culturais em educação matemática e o processo dialógico de o fazer, cada um deles tem um papel a desempenhar. Um diálogo em que o professor fale por meio de sua etnomatemática (usualmente desenvolvida no colégio) e estudantes falem com a deles, não é neutro. Tal diálogo pode permitir que os estudantes fortifiquem suas raízes sócio-culturais, já que o seu (etno)conhecimento é legitimado (reconhecido como válido) no processo educacional. Essa pedagogia pode também enfatizar que a matemática não é isolada, única expressão, e não pode ser vista linearmente.

Uma floresta poderá ser uma imagem melhor para o conjunto global de etnomatemáticas, na qual cada árvore represente uma expressão diferente de etnomatemática sócio-culturalmente produzida.

Diálogo, o qual deve ser visto mais como um relacionamento horizontal do que como um relacionamento hierárquico, não quer dizer que o papel desempenhado pelo professor seja o mesmo que o desempenhado pelo aluno. Um relacionamento igual não significa que seja uniforme. O professor é diferente do aluno porque, entre outras razões, tem uma intenção explícita de educar. O professor trabalha e estuda visando vários objetivos a alcançar como um educador: um dos quais pode ser o de desenvolver um relacionamento democrático entre professor e aluno, que possa facilitar o desenvolvimento de uma certa conscientização crítica no estudante. Para promover esse desenvolvimento o professor acredita que deva compartilhar poder com os estudantes no processo educacional.

3.1 ETNOMATEMÁTICA E EDUCAÇÃO: SÃO ELAS REALMENTE COMPATÍVEIS?

A matemática aceita nessa proposta educacional estende-se da desenvolvida pelos estudantes para a aceita/desenvolvida/pretendida pelo professor. No diálogo da sala de aula, o professor pode aprender da linguagem etnomatemática falada pelos estudantes, tal como os estudantes estão aprendendo da linguagem etnomatemática acadêmica do professor. Esse processo dialógico não tem dicotomia entre educação e pesquisa, entre professor e pesquisador. Aquele que educa é também aquele que pesquisa a etnomatemática desenvolvida pelos estudantes. Portanto a pesquisa influencia na praxis educacional e vice-versa.

A etnomatemática de um grupo cultural é parte da vida do grupo: a matemática é gerada pela cultura em um processo "umbilical".

Etnomatemática é desenvolvida pelo interesse cultural do grupo em suas situações problemáticas, as quais desenvolvem mais longe o interesse do grupo em sua etnomatemática. O interesse em etnomatemática é natural porque é gerado pelos membros do grupo cultural, em resposta a suas próprias situações; embora esse interesse despertado em etnomatemática não se transfira automaticamente a um interesse em aprender/desenvolvendo qualquer outra etnomatemática, tal como a matemática acadêmica. Se o professor os força a trabalhar em problemas, mesmo problemas baseados nas idéias subjacentes à sua própria etnomatemática serão pseudo-problemas, como tantas vezes acontece em escolas regulares, com matemática acadêmica.

A argumentação pode nos conduzir a acreditar que não existe saída para o dilema do uso de pseudo-problemas na sala de aula. No entanto a idéia previamente discutida do diálogo oferece uma solução potencial, desde que o diálogo em sua forma autêntica implica um mútuo falar e escutar. É de se esperar que as pessoas envolvidas em um diálogo possam encontrar pontos de convergência e interseções nas suas esferas de significação. O professor/

pesquisador tem uma particular habilidade e responsabilidade de ajudar os estudantes a encontrar as interseções entre suas esferas de significações e a do próprio professor.

