Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometricl concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), Proceedings of the 7th PME conference (pp. 223-228). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry - or when "A little learning is dangerous thing". In J. D. Novak (Ed.), Proceedings of the second international seminar: Misconception and educational strategies in sience and mathematics (Volume III, pp. 238-251). Ithaca, NY: Cornell University.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. Psychological Review, 63, 81-97.

Rosch, E., & Mervis, C. B. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. Cognitive Psychology, 7, 578-605.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Herbert (Ed.), Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in chool geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry K-12 (pp. 17-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. ZDM, 83 (1), 20-25.

Witkin, A. H., Moore, C. A., Goodenough, D. R., & Cox, P. W. (1977). Field-dependent and field indepent cognitive styles and their educational implications. Review of Educational Reserch, 47 (1), 1-6.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In J. L. Martin (Ed.), Space and geometry (pp. 75-98).
Columbus. OH: Eric Clearinghouse.

Zykova, V. I. (1969). The psychology of sixth grade pupils' mastery of geometric concepts. English translation in J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics (pp. 149-188). Chicago, IL: University of Chicago.

este artigo foi publicado anteriormente em
FOCUS ON LEARNING PROBLEMS IN MATHEMATICS
Winter Edition, 1989, Volume 11, Number 1
Center for Teaching/Learning of Mathematics

ATIVIDADES COM PROFESSORES BASEADAS EM PESQUISAS COGNITIVAS

Rina Hershkowitz; Maxim Bruckhelmer & Shlomo Vinner

Introdução

Um conhecimento geométrico básico é fundamental para que a criança interaja efetivamente com seu ambiente, como também para que ela inicie um estudo mais formal da Geometria. Este conhecimento básico, que compreende conceitos geométricos, seus atributos e relações geométricas simples deveriam, em geral, ser adquiridos (desenvolvidos) através de experiências (vivências) geométricas antes do ensino secundário.

Se as crianças devem aprender estes fundamentos, então é importante que os professores da escola elementar estejam confortáveis com estas idéias e as maneiras de auxiliar/orientar as crianças neste processo. Mas as pesquisas (Hershkowitz e Vinner, 1984) têm mostrado que os professores possuem padrões de concepções errôneas similares aos dos alunos do segundo segmento (5a. à 8a. séries).

Após descrever alguns padrões de semelhança entre as concepções errôneas dos alunos e dos professores, nós discutiremos algumas atividades para professores que podem não apenas ajudá-los na aprendizagem de conceitos geométricos mas também fornecerão um modelo muito útil do ponto de vista de aplicação em sala de aula.

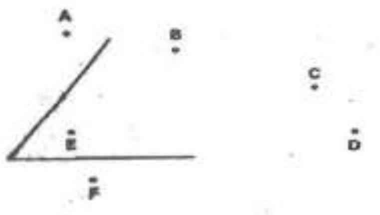
Exemplos de Imagens Conceituais Geométricas Apresentadas por Alunos e por Professores

A noção de imagem conceitual foi introduzida como a coleção de imagens mentais que um individuo possui de um determinado conceito (Vinner e Hershkowitz, 1980). A Imagem Conceitual de um indivíduo pode ser completa, parcial ou incorreta. Uma imagem conceitual parcial não possui todos os aspectos incluídos na definição do conceito. Uma imagem conceitual incorreta inclui ítens que não pertencem à definição do conceito.

Os exemplos que se seguem foram aplicados a 518 alunos (entre a 5a. e 8a. séries); 142 professores primários em estágio (PRÉ) e 25 professores primários em exercício (ST) em Israel. As respostas destes ítens nos permitiu comparar as imagens conceituais de alunos e de professores envolvendo certos conceitos geométricos e identificar alguns possíveis fatores que influenciam sua formação.

Exemplo 1: O Conceito de Ângulo

Se as crianças compreenderem o conceito de um ângulo, então elas perceberam que o desenho de um ângulo numa página de papel representa apenas parte daquele ângulo. Esta compreensão foi verificada através da questão apresentada na figura 1.



No seguinte desenho,
circule todos os pontos que
estão no interior do ângulo.

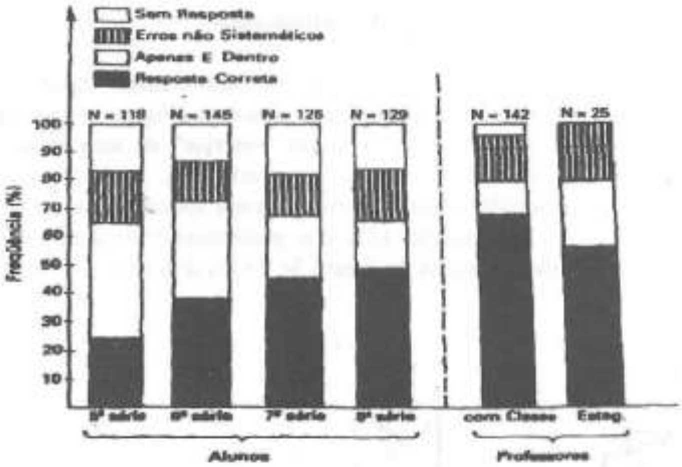


Figura 1. Tarefa sobre Concepção de Ângulo
e Resultados.

Os resultados sugerem menos da metade dos alunos concebem um ângulo como uma "entidade infinita". (de 25% na quinta série para 50% na oitava série). De modo semelhante, apenas um pouco mais da metade dos professores (68% dos professores em estágio e 55% dos professores em exercício) tinham o conceito correto de um ângulo.

Exemplos 2 e 3: Altura de um Triângulo e Diagonais de um Polígono

Em tarefas que requeriam o desenho de uma altura em diferentes tipos de triângulos ou todas as diagonais a partir de um vértice de um polígono concâvo, os professores (ST e PRE) tiveram um desempenho apenas um pouco melhor do que os alunos. Muitos professores, como muitos alunos, possuiam imagens conceituais incompletas ou imagens conceituais que incluiam elementos incorretos. Aqui temos dois exemplos:

a) Quando solicitamos que professores e alunos desenhassem a altura em relação ao lado a no triângulo obtusângulo (figura 2), alguns desenharam a mediana do lado a e outros desenharam o bisetor perpendicular de a. A incompletude dêsta imagem conceitual e sua aplicação incorreta foram expressas exatamente da mesma maneira pelos alunos.

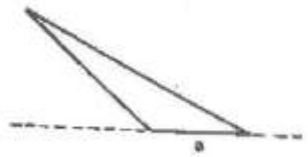


Figura 2. Triângulo Obtusângulo.

b) Professores, como também alunos, desenharam apenas as diagonais interiores do vértice A dos polígonos concâvos (Figura 3). No caso do quadrilátero concóavo (figura 3c), a noção "interior" de suas imagens conceituais de uma diagonal provocaram perturbações, confundindo o conceito. Rejeitando a possibilidade de uma diagonal exterior, ou eles não desenharam nada (40% dos alunos; 12% dos professores) ou desenharam algo parecido com a linha tracejada na figura 3c. (53% dos aluños; 49% dos professores).

