

Há uma concordância de que a falha dos alunos na reinvenção das provas (quarto nível de van Hiele) ou até mesmo em esquemas mais amplos de um sistema dedutivo possui duas causas principais: (a) o sistema lógico, da maneira em que geralmente é ensinado, "fornece apenas o resultado final da descoberta matemática e falha completamente em fornecer ao aprendiz uma visão dos processos em que as descobertas matemáticas são produzidas" (Skemp, 1971, pág. 13); e (b) o aprendiz não possui a maturidade lógica para experimentar ou se conscientizar da necessidade das provas (Balacheff, 1987b). Atualmente, é senso comum de que as descobertas empíricas e indutivas na Geometria são necessárias por que (a) elas introduzem um aspecto de descoberta; (b) pela percepção da generalização como uma conjectura em si mesma, o aprendiz sente a necessidade de provar aquilo que ele ou ela tenha conjecturado como verdadeiro; e (c) experiências indutivas são a base intuitiva sobre a qual a compreensão e a geração de uma prova dedutiva podem ser construídas. Schoenfeld (1986) expressou este ponto de uma maneira mais simétrica, afirmando que "a fundamentação sobre a qual o desempenho geométrico está baseado inclui tanto competências indutivas quanto dedutivas" (pág. 226). As pesquisas cognitivas estão tentando investigar a validade das crenças expressas anteriormente e levantam questões tais como:

1. "Como os alunos fazem a transição do específico para o geral em Geometria?" (Yerushalmy, Chazan, Gordon & Houde, 1986)
2. "Como os alunos formalizam suas hipóteses e generalizações?" (Yerushalmy et al., 1986)
3. Os alunos sentem a necessidade de justificar as conjecturas que eles tenham estabelecido?
4. Quais são os processos e dificuldades que os alunos têm nas provas?
5. "Quais são os sentimentos dos alunos quanto ao papel da prova e quanto a sua validade?" (Fischbein & Kedem, 1982)
6. "Quais são os contextos em que uma prova matemática pode parecer como sendo um instrumento eficiente e relevante na resolução de problemas que as crianças tenham reconhecido desta forma?" (Balacheff, 1987b)

Processos Conjecturais e Processos Dedutivos

O microcomputador estabelece uma nova dimensão às pesquisas e ao ensino da habilidade de fazer conjecturas e de seu valor pedagógico. Softwares como o Cabri Géométrie (Baulac et al., 1988) e o Geometric Supposer (Schwartz, Yerushalmy & Educational Development Center, 1985) criaram um poderoso ambiente de aprendizagem para descobertas indutivas em Geometria, que podem ser formuladas fazendo conjecturas. Por exemplo, o Geometric Supposer permite que os usuários desenhem elementos geométricos, façam medidas nestas construções e mais importante, repitam

estas construções sobre figuras aleatórias ou sobre figuras construídas pelos próprios usuários. Neste ambiente de aprendizagem, os alunos se engajam "em atividades significantes de construção da Matemática e geração de hipóteses" (Yerushalmy et al., 1986, pág. 184). Yerushalmy e seus colegas investigaram as três primeiras questões anteriores. Eles afirmaram que usar este ambiente "requer um considerável planejamento do professor e esforço durante todo processo tanto do professor quanto dos alunos pois exige que eles assumam uma boa parte da responsabilidade de sua aprendizagem" (pág. 187). Eles descobriram que usando o Supposer: (a) alunos do secundário (com baixo nível de habilidades) eram capazes de pensar sobre uma figura (uma construção) em termos dinâmicos e de vê-la como um representante de toda uma classe, (b) não era fácil para os alunos, fazer conjecturas ("encontrar padrões em seus dados e expressar estes padrões em termos gerais," pág. 188), e (c) os alunos sentiam a necessidade de justificar suas generalizações.

O estudo de Balacheff (1987b) é um exemplo de pesquisa e de ensino que toma a visão unificada de que a conjectura e a prova são estágios necessários dos processos pessoais e tenta definir contextos em que estes processos possam parecer relevantes à resolução de problemas (questão 6, anterior). Ele construiu uma situação de aprendizagem elaborada como "um processo didático em que alunos - de cerca de 12 anos de idade - irão descobrir, então formular como uma conjectura e finalmente provar que a soma das medidas dos três ângulos de um triângulo é 180° " (Balacheff, 1987b, pág. 8). No início, os alunos mediram os ângulos de muitos triângulos e compararam seus resultados. Então, cada aluno tinha que prever a soma dos mesmos triângulos e comentar sobre as possíveis discrepâncias entre as previsões e os resultados das medidas. A etapa seguinte era o nascimento de uma conjectura e o último estágio - a construção de uma prova como resultado de um esforço comum dos alunos e do professor.