COMENTÁRIOS FINAS: ETNOMATEMÁTICA EM SITUAÇÕES ESCOLARES CORRENTES

Usando essa mesma estruturação, educadores tais como Borba, Frankesntein, Gerdes e Skovmose vêm desenvolvendo propósitos pedagógicos sustentados ao longo das linhas deste artigo. Embora várias dessas pedagogias tenham sido aplicadas com resultados encorajadores, em escolas "não-formais" e em educação de adultos, a questão ainda permanece se essa espécie de propósito fará sentido em situações correntes em escolas formais. Embora exista ainda um longo caminho para desenvolver tal pedagogia para salas de aula formais, pode ser argumentado que tal estruturação pode ser tentada em situações escolares e respostas iniciais podem ser desenvolvidas.

As idéias desenvolvidas neste artigo indicam que currículos não podem ser mudados com facilidade, simplesmente substituindo-se alguns temas por outros. É necessário considerar espécies mais fundamentais de mudanças. Em currículos tradicionais o uso de pseudo-problemas é inevitável, pois os estudantes não participam da escolha dos temas que serão desenvolvidos durante o ano escolar.

"Tematização" e "organização de projeto", para usar a terminologia de Skovmose (1985), são caminhos que muitos autores encontraram para quebrar a atomização de currículos tradicionais e construir uma nova visão da matemática. Nessa abordagem os temas e/ou projetos a serem desenvolvidos são decididos por professores e estudantes. Os temas não são necessariamente "matemáticos", ou "biológicos" ou "artísticos"; temas desenvolvidos conjuntamente com estudantes provavelmente não se igualam rigorosamente às disciplinas acadêmicas. Eles são meras pesquisas para serem empreendidas pelo grupo, onde o papel desempenhado pelos professores é auxiliar os estudantes a desenvolver uma visão crítica do mundo, uma "conscientização transitiva" nas palavras de Freire (1981).

Nesse propósito educacional a etnomatemática, a etnoquímica, a etnobiologia, etc. praticadas por diferentes grupos de estudantes deverá ser o ponto de partida do processo pedagógico. Esse "etnoconhecimento" desenvolvido por grupos de estudantes deve ser comparado com o (etno)conhecimento desenvolvido pelas disciplinas acadêmicas de maneira que o conhecimento acadêmico possa também ser visto como culturalmente condicionado. Os estudantes e os professores deverão discutir a eficiência e a relevância das diferentes espécies de conhecimento em diferentes contextos. Com essa abordagem, mistificação sobre ciência deve ser evitada e a matemática não deve mais ser vista como uma opressiva e todo poderosa esfera do conhecimento.

RECONHECIMENTO

Agradeço a Marcia Ascher, Maria Bicudo, Ubiratan d'Ambrosio, David Henderson, Anne Kepple, Margarida McCasland, Jan Rizziti e John Volmink pelos comentários que fizeram sobre este artigo, ressalvando sua responsabilidade sobre o conteúdo do mesmo.

OS DISPARADORES NO ENSINO DE ALGUNS TÓPICOS DE MATEMÁTICA

Alciléa Augusto
CEJK/RJ

0. Minha experiência ao passar do ensino universitário para o ensino secundário, num curso de Magistério, em um bom colégio do Estado do Rio de Janeiro. Diferenças que encontrei nas *condições de trabalho do mestre*: a primeira e determinante de outras, o salário aviltante; a segunda foi a falta do regime de dedicação exclusiva do corpo docente e de uma boa biblioteca.
Dificuldades ligadas ao processo ensino-apredizagem:
i) distância entre o que o professor tenta passar e o que o aluno está vendo ou fazendo. Parece que o estudante busca mais o adestramento, deixando crítica e verificação como tarefas do mestre. Entendi melhor o artigo de R. Dante, Como ensinamos (RPM 6, p.32);
ii) distância entre a postura do aluno em casa (contestação, curiosidade, iniciativa) e diante do desafio escolar (passividade, imitação, submissão mental);
iii) dilema do mestre, oriundo da distância entre o discurso pedagógico (buscar problemas no dia-a-dia, aplicado às condições de cada turma, respeitar soluções de cada estudantes, dar tempo ao aluno para redescobrir os conceitos) e as condições de *seu* dia-a-dia que o impelem para uma prática de seguir um livro-texto e suas respostas a velocidades pré-estabelecidas.