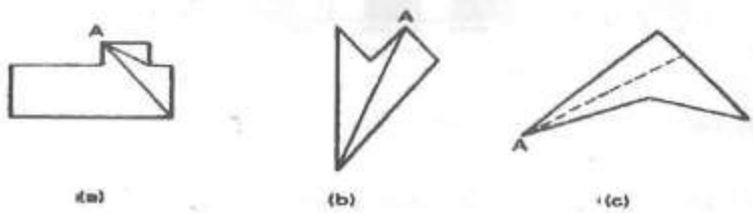


Figura 3. "Diagonais" de Polígonos Concâvos

Exemplo 4: O Impacto do Fator de Orientação (Inclinação)

O gráfico da Figura 4 mostra uma comparação entre a identificação de um triângulo retângulo em três orientações diferentes feitas por professores e por alunos. (Na atividade, eles tinham que identificar todos os triângulos retângulos numa determinada coleção de triângulos).

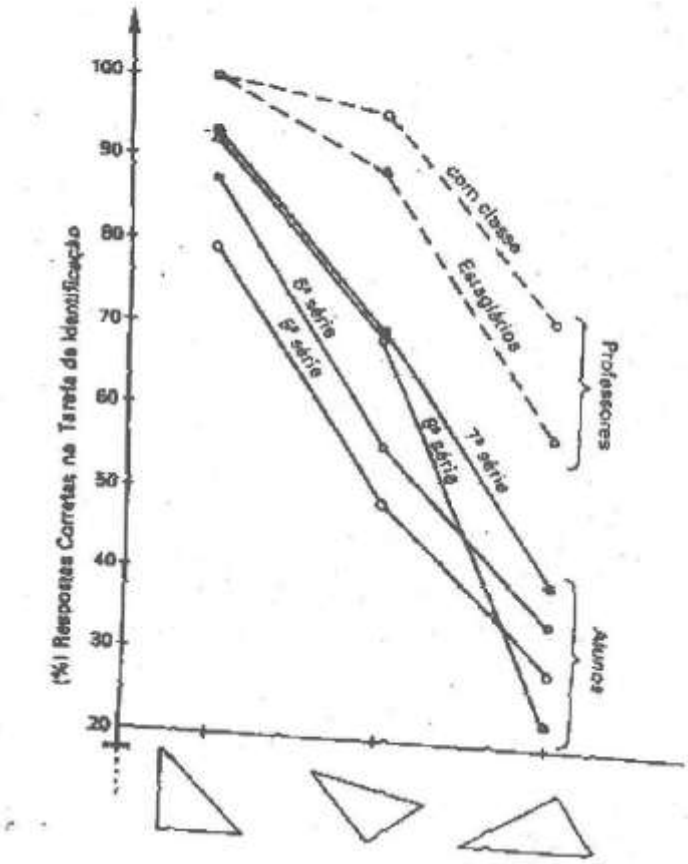


Figura 4. Desempenho de alunos e
de professores na identificação
de triângulos retângulos.

Embora, os professores tenham tido um desempenho bem melhor do que os alunos, como esperado, as suas respostas também exibem o mesmo padrão que os alunos. Desta forma, seus desempenhos foram melhores quando o ângulo reto estava orientado verticalmente (como desenhado normalmente), diminuiram quando o ângulo reto foi girado de 45^{o} , e diminuíram drasticamente quando o ângulo reto estava no "topo" da figura.

Exemplo 5: O "Bitrian"

O objetivo deste ítem era investigar o papel de uma definição verbal na formação do conceito relevante. Nós apresentamos a seguinte definição:

> Um "bitrian" é uma figura geométrica consistindo de dois triângulos que possuem um vértice em comum. (Um ponto está servindo como vértice para dois triângulos).

Metade de cada um de nossos grupos (alunos e professores) recebeu a tarefa de identificar bitrians entre outras figuras, e a outra metade dos grupos recebeu a tarefa de desenhar dois bitirans diferentes. As frequências das figuras construídas pelos professores (PRE e ST) e pelos alunos está indicada na figura 5. O padrão dos professores e dos alunos é muito semelhante em ambas as tarefas do bitrians (Hershkowitz e Vinner, 1984). Em ambas as tarefas, os professores e os alunos partiam do mesmo ponto: o conceito era novo para todos (professores e alunos). A definição verbal apresentada criou imagens conceituais muito semelhantes em ambas as populações. Isto é, a frequência relativa dos exemplos dados ao conceito mostram o mesmo padrão em ambas as populações. Em termos de validade matemática não há nada que distingua o bitrian (i) da figura 5 do bitrian (v), por exemplo, mas parece haver uma considerável diferença psicológica.

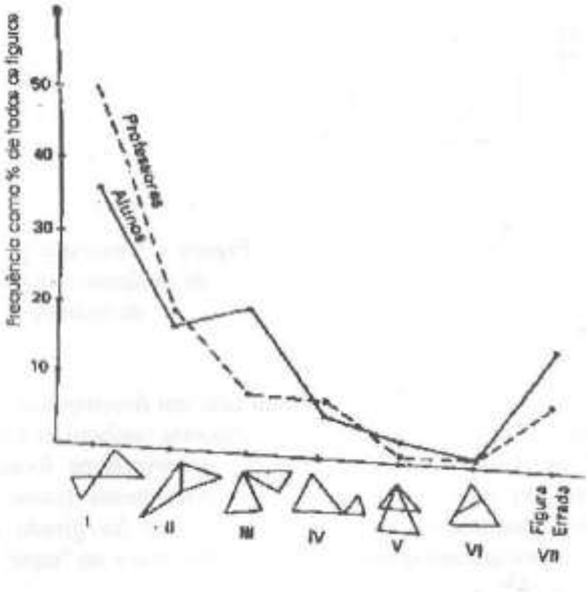


Figura 5. As frequências percentuais das figuras bitrians desenhadas pelos professores e pelos alunos.

Os exemplos anteriores, que são parte de um estudo bem mais amplo, fornecem evidências do baixo nível do conhecimento envolvendo as figuras geométricas básicas e seus atributos que os alunos possuem ao final da escola elementar e no início do segundo segmento. Os estudos baseados nas teorias de van-Hiele (Usiskin, 1982; Hoffer, 1983) têm mostrado que isto provoca muitas dificuldades em níveis mais altos da aprendizagem geométrica. Este baixo nível de conhecimento geométrico que também foi encontrado em professores da escola elementar (em formação e em exercício) em Israel levantam dúvidas sobre sua capacidade de modificar/transformar esta situação. Existe uma necessidade óbvia dos professores em formação e em exercício participarem de atividades envolvendo os conceitos geométricos básicos e seus atributos.

Um ponto ainda mais crítico é a similaridade evidenciada entre os professores e os alunos nos padrões de imagens conceituais incompletas ou incorretas. Isto nos fez levantar a conjectura de que os processos de formação de conceitos geométricos e os fatores que inibem esta formação atuam de forma semelhante nos indivíduos: alunos; professores estagiários e professores em exercício. Parece que existe uma necessidade de tornar o professor, e o futuro professor, familiares com estes processos e suas concepções errôneas associadas. Estas conclusões servem de base para as atividades apresentadas a seguir.