Em outro estudo, Balacheff (1985) investigou o comportamento conjectural dos alunos quando suas hipóteses eram confrontadas com contra-exemplos. A expectativa era de que quando um aluno descobrisse um fato que contradissesse a hipótese, ele ou ela iriam abandonar a hipótese e procurar outra. Balacheff apresentou o seguinte problema a alunos entre 13 e 14 anos de idade: "Descubra uma maneira de calcular o número de diagonais de um polígono, uma vez que conheçamos a quantidade de vértices que possui" (pág. 224). Os alunos trabalharam em duplas e foram observados. O observador intervinha de tempos em tempos, especialmente de modo a apresentar contra-exemplos às conjecturas incorretas. A análise dos protocolos demonstrou que, contrariamente a expectativa acima, superar uma contradição é um processo complexo. O comportamento dos alunos era de certa forma semelhante aos descritos por Lakatos (1976). As modificações feitas nas conjecturas durante o processo de resolução estavam relacionadas bem de perto com as mudanças de significado dos conceitos envolvidos na questão.

Outro aspecto da relação entre hipótese e prova foi examinado por Schoenfeld (1982). Ele acreditava que as provas, assumindo que uma aprendizagem significativa dos tópicos tenha ocorrido, seriam usadas pelos alunos de modo a examinar a validade de suas hipóteses matemáticas. Infelizmente, isto não ocorre. Schoenfeld observou alunos de faculdade que participavam de seu curso sobre resolução de problemas. Todos eles tinham estudado Geometria na escola secundária e eram competentes em escrever provas geométricas elementares. Schoenfeld lhes apresentou um problema de construção geométrica no qual eles trabalharam em duplas enquanto seu trabalho era filmado. A análise das fitas de vídeo mostrou que os alunos geraram hipóteses através de meios puramente empíricos e intuitivos. Além disso, sua verificação também era puramente empírica; isto é, a utilização da régua e compasso foi orientada mais pelo olho e pela mão do que por análises sistemáticas. As conclusões de Schoenfeld foram de que "os alunos acreditam que a prova é apenas um jogo acadêmico, de sala de aula, uma atividade de pouco ou nenhum valor fora do ambiente artificial de sala de aula" (pág. 173). Como resultado disto, os alunos não se engajam em provas que estejam em contextos ligeiramente diferentes do contexto comum de provas em sala de aula. A razão disto pode ser ou que os alunos não aceitam a prova como uma forma válida de argumentação ou que eles a rejeitam de todo. Schoenfeld colocou a responsabilidade no currículo. Pode ser que a construção de situações de ensino-aprendizagem, como sugerido por Balacheff (1987b), seja uma possível maneira de melhorar esta situação.

Kramer, Hadas e Hershkowitz (1986) desenvolveram um micromundo por meio do qual os alunos poderiam executar construções de régua e compasso clássicas dedutivamente. O micromundo consiste de objetos (pontos, retas, segmentos, etc), operações sobre estes objetos (as construções básicas) e leis que governam a aplicação destas operações (as leis geométricas dedutivas). O micromundo sendo ainda, auto-corretor e auto-regulador. Alguns alunos do segundo ano secundário que trabalharam com o software foram observados. As observações indicaram que as correções ocorriam nos três níveis em que os autores estiveram atentos: o nível analítico, o nível sintático e o nível de aplicação das regras das construções geométricas. É importante mencionar que é impossível fazer uma construção com este software sem primeiro fazer uma análise cuidadosa e se a análise estiver incorreta, o aluno não terá nenhum produto ou nenhum produto incorreto. E também, o fato de que a legalidade de todo movimento ser observada pelo software ajuda a esclarecer as regras do jogo, algo que não está totalmente claro para muitos alunos que fazem construções geométricas, como Schoenfeld apontou.

Provas e Processos de Prova

Na Geometria Euclidiana, uma prova significa um argumento dedutivo formal. Nas pesquisas cognitivas nós estamos interessados nos vários tipos de provas (justificativas) dos alunos. Balacheff (1982) fez uma distinção entre prova - qualquer meio pelo qual nos convencemos de que

uma certa afirmativa seja verdadeira - da prova matemática (demonstração). A última é uma prova como aceita pelos matemáticos. Usando esta terminologia, Braconne e Dionne (1987) investigaram a compreensão de alunos e de professores sobre prova e sobre demonstração. Além disso, eles examinaram se havia uma correlação entre a compreensão dos alunos sobre a demonstração e sua elaboração matemática ou os seus níveis de van Hiele. Como Balacheff, Braconne e Dionne distinguiram vários modos de prova em Geometria, partindo de uma prova fraca ("você pode afirmar pela figura - o primeiro nível de van Hiele) e terminando com uma demonstração. Eles construíram um questionário consistindo de 12 soluções diferentes de um problema geométrico simples retirado de um livro didático francês. Cada solução pertencia a um dos cinco modos de prova sugeridos pelos autores. Ambos os alunos (de 15 anos) e seus professores deveriam reagir e avaliar as 12 soluções do questionário. Foi descoberto que, para os professores, prova e demonstração não eram considerados sinônimos. Por outro lado, a diferença entre os termos não parecia muito clara para os alunos.