1. Proposta de um caminho alternativo que denuncie esta falha ao estudante, tentando mudar-lhe a postura: o uso dos *disparadores*. A idéia é a de "construir" o sentido dos conceitos matemáticos, criando antes a necessidade de sua introdução.

1.1 O que é um disparador? É um problema que pode ser enunciado e resolvido com elementos já conhecidos pelo estudante e que propicie a introdução de um novo tema.

1.2 **Exemplo** - *As fantasias*: Uma escola de samba dispõe de duas oficinas para a confecção de suas fantasias. Uma delas entrega 56 fantasias prontas por semana e outra entrega 35 fantasias por semana. Quantas semanas deve trabalhar cada uma das oficinas a fim de, juntas, aprontarem 1708 fantasias?

1ª of.	2ª of.
3	44
8	36
13	28
18	20
23	12
28	4

Os alunos, com seus conhecimentos de Aritmética, encontrarão soluções do tipo: se a 1ª oficina trabalhar 3 semanas, a 2ª deverá trabalhar 44, ou 8 e 36, ou 23 e 12, etc. A tabela ao lado esgota as possibilidades entre os números inteiros (positivos) e faz aparecer duas Progressões Aritméticas. Modificando um pouco o problema, é possível aumentar bastante o número de possibilidades ou, mesmo, torná-las sem fim e, então, o conhecimento de uma delas, a partir das iniciais, sem que se precise enumerar todas as intermediárias, passa a fazer sentido. Entramos aí com a necessidade de encontrar uma expressão para o termo geral de uma PA, etc.

Características importantes do disparador:
- objetivo claro (se possível com um título) e bem definido.
- precisa ser compreendido somente com elementos já conhecidos (exemplos que levam ao conceito de semelhança: RPM 14, p.8 e Caderno 1 da RPM: o quebra-cabeça).

1.3 Quando usar o disparador?
- introdução de conceitos mais sutis (por exemplo, solicitar o registro dos resultados parciais de um jogo em que haja pontos ganhos e pontos perdidos: num certo ponto, haverá a necessidade de armazenar um resultado como 10-15 o que leva à introdução dos números relativos); um ponto crucial, o da aproximação de um irracional por decimais finitos pode surgir na busca do lado de um quadrado dentre todos os retângulos de área 12, problema proposto e comentado no Caderno 62 do IREM de Paris sobre números decimais.
- ênfase a um tema (por exemplo, antes de definir par ordenado, pedir aos alunos que organizem um arquivo numérico para registrar a localização de livros, numerados por ordem de compra, em estantes, numeradas por sua disposição na sala. O que se pretende é acentuar a diferença entre o livro 15 na estante 10 e o livro 10 na estante 15).
- erros persistentes (não fiz, ainda, experiência nessa direção).

1.4 Processo de ensino-aprendizagem: embora eu nada conheça sobre as várias teorias da aprendizagem, é possível perceber que o uso do disparador tenta explorar o binômio desequilíbrio-equilíbrio como processo de ensino-aprendizagem. O disparador provocaria o desequilíbrio e a introdução do novo conceito restabeleceria o equilíbrio. O conceito é apresentado não como um capítulo a mais a ser estudado e, sim, como uma nova ferramenta que tornará o aluno mais capaz, o cidadão mais forte. Atende, também, a um aspecto mais profundo: quase sempre os conceitos foram criados para resolver problemas.

1.5 Perigos a contornar

- falta de compreensão do enunciado (testá-lo entre colegas é um bom meio de evitar isto; ou pedir ao aluno que conte do que trata o problema, o que R.Douady chama de "devolução do problema");
- passividade do aluno;
- dispersão (causada, muitas vezes, pela angústia do mestre que pretende universalizar as experiências de cada grupo);
- angústia que o instante entre o desequilíbrio e o restabelecimento do equilíbrio pode gerar em alunos mais sensíveis e com maiores dificuldades.