Atividades Para Professores

Ao planejarmos e desenvolvermos este trabalho para professores em serviço, nós adotamos o ponto de vista de que ensinar os professores da mesma forma que eles tinham sido anteriormente ensinados, seria ineficiente, aborrecido e insultante. Nos pareceu razoável supor que se os professores se tornassem explicitamente conscientes das imagens conceituais incompletas ou incorretas, eles estariam numa melhor posição para compreender as causas dos erros e concepções próprias dos alunos e desta forma, estariam melhor preparados para intervir adequadamente sobre a formação dos conceitos geométricos em suas salas de aula. Portanto, nós elaboramos atividades que permitissem aos professores adquirirem conceitos geométricos como também compreenderem os processos e dificuldades envolvidos na formação conceitual. Os objetivos explícitos das atividades eram:

1. melhorar as imagens conceituais dos professores sobre alguns conceitos geométricos;
2. desenvolver a compreensão do professor do:
   - papel da definição conceitual;
   - papel dos exemplos conceituais e contra-exemplos relevantes;

- papel dos atributos críticos e atributos não-críticos. (*)

3. modelar estratégias de ensino adequadas a sala de aula.
4. fornecer experiências na avaliação das dificuldades e das concepções errôneas dos alunos.

Nós incluímos duas amostras de atividades e as reações típicas de um grupo de 20 professores primários que mantinham um encontro de estudos semanal conosco, durante o periodo escolar.

Atividade 1: O "Trianquad"

Fase 1. Uma discussão não estruturada foi mantida sobre os modos comuns de ensino dos conceitos geométricos básicos, desde a pré-escola, com especial interesse sobre o papel da definição, dos exemplos conceituais, e os modos de representação dos exemplos na sala de aula e nos livros didáticos.

Fase 2. O exercício do "Trianquad" foi dado aos participantes (vide Figura 6) como uma possível estratégia de ensino (Herron et al., 1976). Esta tarefa apresenta a formação de um conceito através de sucessivas tentativas, usando um conjunto de exemplos e contra-exemplos. O participante gradualmente descobre que atributos um trianquad deve ter e quais não precisa ter (mas pode ter) e quais não pode ter. Ao final, é solicitado a definição de um trianquad.

Dezessete dos vinte professores redigiram uma definição que incluia os três atributos criticos do trianquad (uma figura geométrica consistindo de um quadrilátero e um triângulo com um vértice em comum). Os restantes três professores apresentaram erros em um dos atributos.

Quatro dos dezessete professores adicionaram informações desnecessárias ou incorretas baseadas em atributos não criticos de exemplos particulares. Aqui temos alguns exemplos:

* As figuras podem estar contidas uma na outra, sobreporem-se ou estarem separadas uma da outra. (Correta, mas desnecessária)

* O triângulo é menor do que o quadrilátero. (Incorreto)

* O trianquad é um poligono de 7 lados. (Incorreto)

Convém mencionar que a habilidade dos professores de verbalizar a definição era muito melhor do que os alunos de 6a. e de 8a. séries numa atividade semelhante.

(*)Atributos criticos (relevantes) são aqueles atributos que um exemplo deve ter de modo a ser um exemplo de determinado conceito. Atributos não-críticos (irrelevantes) são aqueles atributos que apenas exemplos particulares possuem.

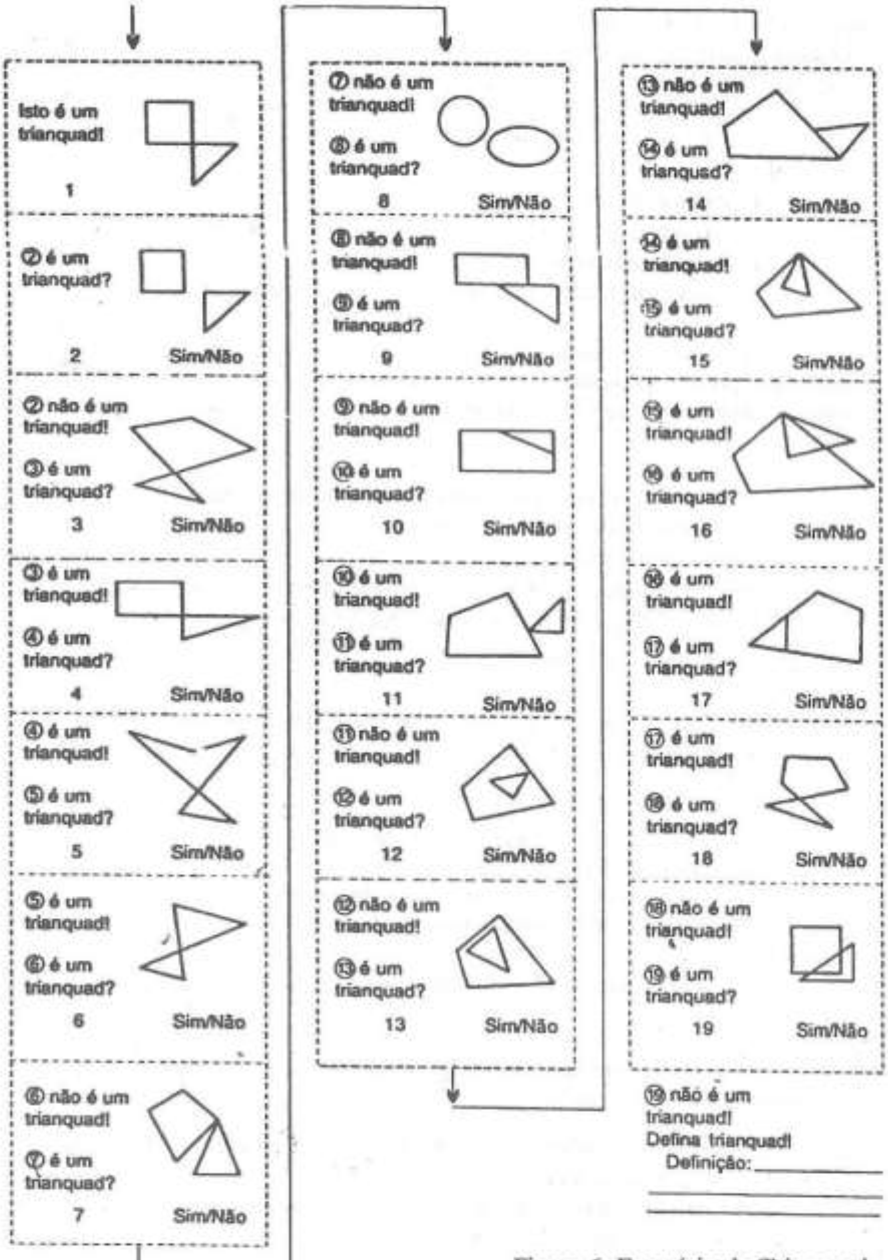


Figura 6. Exercício do Trianquad

(*)Atributos críticos (relevantes) são aqueles atributos que um exemplo deve ter de modo a ser um exemplo de determinado conceito. Atributos não-críticos (irrelevantes) são aqueles atributos que apenas exemplos particulares possuem.