Talvez a questão mais natural sobre a concepção de uma prova matemática e seu status seja a seguinte: "Um indivíduo envolvido com uma prova matemática compreende claramente que uma prova formal de uma afirmativa matemática lhe confere o atributo de uma validade a priori, universal e portanto, exclui a necessidade de qualquer verificação posterior?" (Fischbein & Kedem, 1982, pág. 128). Tentando responder esta questão, Fischbein e Kedem elaboraram dois questionários, um algébrico e outro geométrico. O questionário geométrico inclui a seguinte sentença: "ABCD é um quadrilátero e P, Q, R e S são os pontos médios de seus lados. Prove que PQRS é um paralelogramo." Em seguida, havia uma prova formal da sentença. E os alunos foram indagados se eles aceitavam sua validade geral. Ao final de tudo, a seguinte questão foi proposta:

"V é um indivíduo bastante duvidoso. Ele acredita que nós devemos verificar pelo menos uma centena de quadriláteros para estarmos convictos e seguros de que PQRS seja um paralelogramo. Qual é a sua opinião? Explique sua resposta!" As respostas das três séries do secundário foram analisadas e foram encontradas três categorias principais:

1. Consistentemente formal. Os alunos nesta categoria compreendiam corretamente a natureza da prova matemática.
2. Consistentemente empírico. Os alunos nesta categoria tinham uma abordagem empírica das provas matemáticas. Eles acreditam que verificações adicionais dos casos particulares acrescentariam maior validade a sentença que foi provada. A prova em si mesma não garante a validade absoluta da sentença.
3. Basicamente inconsistente. Os alunos nesta categoria demonstram comportamento inconsistente, aceitando a validade absoluta da prova, de um lado, mas não rejeitando a necessidade de verificações adicionais, por outro.

Os dados revelaram que menos de 10% dos alunos eram consistentemente formais e que cerca de 1/3 dos alunos eram basicamente inconsistentes. Metade dos alunos não poderiam ser classificados de acordo com estes critérios.

O Status Ontológico das Entidades Geométricas

O status ontológico das entidades geométricas é quase um problema filosófico, mas chega até o currículo da Geometria. A questão é se as entidades geométricas são parte do mundo físico real e se não são, o que elas são? Existem várias respostas filosóficas a esta questão. As mais comuns são (a) a abordagem formalista (a Matemática deriva de axiomas e não assume-se nenhuma realidade matemática); (b) a abordagem realista (os objetos matemáticos são objetos abstratos que existem no mundo abstrato); e (c) a abordagem construtivista (os objetos matemáticos são construtos psicológicos formados na mente humana). Vinner (1981) examinou esta as visões dos professores em formação e em exercício por meio de um questionário. As respostas caíam em três categorias:

1. Os objetos geométricos são parte do mundo físico (34%).
2. A Geometria lida com as conclusões que podem ser deduzidas de certas hipóteses. Portanto, os objetos geométricos não existem realmente - a abordagem formalista (15%).
3. Os objetos geométricos existem no mundo abstrato. Eles são objetos abstratos - a abordagem realista (47%).

Os professores na primeira categoria podem ter dificuldades com certos conceitos; por exemplo: a densidade ou infinitude de uma reta.

Concluindo as Discussões

Não é fácil escrever uma conclusão sobre este artigo devido a variada natureza das áreas e tópicos das pesquisas. Desta forma, inserimos conclusões sobre as discussões nas diferentes seções do artigo. Nestas, nós apontamos futuras implicações para pesquisas e para o ensino. Entretanto, existem alguns pontos gerais e algumas áreas gerais que necessitarão de pesquisas ou esforços instrucionais no futuro.

- * A aprendizagem da Geometria começa quando a criança começa a "ver" e a "conhecer" o mundo ao seu redor e isto pode prosseguir até pensamentos geométricos de alto nível através de processos indutivos ou dentro de sistemas dedutivos. As características e metas das pesquisas e de suas implicações pedagógicas mudam de acordo com o nível de pensamento geométrico. Portanto, é surpreendente que a maior parte das pesquisas que têm sido realizadas nas últimas décadas tenham se concentrado entre a 4a. série primária e o 2o. ano secundário (crianças entre 9 e 15 anos). Existem estudos envolvendo

professores em exercício e em formação, mas quase nenhuma pesquisa envolvendo a pré-escola (excluindo-se exemplos como o Projeto Agam). Parece que embora os pesquisadores tentem compreender os processos que se iniciam muito cedo, eles procuram os traços destes processos em estágios mais avançados. Se considerarmos que a metodologia de pesquisa está encaminhando-se na direção da observação e da documentação detalhada dos microestágios no comportamento do aprendiz e que a tecnologia moderna estimula e refina este encaminhamento, pareceria muito natural começar as observações tão cedo quanto possível. Ainda existe uma necessidade de investir esforços nas pesquisas sobre a evolução dos conceitos geométricos, do pensamento geométrico e sobre o desenvolvimento das habilidades visuais.