1.6 O disparador e o livro-texto: é possível conciliar, quase sempre acrescentando um disparador no início de alguns capítulos.

1.7 Um disparo e muitos tiros: o mesmo problema pode servir como disparador para vários assuntos, às vezes com pequenas modificações. O problema das fantasias, que pode ser reduzido à equação $56x + 35y = 1708$, conduz a problemas de divisibilidade, MDC e MMC e equações diofantinas. Se ao invés de produção de fantasias o problema se referir a máquinas produtoras de tinta, uma a 56 litros por hora e outra a 35 litros por hora, a equação se mantém mas os números x e y poderão ser reais positivos. Daí, pode-se passar ao quadro gráfico e à linearidade, ficando mais simples o fato de que a acréscimos constantes de uma variável correspondem acréscimos constantes noutra. Se o número de máquinas com velocidades distintas for maior, atinge-se "num caso concreto" a 4ª dimensão ou mais ainda, etc.

1.8 *Conclusão:* dentre os vários pontos levantados no auditório, um deles precisa de um destaque especial nesse contexto. Trata-se da importância, para o estudante de hoje, do passo seguinte ao do disparador: o da formalização dos conceitos e do desenvolvimento da capacidade de trabalhar no nível formal mas tendo a consciência do sentido que foi construído mediante o uso do disparador.

PADRÕES PARA TERNOS PITAGÓRICOS PRIMITIVOS

Ruy Madsen Barbosa
UNESP

Polya tem em seus notáveis trabalhos preconizado a aprendizagem matemática com apoio em padrões e inferências plausíveis.
Nesta pequena tentativa de contribuição, procuraremos mostrar como se pode obter ternos pitagóricos primitivos com padrões bem simples.
Os padrões poderão ser úteis ao professor para elaboração de problemas relativos ao teorema de Pitágoras com os ternos encontrados, mas também como complementação de atividades relativas ao tema.

DESCOBRINDO UMA RELAÇÃO

Consideremos o conhecido terno (3,4,5) para o qual notamos que $5 - 4 = 1$ e $3^2 = 4 + 5$.

Isto também acontece para o não menos conhecido terno primitivo (5,12,13), pois $13 - 12 = 1$ e $5^2 = 12 + 13$.

Na verdade, isto se verifica para todos os ternos pitagóricos cuja diferença da medida da hipotenusa e a de um cateto é uma unidade, isto é, são inteiros consecutivos.

De fato, de $a^2 + b^2 = c^2$ temos $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$; portanto, se $c - b = 1$ teremos sempre $a^2 = c + b$.

DESCOBRINDO UM PADRÃO

Vamos escrever o terno inicial (3,4,5) e embaixo o segundo terno (5,12,13) que também possui elementos consecutivos. Observemos que o primeiro elemento aumentou de 2 unidades.

Experimentemos continuar. É plausível supor para o próximo terno que o primeiro elemento seja $5 + 2 = 7$. Então, se o padrão continua, a soma dos outros dois, que são consecutivos, deve ser $7^2 = 49$; são 24 e 25. Deu certo, o terno (7,24,25) é pitagórico primitivo. O padrão é credível.

Continuemos: $7 + 2 = 9$, e $9^2 = 81$, logo os dois consecutivos são 40 e 41.
Continue!

TERNOS

		1
	3	4-----5
+2 ↓		1
	5	12----13
+2 ↓		1
	7	24----25
+2 ↓		1
	9	40----41
+2 ↓		
	11	

ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

No caso do professor ter interesse em realizar alguma atividades exploratórias com os alunos sobre o padrão, poderá induzi-los a observar, por exemplo, que enquanto o primeiro elemento aumenta de duas unidades os outros aumentam de uma maneira interessante. Os aumentos é que estão em progressão aritmética: 8, 12, 16.

Portanto, se o padrão continuar, o próximo aumento será de $16 + 4 = 20$ e o seguinte $20 + 4 = 24$. Isto facilitaria a construção de novos ternos pitagóricos.