Fase 3. Foi feita uma análise do exercício do trianquad através de uma discussão orientada. Transcrevemos a seguir alguns trechos desta discussão (PE denota o pesquisador e P os professores).

PE: Como o conceito de um trianquad é desenvolvido nesta atividade?

P: Através de exemplos.

P: Alguns deles eram erros - os exemplos não eram verdadeiros.

P: "Eles" indicavam os nossos erros.

P: Havia um feedback também ... (uma resposta imediata)...

A discussão continuou sobre as definições de um trianquad. Nós discutimos porque "polígonos de sete lados" era uma definição incorreta (nós não temos 7 lados no exemplo 10 e mesmo assim este é um trianquad), e assim por diante.

P: E sobre o vértice em comum; só pode ser apenas um?

PE: Qual é a opinião de vocês?

Vários Professores:

Sim. Não. Eu escrevi apenas um. Não. Eu escrevi pelo menos um...

P: "Eles" não nos deram um exemplo de um trianquad que tivesse mais de um vértice em comum, como este  , por exemplo, assim é apenas um.

P: Sim, mas por outro lado, "eles" não nos deram um exemplo com 2 vértices em comum, dizendo que não é um trianquad, portanto nós não sabemos.

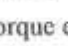
Desta forma, a discussão caminhou naturalmente nos levando às características de uma definição conceitual. Nós concordamos que tais definições deveriam ser mínimas por um lado, mas sem ambiguidades de outro. Em outra parte da discussão, a questão das características dos exemplos e dos contra-exemplos foi levantada.

PE: Para que ítens (números) suas hipóteses estavam erradas e porquê?

P: Eu fiz uma hipótese errada para o número 5  porque ele não era um quadrilátero "regular".

P: Eu errei o número 7  porque eu tive a impressão de que os lados estavam em linha reta.

P: Os exemplos iam nos ensinando, mas por outro lado, nós tinhamos que ser muito cuidadosos.

P: O número 10  não estava claro. Eu não errei nele, mas foi difícil para eu aceita-lo porque eu via a figura apenas como um pentágono e um triângulo com um lado em comum.

Vemos que os professores perceberam o efeito perturbador que alguns atributos dos exemplos podem provocar (tais como os atributos não críticos na figura número 7), e os fatores perceptivos (como no número 10) que inibem nossa habilidade de reconhe-cer alguns exemplos do conceito.

Fase 4. Nós usamos o exercício do trianquad como um modelo de aquisição/construção de um conceito. Nós escolhemos conceitos cujas imagens não estavam bem desen-volvidas para as populações de alunos e de professores. Um exemplo involvia desenhar a altura em relação a um lado num determinado triângulo (veja Figura 7).

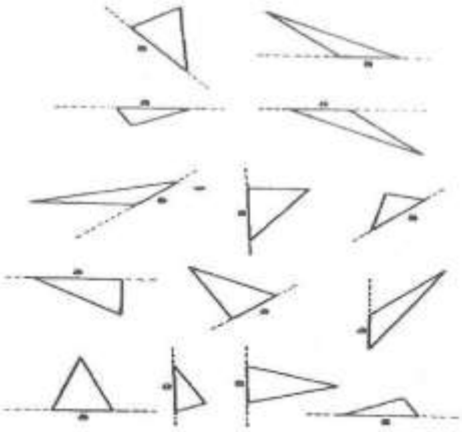


Figura 7. Os triangulos apresentados na tarefa de altura de triângulos.

No início, o pesqûisador e os professores analisaram juntos o conceito de altura de um triângulo, e então o pesquisador apresentou alguns erros típicos dos alunos e discutiu estes erros com os professores. A figura 8 mostra a resposta de um aluno.

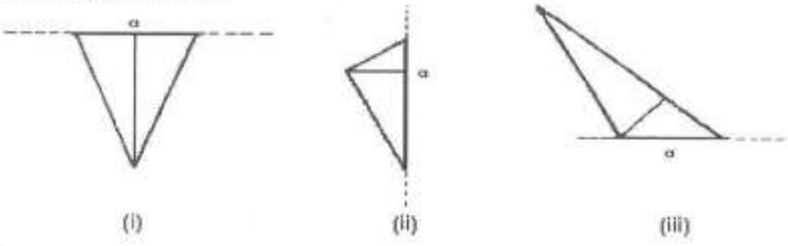


Figura 8. "Alturas" desenhadas pelo mesmo aluno.

PE: O que vocês acham deste aluno? O que ele desenhou?

P: Ele acertou no triângulo isósceles (número i) e no segundo (número ii).

P: No triângulo obtusângulo (número iii) ele decidiu que o vértice estava em

baixo.

P: Assim era mais fácil para ele.

P: Aqui a altura solicitada ought exige a extensão do lado *a*. A necessidade de uma altura externa não está clara para o aluno.

Como trabalho de casa, solicitamos que os professores criassem uma atividade que desenvolvesse o conceito de altura, usando o exercício do trianquad como um modelo e os erros do aluno como base para os contra-exemplos relevantes. Uma análise dos trabalhos de casa mostrou que a maioria deles contruiu um conjunto equilibrado de exemplos e contra-exemplos (os erros comuns) numa ordem ólgica razoável.

Um mês após esta atividade, solicitamos que os professores desenhassem as alturas do mesmo conjunto de triângulos (Figura 7). Desta vez, todos os vinte responderam corretamente a todos os tipos de triângulos enquanto antes apenas 8 tinham acertado corretamente todas as alturas dos triângulos.

Atividade 2: Quadriláteros

Fase 1.

A figura 9 foi apresentada e os participantes tiveram que criar três definições diferentes para os quadriláteros nos conjuntos A, B e C. Observe que cada um dos quadriláteros é representativo de um número infinito de tais figuras incluídas em cada um dos conjuntos A, B e C. Como usual, o diagrama de Venn é utilizado para mostrar a inclusão entre os conjuntos. (isto é: $A \subseteq B \subseteq C$).

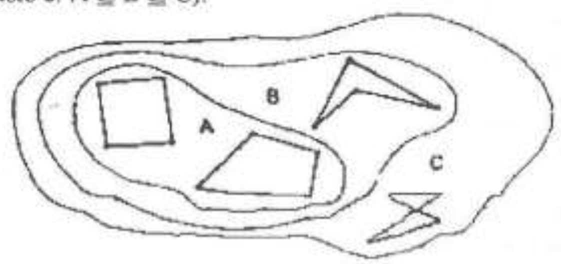


Figura 9. Conjuntos de Quadriláteros.

Parte da discussão que envolveu a verbalização da definição dos quadriláteros incluídos apenas no conjunto A foi a seguinte:

P: "Quadriláteros" com lados paralelos....

PE: ? ? ? ?

P: Apenas por acaso...

PE: ? ? ? ?

P: Uma figura fechada com 4 lados.

PE: E a figura do conjunto B não é uma figura fechada com 4 lados?

Professores: Sim! Ela possui quatro lados.

PE: Mas ela não está incluída no conjunto A.

Professores: Côncavos e convexos...

P: Quatro lados e quatro ângulos...

P: Um ângulo menor do que 180^{o}.