* Em relação à Geometria e ao computador, nós vimos anteriormente que a maioria dos softwares que servem às pesquisas e ao ensino da Geometria envolvem altos níveis de interação com o computador. O ambiente informatizado permite a manipulação de objetos específicos sobre a tela de maneira que oriente os alunos a vê-los como representantes de uma classe de objetos ou uma classe de construções com propriedades invariantes. Como exemplo temos o Cabri Géométrie, no qual a figura geométrica tem um status semelhante ao status de uma variável, sofrendo modificações, mas mantendo suas propriedades relevantes. Com esta base, os alunos são mais capazes de generalizar e de refletir sobre propriedades geométricas. Além disso, um micromundo informatizado pode ser construído naturalmente com objetos visuais sobre os quais as operações possam ser executadas de acordo com determinadas regras. Se estratégias inadequadas forem utilizadas, o feedback visual imediato pode conduzir a um conflito cognitivo e então, provocar que o aluno repense o processo de solução e a análise geométrica da solução. Nós temos visto como diferentes softwares estimulam novos horizontes de pesquisas e de ensino. Entretanto, nos parece que ainda é necessário realizar muitas pesquisas e aplicações dos softwares existentes, incluindo programas comerciais (veja por exemplo, o trabalho de Osta, 1987). Além disso, nós ainda precisamos de softwares adequados ao desenvolvimento de processos e estratégias de provas.

* A visualização e os processos visuais desempenham um papel muito complexo nos processos geométricos. Nós discutimos parte desta complexidade no contexto da formação de conceitos básicos. Há evidências de que esta complexidade continua em níveis mais elevados do pensamento geométrico; por exemplo, Hoz (1979) mostrou que a rigidez perceptiva, na qual os aspectos perceptivos de problemas atuam como perturbadores, afeta a habilidade de provar teoremas. Existem pistas (Yerushalmy & Chazan, in press) de que uma interação dinâmica com um micromundo geométrico como o

Suppor contribuir para uma flexibilidade visual. É necessário mais trabalhos para compreendermos melhor as contribuições positivas e negativas dos processos visuais.

* Existe um consenso de que a linguagem é um dos principais aspectos que caracterizam o nível do comportamento geométrico (Bishop, 1978; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958). Infelizmente, existem poucos estudos que abordem este ponto. Novamente, nós acreditamos que é necessário devotar mais esforços de pesquisa aqui.

* A inconsistência individual envolvendo as tarefas geométricas encontradas em alguns projetos de pesquisa geralmente são um subproduto do objetivo principal da pesquisa. Parece válido focalizar este aspecto do comportamento geométrico individual em futuras pesquisas. Além disso, há evidências de que, por um lado, algumas competências geométricas, tais como habilidade visual, tenham "uma natureza altamente individual e pessoal" (Bishop, 1989, pág. 14). Por outro lado, os perturbadores visuais atuam de modo muito semelhante em diferentes indivíduos e populações. Esta questão da natureza das habilidades visuais merece mais pesquisas.

* A interrelação entre os conceitos geométricos e os números é outro subproduto das pesquisas geométricas. O efeito do tipo de número (números elevados, fracionários, etc) sobre o desempenho das tarefas geométricas (por exemplo: semelhança, mensuração) merece mais investigações.

* As situações problema em que a Geometria e a Álgebra estão combinadas são muito comuns nas unidades de ensino (por exemplo: Geometria analítica). Entretanto, nós dificilmente encontramos alguma pesquisa lidando com tais situações problema.

* Por último, mas não a última, está o feedback recíproco entre o ensino e a pesquisa. A direção do mundo real da sala de aula para a pesquisa parece estar muito ativo. Em geral, os pesquisadores tomam os conteúdos instrucionais comuns e tarefas como pontos de partida para suas pesquisas. Mas, apesar do fato de que as pesquisas psicológicas sobre a Geometria estarem orientadas para o ensino, com muitos trabalhos de pesquisa baseados ou resultando em sequências instrucionais, parece que o efeito real das pesquisas sobre a Geometria no currículo, nas estratégias de ensino e na formação dos professores ainda é esporádica e necessita de um esforço mais intensivo e compreensivo.

FUNDAMENTOS E CONCEPÇÃO DO PROJETO AGAM

O trabalho apresentado neste relatório está baseado numa colaboração incomum entre um artista visual e uma instituição devotada à pesquisa científica e à educação. Esta colaboração está centrada num programa e num projeto.

A. O Programa Agam

Durante várias décadas, por sua própria conta e vontade, Yaacov Agam tem estado preocupado com a falta de alfabetização visual da população em geral (Agam, 1984). Como uma expressão de sua preocupação e com a assistência de uma equipe de educadores e psicólogos, Agam criou um currículo em língua francesa para desenvolver a alfabetização visual entre crianças da pré-escola (crianças de 3 a 6 anos de idade).

Existem várias hipóteses subjacentes neste programa. Primeiro, que existe de fato uma linguagem visual, composta de elementos básicos e de suas interrelações. Além disso, como a linguagem verbal, a linguagem visual está baseada num sistema simbólico e ela pode ser aplicada criativamente ao pensamento e na resolução de problemas em muitas áreas. Por esta razão, o ensino da linguagem visual deveria ser encarado como "um ensino básico [e fundamental]" e deveria começar bem cedo, dentro do sistema formal de ensino escolar.