+2 ↓		+20
	11	60----61
+2 ↓		+24
	13	84----85
		+?

UM SEGUNDO PADRÃO

DESCOBRINDO UMA NOVA RELAÇÃO
- E SE A DIFERENÇA ENTRE A MEDIDA DA HIPOTENUSA E A MEDIDA DE UM CATETO FOSSE 2?

Da mesma relação anterior: $a^2 = (c - b)(c + b)$, com $c - b = 2$ obtemos $(c + b) = a^2/2$, portanto agora, o que se deve procurar no padrão são dois números c e b cuja soma seja a metade do quadrado do primeiro elemento. Mas, como a hipotenusa em ternos primitivos é dada por número ímpar, segue de $c = b + 2$ que b também é ímpar, ou que os dois números a serem procurados são ímpares consecutivos.

Novamente, o inicial é o terno (3,4,5), mas trocando a ordem para (4,3,5), pois $5 - 3 = 2$ e 3 e 5 são ímpares consecutivos cuja soma é a metade de 4^2.

O segundo terno, como no outro padrão deve começar com $4 + 2 = 6$; então a soma dos outros dois deve ser $18 = 6^2/2$, e como devem ser ímpares consecutivos, temos 8 e 10, mas não são ímpares consecutivos! Não deu certo. Mas ele é derivado do (3,4,5), curioso..., e se continuássemos?

TERNOS

	2	
4	3------	5
$+2\downarrow$		
6	8	10
$+2\downarrow$		
8	15	17

Temos $6 + 2 = 8$, então a próxima soma deve ser $32 = 8^2/2$, e como deviam ser ímpares, subtraindo 2 ficamos com 30 e $30/2 = 15$, e o outro é 17. EUREKA! Deu certo!

O que estava errado, aumentamos 2 e devíamos ter aumentado 4, e isto é plausível, pois no outro padrão o aumento de 2 era o dobro da diferença 1, e agora o dobro da diferença 2 é 4. Vamos testar o padrão:

Vamos iniciar de novo com os dois ternos já obtidos.

O próximo primeiro elemento deve ser $8 + 4 = 12$, e a soma dos ímpares consecutivos deve ser $72 = 12^2/2$, então eles são 35 e 37. FUNCIONOU! O terno é pitagórico primitivo. Continuemos: $12 + 4 = 16$, e como 162/2 é 128, os ímpares são 63 e 65. ÓTIMO.

Continue o padrão. Ele agora é bem credível.

TERNOS

	2	
4	3------	5
$+4\downarrow$		
8	15	17
$+4\downarrow$		
12	35	37
$+4\downarrow$		
16	63	65
$+4\downarrow$		
?	?	?

ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Os primeiros elementos aumentam de 4 em 4. E a hipotenusa? E o outro cateto?

De 12, de 20, de 28, então os aumentos aumentam de 8 em 8. Então o próximo deve ser $28 + 8 = 36$. E o padrão é obtido mais facilmente, melhorou!

Continue o padrão.

$+4\downarrow$		$\downarrow+36$
20	99	101
$+4\downarrow$		$\downarrow+48$
24	147	149
$\downarrow$		
?	?	?

Formulários

O professor interessado poderá facilmente obter os dois formulários seguintes, que damos a título de informação:

Para o 1º padrão
$a_n = 2n + 1$
$b_n = 2n(n + 1)$
$c_n = 2n(n + 1) + 1$

Para o 2º padrão
$a_n = 4n$
$b_n = 4n^2 - 1$
$c_n = 4n^2 + 1$

onde o índice inferior indica a ordem do terno no padrão.

Assim, para $n = 3$ temos
$a_3 = 7$, $b_3 = 6.4 = 24$ e $c_3 = 24 + 1 = 25$
e no 2º para $n = 4$ temos
$a_4 = 16$, $b_4 = 4.16 - 1 = 63$ e $c_4 = 4.16 + 1 = 65$.