P: Polígonos de 4 lados sem nenhum ângulo agudo.

PE: ? ? ? ? ?

Mesmo professor (corrigindo a si mesmo): ... que não tenham nenhum ângulo maior do que 180^{o}.

P: E sobre esta figura? Isto é um polígono? 

PE: O que é um polígono?

P: Uma figura fechada cujos lados são segmentos retilíneos.

PE: Então, isto é um polígono?

Professores: Sim!

P: Mas uma figura geométrica deve ter uma área, e qual é a área desta figura?

PE: ??????

Os participantes concluíram que se esta figura é um polígono ou não depende da definição que adotarmos.

P: Para nos assegurarmos devemos adicionar à definição de A que lados opostos (sem extensões) não devem se interceptar.

A discussão produziu as seguintes três definições:

Conjunto A: Polígonos de 4 lados cujos ângulos internos são menores do que 180° e cujos lados opostos não se interceptam.
Conjunto B: Polígonos de 4 lados cujos lados opostos não se interceptam.
Conjunto C: Polígonos de 4 lados (lados opostos podem se interceptar).

No processo de verbalização das definições, os participantes explicitamente destacaram o seguinte:

* A interrelação de inclusão entre os conjuntos.
* Quando um conjunto se torna maior, os requisitos necessários tornam-se menores (são menos restritivos; possuem menos atributos críticos)
* Existe alguma arbitrariedade nas definições, mas do momento em que uma definição é adotada, ela se torna o critério final para decidir se um exemplo pertence ou não pertence ao conceito.

Fase 2. Solicitamos que os participantes fizessem uma "análise conceitual" do conceito de quadrilátero de acordo com as três definições, partindo com o conjunto A. Eles procuraram exemplos adicionais, listaram todos os atributos dos quadriláteros convexos, e neste processo estabeleceram uma distinção entre os atributos críticos e os não críticos.

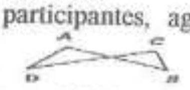
A busca de atributos críticos dos conjuntos B e C criou uma oportunidade para os professores superarem algumas de suas próprias concepções errôneas. Por exemplo, um dos atributos que foi sugerido para os quadriláteros do conjunto A foi de que cada um tinha duas diagonais. Enquanto examinava este atributo no conjunto B, um dos participantes exclamou: "Alguns quadriláteros aqui só possuem uma diagonal!!". Sua imagem conceitual (como a de muitos outros participantes) incluía apenas diagonais que fossem internas a figura. A discussão sobre diagonais, e uma definição seguida de exemplos e contra-exemplos, permitiu que o professor e seus colegas descobrissem por si mesmos onde estavam as diagonais das figuras do conjunto C.

Outra surpresa ocorreu quando os participantes discutiram a soma dos ângulos internos dos quadriláteros. Esta soma era facilmente visível ser 360° para os conjuntos A e B. Mas e quanto ao conjunto C? Não foi fácil aceitar que aqui a soma é menor do que 360° . Muitos professores queriam incluir o par de ângulos opostos. Isto conduziu a uma cuidadosa re-escrita da definição dada para o conjunto C, que assumiu uma forma semelhante a dada por Galbraith (1981):

> Um quadrilátero é o que você obtém se você tomar quatro pontos A, B, C, D num plano e uní-los com segmentos de reta AB, BC, CD, DA!

Ficou claro, então, quais são os ângulos internos nesta figura.

Neste ponto, uma discussão inevitável se iniciou se era ou não era aconselhável considerar estas figuras como quadriláteros no ensino da Geometria na escola elementar. Os participantes, agora, apreciaram porque muitos livros didáticos elementares adotam a definiçãodo conjunto B como "a definição" dos quadriláteros.



Fase 3. Os participantes foram informados sobre alguns resultados de pesquisas sobre este tópico (Hershkowitz e Vinner, 1983). Isto incluiu uma descrição de como as imagens conceituais dos alunos sobre quadriláteros mudam de acordo com a série escolar, dos simples quadrados a todos os quadriláteros convexos, e então, também aos quadriláteros côncavos.

> Nestas pesquisas, solicitou-se aos alunos que explicassem porque eles concluiram que uma determinada figura não era um quadrilátero. Algumas destas explicações foram apresentadas aos professores e analisadas numa discussão em grupo.
>
> Galia (5a. série): Esta figura não parece um quadrilátero.
>
> 
>
> Johnny (6a. série): Isto não é um quadrilátero porque são dois triângulos combinados.
>
> 
>
> Miriam (7a. série): Isto não é um quadrilátero porque possui seis lados e seis ângulos.
>
> 
>
> Alex (6a. série): Isto não é um quadrilátero porque não possui quatro lados iguais e quatro ângulos iguais.
>
> 

Os professores se detiveram aos diferentes níveis de raciocínio. Galia e Johnny aparentemente julgaram as figuras pela sua aparência global (nível 0 de Van Hiele), enquanto Miriam e Alex relacionaram os atributos da figura (nível 1 de Van Hiele). Miriam relacionou um atributo crítico do conceito de quadrilátero (quatro lados, quatro ângulos). Ela rejeitou a figura como um exemplo do conceito porque ela não pode encontrar estes atributos. Alex relacionou atributos não críticos (os atributos do quadrado de quatro lados iguais e quatro ângulos iguais), como se eles fossem os atributos críticos dos quadriláteros (isto é, como se eles fossem necessários a todos os exemplos do conceito de quadrilátero).

Esta discussão foi seguida por um exercício contendo 24 explicações diferentes de alunos. Os participantes, trabalhando em duplas, deveriam avaliar e analisar as explicações. Neste processo, houve clara evidência do crescimento da apreciação dos professores sobre o papel dos diferentes atributos na formação da imagem conceitual e, ainda mais, como alguns atributos não criticos dominantes conduzem a várias concepções errôneas (vide explicação de Alex).

Estas duas atividades exemplificam um modelo para treinamento de professores em exercício composto por importantes componentes. Existe, é claro, o componente do conhecimento geométrico no sentido de que após estas atividades a concepção dos professores dos conceitos discutidos está muito melhorada. Mas como isto é realizado num nível didático avançado, os professores são levados a considerar metaconceitos como definição, exemplos e contra-exemplos como também a se conscientizarem e analizarem as reações de seus alunos. Nós acreditamos que este tipo de atividade possa contribuir para romper o ciclo vicioso de concepções errôneas tanto dos professores quanto dos alunos em Geometria.

REFERÊNCIAS

Galbraith, P. L. "Aspects of Proving: A clinical Investigation of Process". Educational Studies in Mathematics 12 (fevereiro de 1981): 1-28.

Herron, Dudley J., E. Kundayo Agebebi, Larry Cattrell e Thomas W. Sills. "Concept Formation as a Function of Instructional Procedure". Science Education 60 (julho-setembro de 1976): 375-88.

Hershkowitz, Rina e Shlomo vinner. "The Role of Critical and Non critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts". In Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, ed. Rina Hershokowitz, p. 223-28. Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science, 1983.