O próprio programa é sistemático, progredindo numa progressão lógica de um conceito para o seguinte, enquanto incorpora habilidades específicas com cada conceito. Pedagogicamente, o programa enfatiza uma abordagem de atividades orientadas, com muitos materiais manipulativos, representações múltiplas do mesmo conceito, e trabalho em pequenos grupos.

Uma pequena parte do programa foi implementado por um curto período de tempo, primeiro na França e mais tarde na Venezuela. Embora o programa contasse com o entusiasmo dos alunos e professores da pré-escola, sua implementação nestes países não foi sustentada.

B. O Projeto Agam

Na primavera de 1983, o Sr. Agam visitou o Weizmann Institute of Science, uma instituição devotada a pesquisa básica em Matemática e Ciências naturais. Ele apresentou o programa ao staff diretor do Departamento de Ensino de Ciências do Instituto, especializado no desenvolvimento, implementação, pesquisa e avaliação do currículo de ciências dentro do sistema escolar de Israel. O Departamento se concentra na pesquisa curricular e desenvolvimento de áreas de Física, Matemática, Química e Geologia para alunos da escola primária e secundária. O Programa Agam lida com uma área temática diferente e com crianças mais jovens. Apesar destas diferenças, devido ao interesse do staff na fundamentação e estrutura do programa, o Projeto Agam foi iniciado.

Os objetivos do Projeto Agam são de (1) adaptar o currículo do Programa Agam para as pré-escolas de Israel; (2) implementar o programa em pré-escolas em Israel; (3) avaliar a implementação do programa e (4) conduzir pesquisas educacionais e cognitivas relevantes, e (5) desenvolver possíveis extensões ao programa.

O primeiro ciclo de desenvolvimento e pesquisa foi conduzido durante 1983-1985. Este ciclo concentrou-se em 4 pares de turmas de pré-escola; cada turma pré-escolar experimental foi emparelhada com uma turma similar de comparação. Com base nos resultados muito promissores (Eylon et al., 1986), um segundo ciclo de desenvolvimento e pesquisas foi conduzido durante 1985-1987, desta vez com 25 pares de turmas da pré-escola. Este relatório resume este segundo ciclo de trabalho.

Desde seu início, os objetivos do Projeto Agam incluíam o desenvolvimento, a implementação e a avaliação de um programa educacional específico para crianças da pré-escola: o Programa Agam. Ao mesmo tempo, o staff do Projeto Agam foi tomado pelo interesse especial de desenvolver uma compreensão sobre as "questões mais amplas" envolvidas no programa. Em outras palavras, como as áreas de cognição visual e de treinamento visual estavam relativamente subdesenvolvidas, um objetivo importante do Projeto Agam tem sido explorar os fundamentos teóricos e pedagógicos destas áreas.

Então, o Projeto Agam pode ser caracterizado como um esforço de reunir ao mesmo tempo teoria, pesquisa e prática no desenvolvimento da cognição visual. Esta interface entre o desenvolvimento curricular e a pesquisa educacional pode ser caracterizada como "pesquisa em contexto" (veja Eylon e Linn, 1989).

O staff do Projeto Agam inclui educadores matemáticos e de Ciências, psicólogos cognitivos e educadores pré-escolares, como também funcionários técnicos e administrativos.

C. Visão Geral do Relatório

O relatório relativo ao trabalho desenvolvido durante o ciclo de desenvolvimento e pesquisa no período de 1985-1987 está dividido em três partes.

Na parte 1, nós começamos com uma revisão sobre a significância da cognição visual, apresentando uma breve história sobre as pesquisas de inteligência humana, a natureza da cognição visual e o treinamento da cognição visual. Nos capítulos 2 e 3, nós descrevemos o Programa Agam em vários níveis diferentes e discutimos sua implementação nas pré-escolas de Israel; incluindo aqui um tratamento sobre a essência do programa de treinamento de professores.

Na parte 2, nós descrevemos nossa metodologia de pesquisa, que integra um trabalho tanto qualitativo quanto quantitativo. Do capítulo 5 ao 9, apresentamos nossas descobertas da pesquisa em termos de habilidades e conceitos visuais básicos, efeitos de transferência cognitiva, percepção das crianças, percepção dos professores e efeitos sobre crianças especiais.

Na parte 3, nós discutiremos estes resultados dentro do contexto de pesquisa e prática educacional. Baseado nestes resultados, nós concluímos o relatório com recomendações específicas para o futuro.

Neste artigo, devido a limitações de tempo e espaço, apresentaremos apenas a primeira parte do relatório que diz respeito a fundamentação teórica do Programa e Projeto Agam. Os interessados na leitura integral do relatório devem solicitá-lo a Secretaria da Pós-Graduação em Educação Matemática - USU.