*

Nota: Se o professor julgar preferível poderá continuar no 2º padrão aumentando o primeiro elemento de 2 em 2, porém alternadamente obterá ternos pitagóricos não primitivos, mas é também interessante, pois são todos derivados dos primitivos do 1º padrão, portanto o 2º padrão contém o 1º nele inserido.

RECOLOCANDO A QUESTÃO

Profª Zaira da Cunha Melo Varizo
Goiânia - Goiás - 1990

O que eu ouvi a escola dizer

O prédio da escola fala.
Fala através de seus jardins
do mato que cresce junto da janela da sala de aula,
da pintura desbotada das paredes,
dos corredores escuros, e mal cheirosos
das lâmpadas queimadas.
Dizem do descaso do abandono da sociedade
por aquilo que ele, professor, faz.

A sala dos professores,
algumas mal iluminadas, mal ventiladas,
onde os professores se comprimem
na hora do descanso;
outras ainda com um resto de dignidade,
amplas, arejadas, claras e cheirosas,
falam.
Falam através do mercado
de roupas,
de objetos de maquilagem,
de leite,
de queijo,
etc, etc,...
por meio dos quais o professor
procura melhorar seu parco salário.
Dizem do descaso e do abandono

por aquilo que o professor faz.

A sala de aula fala.
Fala através
de suas paredes pichadas,
do quadro de giz estragado,
do papel picado,
da ponta de lápis,
das bolas de papel amassado espalhadas pelo chão
de suas janelas de vidros quebrados,
de suas portas empenadas sem maçanetas,
de suas carteiras despedaçadas,
do teto que chora através das goteiras da chuva,
lágrimas que descem languidamente pelas paredes
ou gotejam pela sala.
Dizem do descaso e do abandono da sociedade
por aquilo que ele o professor faz.

O professor fala.
Fala através
dos horários que não ficaram prontos,
do planejamento que não faz,
das aulas que não dá
da não obediência ao horário
de início e término do dia letivo,
do sinal que não toca de forma regular,
do não cumprimento do calendário,
das provas que não dá.
Negam o seu próprio fazer.
Dizem do seu desgosto.
Dizem!
Não, não dizem, gritam.
Gritam sua revolta.

Alunos suados,
camisas desbotadas,
cabelos desgrenhados.
Alunos limpos,
camisas passadas.
Alunos cheirosos,
cabelos tratados.
Alunos crianças.
Alunos adultos.
Alunos felizes.

Alunos que colam
trapaceiam,
estudam,
gazeteiam,
brincam,
correm,
e amam.
Alunos,
só alunos
cheios de esperança,
de sonhos,
anseios,
esperam uma futuro risonho
pegam o professor pelo braço
e o levam para a sala de aula,
carregam sua pasta,
acompanham-no pelos corredores
em busca de esclarecimento.
Dizem, dizem
do seu desejo,
do seu querer,
de sua vontade.
Clamam pelo saber,
saber que acreditam
que romperá as correntes de pobreza
que lhe propiciará melhor alimentação
roupa bonita,
casa bonita,
conforto e, quem sabe...
talvez um dia... um carro.

Na sala dos professores se ouve o gemido da escola,
clamor surdo de um animal agonizante.
Sente-se o desespero de alguns professores
que lutam bravamente pela sobrevivência,
que buscam no escuro
tateando aqui e ali
pelo caminho da salvação.
Quem sabe
uma corda?
Não, basta um fiozinho de seda mesmo,
que lhe sirva de apoio
para que não se perca no vazio da morte.
Sente-se o desânimo de uns

e a desesperança de outros,
que, já sem forças,
massacrados pelo peso do abandono,
preferem buscar salvação à margem
e abandonam a escola.
Outros insensíveis
daquela insensibilidade que uma dor profunda traz,
caminham como sonâmbulos,
ora para cá,
ora para lá,
para onde as forças daqueles que lutam os encaminham.
Dizem do homem
a meio da intempéries da vida.