______. "Children's Concepts in Elementary Geometry: A Reflection of Teachers' Concepts? "In Proceedings of the Eighth International conference for the Psychology of Mathematics Education, ed. Beth Southwell, Roger Eyland, Martin Cooper, John Conroy e Kevin Collis, p. 63-69. Darlinghurst, Austrália: Mathematical Association of New South Wales, 1984.

Hoffer, Alan. "Van Hiele - Based Research". In Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, ed. Richard Lesh e Marsha Landau, p. 205-27. Nova Iorque: Academic Press, 1983.

Usiskin, Zalman. Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. Department of Education, University of Chicago. (ERIC Document Reproduction Service nº SE 038813), 1982.

Vinner, Shlomo e Rina Hershkowitz. "Concept Images and Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Geometrical concepts". In proceedings of the fourth International conference for the Psychology of Mathematics Education, ed. Robert Karplus, p. 177-84. Berkeley: Lawrence Hall of Science, University of California, 1980.

Artigo publicado em Learning and Teaching Geometry, K-12 - NCTM 1987 Yearbook

LOCI e PENSAMENTO VISUAL

Rina Hershkowitz, Alex Friedlander (The Weizmann Institute of Science)
Tommy Dreyfus (Center for Technological Education)

LOCI é um software desenvolvido para fornecer aos estudantes a oportunidade de construir uma imagem conceitual visual, geométrica e qualitativa da noção de lugar geométrico - *locus*. As atividades pedagógicas foram elaboradas para levar os alunos de uma familiaridade inicial com as caracteristicas/propriedades do ambiente até o estágio onde eles sejam capazes de definir e investigar seus próprios *loci*.
Um dos dez itens de um questionário administrado após a aprendizagem com o LOCI foi analisada. Este item requer a identificação desenhos de lugares geométricos - loci - que satisfazem uma determinada condição. As respostas dos alunos foram dadas em diferentes níveis de pensamento visual. Os modos de raciocinio mais frequentemente empre-gados foram categorizados como local e global. Alguns alunos raciocinaram sistematicamente em todos ou na maioria dos casos, mas outros alunos modificavam seu raciocinio caso a caso.

Fundamentação

Nos textos didáticos tipicos do segundo grau, o conceito de lugar geométrico é definido formalmente, explicado e exemplificado em algumas poucas linhas. Então, os métodos computacionais de encontrar as equações algébricas de uma classe bastante limitada de lugares geométricos são discutidos extensivamente. Claramente, os autores destes textos didáticos esperam que os alunos se tornem especialistas nestes métodos computacionais algébricos, e os usem da mesma forma que os professores . Nenhuma atenção parece ser dedicada aos aspectos intuitivos, qualitativos e geométricos, que estão no âmago da idéia de um lugar geométrico; toda a essência do conceito de um lugar geométrico permanece obscurecida atrás das computações. O processo requisitado do aluno consiste na análise de uma situação que geralmente é apresentada verbalmente, traduzi-la para uma linguagem algébrica e então executar computações de acordo com regras formalizadas. Os processos de intuir, visualizar, explorar, conjecturar, definir, construir e dinamicamente transformar, que são tão importantes na matemática não encontram seu lugar neste tipo de atividade.

O Software

Com o objetivo de fornecer aos alunos a oportunidade de desenvolver um imagem conceitual visual, geométrica e qualitativa da noção de lugar geométrico, nós desenvolvemos um ambiente de aprendizagem computadorizado - um micromundo - chamado LOCI. Quando estiver trabalhando neste ambiente, o aluno estará integralmente no controle de sua própria atividade. Ele poderá escolher quatro tipos de ação:

- Definir um lugar geométrico (locus);
- Construir pontos deste locus definido;
- Fazer conjecturas sobre sua forma; ou
- Transformar o locus modificando os dados em sua definição.

Estas ações serão, então, brevemente descritas.

Definir um lugar geométrico (locus):

O software solicita que o usuário fixe dois elementos geométricos sobre a tela. Estes elementos podem ser dois pontos ou duas retas ou um ponto e uma reta. Então, o software solicita que o usuário decida se o lugar geométrico - locus - deverá ser determinado pela soma, pela diferença ou pela razão entre as distâncias destes dois elementos. Para dar um exemplo concreto, poderiamos escolher o locus em que todos os pontos cuja soma de suas distâncias a determinado ponto e uma determinada reta seja constante. O software também solicita que o usuário também decida qual o valor desta soma constante. Então, os dois elementos, o valor da distância entre eles, como também uma formulação verbal da definição surge sobre a tela (Fig 1). Para nossa surpresa, nós descobrimos que este conjunto básico gera 64 casos diferentes, dependendo não apenas da escolha dos elementos e da relação entre as distâncias (soma, diferença ou razão) mas também da posição relativa dos elementos e se a o valor da escolha é menor, igual ou maior do que a distância entre os elementos. Em outras palavras, uma variedade de situações bem limitada mas extremamente rica a ser investigada foi criada.

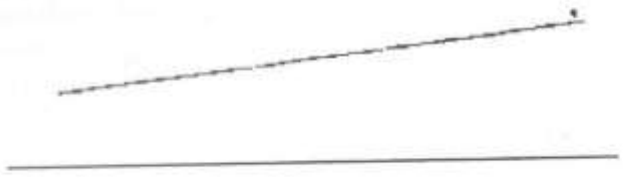


figura 1

Find all points whose distances from
the point A and the line b have a fixed sum of 32 units.

The distance between b and A is 29 units.

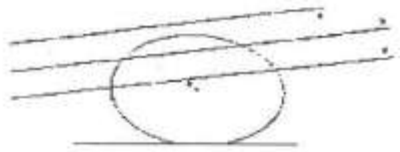


figura 2

Find all points whose distances from
the point A and the line b have a fixed sum of 32 units.
The distance between b and A is 29 units.

Construir pontos do locus definido

Uma vez que um lugar geométrico tenha sido definido pelas condições geométricas que seus pontos satisfazem, o aluno pode tentar construir pontos que pertençam ao lugar geométrico. Para realizar este objetivo, ele(a) pode desenhar circunferências (de um determinado raio ao redor de um ponto escolhido) e paralelas (numa distância escolhida a determinada reta), e marcar os pontos de interseção entre estas circunferências e as paralelas. Por exemplo, na figura 1, poderíamos interceptar a circunferência centrada no ponto A com raio de 50 unidades com as paralelas a reta b, distantes 32 unidades da mesma (Figura 2). Finalmente, é possível apagar as construções auxiliares, deixando apenas os pontos de interseção sobre a tela. Este procedimento permite que o aluno verifique num estágio mais avançado se estes pontos pertencem ou não ao locus definido.

Fazer conjecturas

Com base nas construções executadas e no raciocínio geométrico qualitativo, o aluno poderá rapidamente ser capaz de aventurar-se numa estimativa sobre a forma completa do lugar geométrico. O ambiente de aprendizagem propõe uma lista de 22 escolhas possíveis para o lugar geométrico, tais como: um ponto; uma elipse; vazio; segmentos de parábola; e outros. Se a conjectura estiver correta, o computador irá desenhar o lugar geométrico sobre a tela como também descrevê-lo verbalmente. Em nosso exemplo, o lugar geométrico consiste de dois segmentos de parábola (Figura 3). Em qualquer momento, o usuário pode escolher construir mais pontos para fazer novas conjecturas. Se um número suficiente de construções já tiver sido realizado - 6 construções, no mínimo - também é possível obter o lugar geométrico sobre a tela sem ser necessário fazer uma conjectura correta sobre sua forma.