"A Filosofia está escrita neste grande livro - ou seja, o Universo - que permanece continuamente aberto a nossa contemplação, mas ele não pode ser compreendido a menos que primeiro compreendamos a linguagem e aprendamos a interpretar os caracteres em que ele está escrito. Ele está escrito na linguagem da Matemática, e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é humanamente impossível compreender uma única palavra deste livro; sem isto, nós estaríamos perambulando perdidos num labirinto escuro."
(Galileu Galilei, *Il Saggiatore*, 1623).

"Meu método de linguagem visual (tem) o objetivo de introduzir no sistema escolar uma educação visual, paralela e integrada com a educação verbal. Desta forma, nós seremos capazes de equilibrar e de desenvolver tanto as nossas capacidades verbais quanto visuais."
(Yaacov Agam, 1981).

Parte I

I. A Significância da Cognição Visual

Quando eu era um menino crescendo na longínqua Rockaway, eu tinha um amigo chamado Bernie Walker. Nós dois tínhamos "laboratórios de ciências" em casa, e iríamos fazer vários "experimentos". Um dia, estávamos discutindo sobre alguma coisa - devíamos estar com onze ou doze anos na época - e eu disse, "O pensamento não passa de uma conversa interior consigo mesmo". "Ah, é mesmo?!", disse Bernie. "Você conhece a forma maluca do cambota [eixo da manivela] de um carro?" "Sim, o que tem ela?" "Bom. Então me diga: como você a descreve quando você está conversando consigo mesmo?" Foi então que Bernie me mostrou que os pensamentos podem ser tanto visuais quanto verbais.

Richard P. Feynman (1988)
Físico ganhador do Prêmio Nobel

Antes de descrever o Programa Agam em detalhes, seria útil contextualizar este currículo dentro da perspectiva das discussões sobre cognição visual.

Esta discussão começará com uma exposição sobre a inteligência humana e com uma asserção bem documentada de que a cognição visual desempenha um importante papel na inteligência humana. Em seguida, a cognição visual será explorada brevemente em termos de seus dois aspectos complementares: reconhecimento visual e representação visual. Com este referencial, será possível explorar a significância da cognição visual em campos específicos e gerais. A discussão se encerra com um resumo dos principais pontos e com duas conclusões centrais.

A. Cognição Visual e Inteligência Humana

Através de nossos sentidos, nós recebemos diferentes tipos de informação, isto é, verbal, visual, acústica e cinestética. Os pesquisadores no campo da inteligência humana tentam compreender a interação entre estas informações e as operações mentais de um indivíduo.

Um dos primeiros pesquisadores da inteligência humana que reconheceu a importância da inteligência espacial (como também sua independência das inteligências verbal e lógica) foi o pioneiro psicometricista L. L. Thurstone. Outros pesquisadores, tais como Truman Kelley e A. A. H. Koossy, deram continuidade ao seu trabalho pioneiro.

Recentemente, a importância da cognição visual para a inteligência humana tem sido reiluminada. Como Pinker (1984) afirma:

"Esta cognição visual, não menos do que a linguagem ou a lógica, pode ser um talento fundamental para a compreensão da inteligência humana."

Pinker se baseia no trabalho de pesquisadores como: Shepard e Cooper (1982), Jackendoff (1983) e Johnson-Laird (1983).

Para apreciarmos a interrelação entre a cognição visual e a inteligência humana, um passo inicial e óbvio seria questionar: em que constitui a inteligência humana? Vários pesquisadores têm tentado responder a esta questão e têm chegado a diferentes conclusões.

1. Uma Breve História das Pesquisas sobre Inteligência

Existe um amplo espectro das diferentes abordagens sobre o estudo da inteligência. Nos extremos estão duas idéias:

- (1) a inteligência é um conceito unitário, único;
- (2) as inteligências são múltiplas.

No início do século, os testes de Alfred Binet (Binet, 1911) foram elaborados como instrumentos empíricos para identificar as crianças parcialmente retardadas e com dificuldades de aprendizagem que necessitariam de um auxílio e tratamento especial. Apenas bem mais tarde, os

teóricos americanos da inteligência humana - tais como H. H. Goddard, L. M. Terman, E. L. Thorndike e R. M. Yerkes - promoveram uma nova visão de que os resultados dos testes de Q.I. serviriam para medir uma entidade unitária e inata - a inteligência (Gould, 1981). Isto tornou-se a base das abordagens "psicométricas." [E com isto a psicologia também ganharia um status quantitativo e mais científico - fato que atraiu muitos teóricos, profissionais e estudantes da área, é claro!]

Pouco tempo depois, um biólogo, Jean Piaget, analisou as respostas de crianças a estes testes e observou que existia uma correlação entre a idade das crianças e seus erros característicos. Esta descoberta motivou Piaget a desenvolver uma teoria única e poderosa sobre a cognição humana.

A teoria de Piaget está baseada na noção de que os indivíduos desenvolvem suas potencialidades mentais em estágios; estes estágios dependem da idade do indivíduo e do desenvolvimento de operações lógico-matemáticas específicas. Piaget criou um modelo de inteligência humana que está relacionado às categorias básicas de tempo, espaço e causalidade. A fundamentação filosófica desta abordagem está baseada em Kant, que argumentou que o pensamento racional baseia-se sobre operações lógicas.