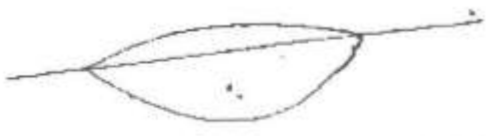


figura 3

The locus is this partial parabolas.

figura 4

The locus is a segment.

Transformar o locus

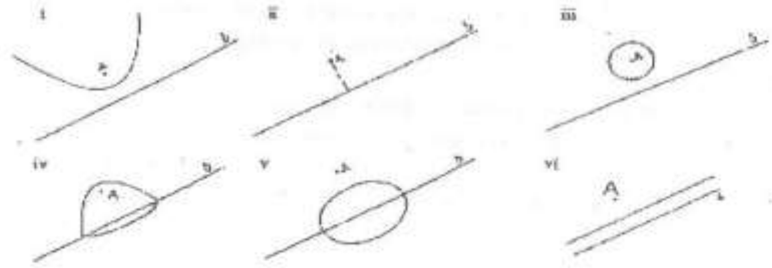
Após o lugar geométrico ter sido obtido sobre a tela, é possível transformá-lo dinamicamente modificando ou a posição dos dois elementos básicos ou o valor escolhido para a soma, diferença ou razão das distâncias. Em nosso exemplo, poderíamos, por exemplo, diminuir o valor da soma das distâncias ao ponto A e a reta b até que se igualasse a distância entre estes dois elementos; neste momento, o lugar geométrico se degenera transformando-se num segmento de reta (Figura 4). Se a soma for reduzida mais ainda, o lugar geométrico torna-se vazio, e o computador irá conformar este fato.

A Experiência

O ambiente de aprendizagem LOCI têm sido utilizado com dois grupos experimentais: com uma turma inteira (do segundo ano secundário) e com um pequeno grupo de alunos(do primeiro ano secundário). Em ambos os grupos, os alunos foram orientados através de Fichas de Trabalho determinadas e durante cerca de 4 períodos de aulas. Durante estas atividades, os alunos foram levados de uma familiarização inicial com as características do ambiente até o estágio onde eles eram capazes de definir e de investigar seus próprios lugares geométricos. Os alunos construiram pontos discretos de acordo com determinadas definições de lugares geométricos, utilizaram sua intuição para visualizar suas formas correspondentes e exploraram as transformações provocadas pela mudança das constantes envolvidas na definição original. Durante as atividades, o professor atuou como um consultor e na fase de síntese e conclusões, ele conduzia uma discussão com o grupo ou com a turma.

Finalmente, um questionário doi administrado para a classe experimental para verificar a compreensão dos alunos sobre os conceitos relacionados ao lugar geométrico. Para ilustrar os resultados obtidos, analizaremos as respostas de alguns alunos sobre os seguintes ítens deste questionário:

> *Dados uma reta b e um ponto A. Decida para cada um dos seguintes desenhos se ele é (ou não é) o lugar geométrico dos pontos com a soma das distâncias ao ponto A e a reta b fixa. Explique sua resposta.*



O desenho iv é o lugar geométrico com a soma fixa maior do que a distância entre o ponto A e a reta b, e o desenho ii é o lugar geométrico quando a soma é igual a distância entre A e b. Todos os outros desenhos não satisfazem a esta condição.

A tabela 1 apresenta alguns dos dados obtidos pelas respostas dos alunos. Como podemos ver, a maioria dos alunos foram capazes de indicar os desenhos corretos da definição apresentada.

Tabela 1. Respostas dos alunos ao ítem analisado.

Corretude das respostas *	Tipo de raciocínio **

desenho	resposta correta	correta	parcial-mente correta	incor-reta	sem justifi-cativas	parece que é	local	global	outros
i	91	65	22	9	4	--	32	46	21
ii	87	4	70	22	4	--	--	71	29
iii	100	65	9	13	13	--	18	68	14
iv	65	4	22	35	39	13	30	20	27
v	91	35	22	22	22	4	42	31	23
vi	100	61	13	13	13	4	17	71	16

* percentagem do número total de alunos; ** percentagem do número total de justificativas.

Tipos de Raciocínio

Na maioria dos casos, algum tipo de justificativa foi apresentada, mas não necessáriamente uma justificativa correta. As percentagens dos argumentos corretos foi acima de 60% sempre que o desenho não correspondia a uma determinada definição (exceto no caso da elipse).

A quantidade de argumentos corretos caiu quando o desenho era o lugar geométrico solicitado. Aqui, até mesmo os alunos que apresentaram respostas corretas falharam em considerar ambos os aspectos do lugar geométrico:

1. Todos os pontos do desenho satisfazem as condições definidas, e
2. Apenas estes pontos satisfazem as condições.

A maioria dos alunos relatou apenas o primeiro aspecto. Por exemplo, Amir disse no caso ii que o segmento de reta é o lugar geométrico definido e explicou:

> *"A soma das distâncias de cada ponto [sobre o segmento] à reta [b] e ao ponto [A] é igual a distância entre a reta [b] e o ponto [A]."*

Apenas Yiftah considerou também o segundo aspecto. Ele escreveu no caso ii a seguinte justificativa:

> *"Não há nenhum outro ponto [além daqueles sobre o segmento] cuja soma das distância [a reta b e ao ponto A] seja igual ao comprimento do segmento."*

Estas respostas podem ser o resultado do fato de que o software LOCI enfatiza principalmente o primeiro aspecto do conceito de lugar geométrico.

A maioria dos argumentos estava baseada em diferentes níveis de pensamento visual:

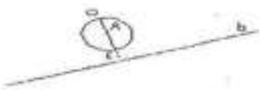
a. Muito poucos alunos usaram argumentos do tipo: "Porque é assim que parece para mim". Isto pode ser considerado um raciocínio no primeiro nível de van Hiele (julgamento do desenho pela sua aparência como um todo e não pela análise de suas propriedades.).

b. Mais de 70% das justificativas (exceto no caso iv), empregaram pensa-mento analítico-visual. Este tipo de raciocínio pode ser subdividido em local e global.

Raciocínio Local

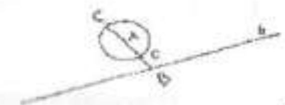
Este tipo de raciocínio está baseado na análise de um ou de um número limitado de pontos do desenho.

Este raciocínio é apropriado sempre que o desenho não é um exemplo do lugar geométrico definido, pois então estes pontos podem servir como contra-exemplos da definição. Por exemplo, Tal explicou no caso ii:



A circunferência A não é o lugar geométrico, pois as distâncias do ponto E e O ao ponto A são r, mas a distância do ponto O a reta b é maior do que a distância do ponto E a reta b.