Outra abordagem do estudo da inteligência humana é a psicologia de processamento de informação. Os adeptos desta abordagem concentram seus estudos sobre como as pessoas resolvem problemas específicos, em termos de entrada [percepção; identificação], processamento [análise] e saída [conclusões; ações] de informações. Em outras palavras, eles tentam analisar e compreender cada um dos vários passos executados por um solucionador de problemas, desde o momento em que as informações contextuais são recebidas até o momento em que a solução é estabelecida.

De acordo com Gardner (1983), estas três abordagens - o teste psicométrico do Q.I., a teoria de Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo e a psicologia do processamento de informação - concentram-se apenas sobre aspectos particulares da inteligência humana enquanto ignoram outros. Gardner propõe que existem muitos tipos diferentes de inteligência, cada uma baseada sobre um "sistema simbólico" único e cada uma diferente das restantes.

De acordo com seu ponto de vista, as outras teorias não são sensíveis o suficiente para levar em consideração a ampla variedade e variabilidade da inteligência dentro das culturas humanas. Estas teorias não se referem a biologia do cérebro nem explicam o fenômeno da criatividade humana. Gardner argumenta que a habilidade de usar diferentes sistemas simbólicos como instrumentos para expressão e comunicação é unicamente humana e não é partilhada pelo restante do reino animal. Baseado nisto, Gardner propõe uma teoria de inteligências múltiplas, cada qual fundamentada sobre um sistema simbólico diferente.

Gardner propõe sete tipos diferentes de inteligência humana: verbal, lógico-matemática, visual-espacial, musical, cinestética, interpessoal e intrapessoal. Cada sistema simbólico correspondente serve como uma "linguagem" distinta para o tipo de inteligência correspondente. Além disso, o

desenvolvimento de uma inteligência particular depende do desenvolvimento do sistema simbólico correspondente.

É útil manter em mente várias observações, em conexão com esta teoria de inteligências múltiplas. Primeiro, cada tipo de inteligência contém uma variedade de aspectos diferentes. Por exemplo, analisando a inteligência verbal, uma pessoa pode ser excelente na escrita em prosa, mas não na expressão oral. Segundo, as diferentes inteligências são distintas e não dependem uma da outra. Esta asserção é fundamentada pela observação comum: geralmente é fácil para uma pessoa desenhar enquanto ouve música (isto é, utilizando dois tipos diferentes de inteligência simultaneamente), mas é praticamente impossível que uma pessoa simultaneamente escute uma música enquanto tente cantar outra. Terceiro, é importante reconhecer que cada indivíduo possui um "perfil" de inteligências único, com algumas pessoas destacando-se em mais de um tipo de inteligência.

Esta breve discussão sobre as pesquisas em inteligência humana estaria incompleta sem a menção do papel essencial do estímulo ambiental. As pesquisas indicam claramente que sem um estímulo adequado, isto é, sem a interação vital entre o organismo e o ambiente, o desenvolvimento da inteligência estará frustrado. É especialmente importante que este estímulo ambiental ocorra desde os primeiros anos de vida da criança.

2. Cognição Visual: O Que É Isto?

Como mencionado anteriormente, alguns dos primeiros pesquisadores no estudo da inteligência humana identificaram a habilidade espacial como distinta das habilidades verbais e lógicas. Muitos psicométricos, usando instrumentos estatísticos baseados sobre a análise de fatores, tentaram "provocar/induzir" os componentes da habilidade espacial encontrados nos testes de inteligência. Seus numerosos esforços - durante mais de 50 anos - geraram uma variedade de termos e conceitos concorrentes (Guttman et al., 1990).

De acordo com Gardner (1982), a inteligência espacial inclui as seguintes capacidades:

- (1) perceber e reconhecer instâncias do mesmo elemento;
- (2) transformar e manipular estas percepções;
- (3) formar imagens mentais e transformá-las, e
- (4) produzir uma imagem gráfica da informação espacial.

Embora estas capacidades possam ser independentes entre si, Gardner sugere que elas operam como uma "família" e que a utilização de cada operação pode muito bem reforçar a utilização das outras. É interessante notar que as habilidades de criar e de transformar as imagens mentais não são dependentes dos estímulos visuais físicos; indivíduos cegos desde o nascimento também possuem estas habilidades (Por esta razão, Gardner fala de "inteligência espacial" em vez de "inteligência visual", embora o termo utilizado na presente discussão seja "cognição visual").

A definição de Pinker da cognição visual, que inclui a concepção de Gardner da inteligência espacial, é que ela consiste de dois componentes complementares:

(1) Reconhecimento Visual, que focaliza a representação da informação visual do indivíduo, e

(2) Representação Visual, que focaliza em como os processos de memória e de raciocínio atuam sobre os objetos visuais e as representações visuais na produção de imagens mentais.

Existe uma variedade de teorias que tentam explicar como as pessoas processam a informação visual, tanto em termos de reconhecimento visual quanto representação visual. Apresentaremos a seguir, um sumário destas teorias (para um tratamento mais detalhado, sugerimos a leitura do Apêndice 1 do relatório).