Um raciocínio local semelhante foi apresentado por Yiftah também, mas ele expressou isto numa linguagem simbólica:



AD + DB = AC + CB

Ambos os alunos escolheram estes dois pontos sobre o desenho e fizeram uma análise baseada em considerações visuais, para mostrar que estes pontos não satisfazem as condições necessárias do lugar geométrico definido.

Raciocínio Global

Muitos alunos usaram considerações globais nas seguintes três maneiras:

* Um ou vários pontos sobre o lugar geométrico foram utilizados como representantes de todos os pontos do lugar geométrico. Podemos considerar como exemplos as justificativas de Amir apresentadas anteriormente (onde o desenho representa o lugar geométrico) ou a seguinte justificativa de Dudu para o caso v (onde o desenho não representa o lugar geométrico definido):

> *"Cada par de pontos simétricos está a mesma distância da reta b, mas a diferentes distâncias do ponto A. Portanto, a soma não será fixa."*

Este tipo de raciocínio reflete a compreensão do aluno sobre o conceito de lugar geométrico como o conjunto de todos os pontos com uma determinada propriedade.

* Outros alunos empregaram raciocínio global considerando o desenho como um continuum de pontos. Amir, por exemplo, escreveu para o caso i:

> *"Não! [a parábola não é o lugar geométrico] porque conforme nós caminhamos pela parábola, as distâncias tanto ao ponto A quanto a reta b são aumentadas."*

Hilah explicou no caso iii (a circunferência):

> *"... porque as distâncias ao ponto A são sempre as mesmas e as distâncias a reta b estão mudando."*

* Alguns alunos relacionaram globalmente a diferentes partes do desenho. Tal apresentou a seguinte justificativa no caso v (eleipse):

> *"As distâncias dos pontos do arco inferior a reta b é igual as distâncias dos pontos do arco superior a reta b. Mas as distâncias dos pontos do arco inferior de A são maiores do que as distâncias dos pontos sobre o arco superior ao ponto A."*

Todos os raciocínios apresentados acima mostram algum nível de pensamento visual e exceto o primeiro nível, todos, exceto o primeiro, também são analíticos.

<u>Resultados Adicionais</u>

Finalmente, gostaríamos de apresentar algumas descobertas adicionais da pesquisa.

> * Quase todos os raciocínios globais que foram apresentados estavam corretos ou pelo menos, parcialmente corretos.
> * Alguns alunos empregaram raciocínios tanto globais e locais simultaneamente no mesmo caso.
> * Outros raciocínios (incluídos na tabela 1 como "outros"), eram principalmente alguma repetição verbal das condições definidas. Alguns poucos alunos basearam suas justificativas em "visto casos semelhentes"durante seu trabalho com o software.
> * Alguns alunos raciocinaram sistematicamente em todos ou na maioria dos casos, mas outros alunos modificaram seu raciocínio de caso para caso. Por exemplo, Yiftah usou justificativas globais nos casos i, ii, v e vi; justificativa local no caso ii, e uma justificativa no primeiro nível de van Hiele no caso iv.

Nos parece que o nível da situação problema afeta o nível de raciocínio - o último cai quando as situações se tornam mais complexas.

Para maiores informações sobre a aplicação deste software procurar a Prof.ª Janete B. Frant na coordenação do Mestrado em Educação Matemática na Universidade Santa Úrsula.

ALGUNS DADOS SOBRE RINA HERSHKOWITZ

- Nasceu em Israel em 28 de maio de 1835.
- É casada e tem quatro filhos.
- Fez seus estudos em Israel onde em 1964 obteve o diploma de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, Física e Educação pela Universidade Hebraica de Jerusalém.
- Em 1979 obteve o grau de Mestre (M.A.) na Universidade de Tel Aviv, Israel.
- Em 1990 obteve o grau de Doutora (Ph.D.) na Universidade Hebraica de Jerusalém, Israel.
- De 1960 à 1967 foi professora de Matemática e Física em escolas de 1º e 2º grau em Israel.
- De 1967 à 1969 trabalhou preparando os programas de Matemática para 6ª e 8ª séries do 1º grau na Televisão Educativa de Israel.
- Desde 1967 é membro do grupo de Matemática do Science Teaching Department do Weizman Institute of Science, Israel, com o encargo de escrever livros-texto e guias para professores, realizar cursos de educação continuada para professores em exercício, assim como atividades de pesquisa e avaliação e supervisão as atividades dos outros membros do grupo.
- Desde 1976 participa e coordena programas, congressos e encontros sobre Educação Matemática (ICME e ICMI) e Psicologia da Educação Matemática (PME) tendo apresentado mais de 25 trabalhos em reuniões internacionais em França, USA, Austrália, Canadá, Índia, África do Sul e outros.

Seu Campo de trabalho, nos últimos anos, é centrado no Ensino da Geometria, mas se ocupa também com Educação Matemática, fazendo parte do corpo editorial do Journal For Research in Mathematic Education Gognition and Instruction.

- Em 1971 recebeu o Prêmio Shalit (Israel).
- Em 1972 recebeu a ajuda financeira para o Fundo Educacional Amos de Shalit.

- É membro de entidade de Pesquisa em Educação Matemática de Israel do PME (Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática) desde 1979.
- Publicou mais de 30 artigos em revistas e em anais de congressos, só em colaboração com outros especialistas, sobre Educação Matemática, Geometria, Cálculo, Álgebra.

Salientamos:

- Some Cognitive Factores as Causes of Mistakes in Addition of Fractions (com Vinner S. e Bruckheimer M.)

- The Role of Critical and Non-Critical Atributes in The Concept Image of Geometrical Concepts (Com Vinner S.)

- Algorithm Leading to absurdity, leading to Conflict, leading to Algorithm Review (com Markovitz Z. e Bruckeimer M.)

- Using Microcomputer to Enhance the Teaching and learning of secondary Mathematicos (com Zehai N.)

- Incipient "Algebraic" Thinking in Pre-Algebra Students (com Friediander A. e Arcavi A.)

- Publicou uma dezena de capítulos de livros, só ou em colaboração com outros especialistas ,sempre sobre os assuntos de sua especialização.
- Publicou uma mais de 30 artigos em Hebraico e em Ingles resultados de pesquisas.
- Foi Editora dos anais do 7ª PME em 1983.
- Foi autora de uma série de 5 livros-textos para estudantes de final do 1º grau em Israel e os relativos guias para o professor de 1969 à 1974.
- Foi co-autora de 4 livros texto para alunos de 1º grau em Israel de 1969 à 1981.
- Foi co-autora de 6 unidades de programas de recuperação de alunos socialmente carentes e 2 guias respectivos para docentes, em Israel de 1977 à 1979.
- Foi consultora de uma série de livros sobre Projetos de Matemática Secundária (Singapura) de 1985 à 1988.
- É consultora do 2 séries de livros para cursos de final do 1º grau em Israel desde 1979.
- Foi consultora de uma série de livros guia para Professores de 1980 à 1983.
- Foi consultora de 20 unidades do Programa Agan para Educação Visual de 1984 à 1991.

- É consultora de alguns programas de cursos desenvolvidos pelos membros do Grupo de Matemática do Departamento de Ensino das Ciências do Instituto Weizman de Israel.
- Foi professora -convidada em 1993 no Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, Brasil.