2.1. Reconhecimento Visual

Como um indivíduo absorve a informação visual? Embebida nesta questão está um mistério não resolvido: qual é a diferença, caso exista, entre percepção visual e cognição visual?

De acordo com uma escola de pensamento, a percepção precede e não inclui cognição. Por exemplo, na teoria de Marr e Nishihara (1978, 1982) existem processos visuais primários que estabelecem a base para o reconhecimento visual e a representação visual.

Por outro lado, uma visão contrária é apresentada por Arnheim (1969), que defende que a percepção visual é caracterizada por importantes processos cognitivos. Enquanto a posição de Arnheim reflete uma abordagem filosófica mais global, a pesquisa cognitiva de Uttal (1983) é semelhante em orientação. Em suas investigações de detecção de forma Uttal define os estágios de percepção como detecção, discriminação, reconhecimento de percepção. Como Arnheim, Uttal identifica a percepção visual incluindo a cognição visual.

2.2. Representação Visual

Como um indivíduo representa e manipula as imagens mentais? Novamente, as diferentes teorias que tratam desta questão representam duas escolas de pensamento diferentes: a proposicional e a imagista.

A abordagem proposicional argumenta que as imagens mentais são representadas pelas proposições lógicas e que a experiência de alguém "ver" imagens mentais detalhadas é secundária, isto é, um "epifenômeno". Por exemplo, Olson e Bialystock (1983) resumem suas pesquisas com a argumentação de que as "estruturas espaciais" não-imagistas e lógicas são "o acessório da mente; as leis e representações usadas na percepção e no pensamento sobre espaço. Elas são as estruturas do espaço interior". Estas

proposições são básicas tanto para o pensamento espacial quanto para o verbal.

A abordagem oposta é tomada pela escola imagista de pensamento, que argumenta que as imagens mentais são imagens visuais internalizadas. Por exemplo, Kosslyn (1980, 1981, 1984, 1988) desenvolveu e testou uma teoria da representação mental que está baseada em operações visuais específicas.

É interessante notar que cada uma destas posições aparentemente contrárias está baseada em trabalhos experimentais empíricos. Talvez estas abordagens não sejam mutuamente exclusivas. De qualquer modo, a tendência atual no campo da cognição visual, como um todo, é duplamente ramificado: (1) identificar os processos de cognição visual básicos que possam ser representados e estimulados pelo computador, e (2) estabelecer a conexão entre estes mesmos processos de cognição visual e os processos neurológicos específicos do cérebro.

B. Significância em Vários Campos

Não apenas a cognição visual é um aspecto importante da inteligência humana, como descrito anteriormente, mas ela também desempenha um papel significativo em vários campos dos empreendimentos humanos.

Falando em termos gerais, como na citação anterior de Pinker (1984), a cognição visual é, pelo menos, tão importante para a compreensão da inteligência humana quanto são as áreas da linguagem ou da lógica. Gardner (1982) propõe vários usos gerais deste tipo de inteligência: auto-orientação em vários locais, reconhecimento de objetos e cenários, trabalho com representação gráfica da realidade (por exemplo: mapas, diagramas, representações bi ou tridimensionais), estar sensível às dimensões artísticas (por exemplo: a tensão, o equilíbrio e a composição de uma pintura), estar sensível às similaridades entre diversos domínios (isto é, possuir uma habilidade metafórica) e uso de modelos ou imagens mentais em vários tipos de resolução de problemas.

Mais especificamente, algumas pesquisas têm tentado ligar a cognição visual com o sucesso em conteúdos de domínios específicos. Um dos primeiros projetos de pesquisa deste tipo foi conduzido por Smith (1964), que testou as habilidades espaciais de um grande número de crianças de escolas elementares britânicas. Baseado em suas descobertas, Smith estabeleceu as seguintes conclusões:

* As escolas colocam a ênfase central sobre o desenvolvimento das habilidades verbais e negligenciam o desenvolvimento das habilidades espaciais. Como um dos resultados, as escolas produzem crianças com habilidades verbais mais desenvolvidas do que crianças com habilidades visuais bem desenvolvidas.

* As pesquisas longitudinais mostram que o bom desempenho em testes de medida da habilidade espacial são excelentes indicadores

do futuro bom desempenho em Matemática, tanto entre meninos quanto meninas.

* Estes testes de habilidades espaciais são capazes de medir habilidades tais como a habilidade de pensar abstratamente e analiticamente; a habilidade de perceber relações espaciais entre duas e três dimensões; a habilidade de manipular objetos manualmente, dentre outras habilidades.

* Estas habilidades mencionadas acima são necessárias para o bom desempenho em áreas de Matemática superior, Engenharia, e vários campos da ciência e das profissões tecnológicas.

* Testes verbais não servem para testar as habilidades apropriadamente nestas áreas, um fato que geralmente é ignorado nas escolas.

Estas conclusões empiricamente baseadas estão em ressonância com os sentimentos mais intuitivos de muitos engenheiros e arquitetos. Por exemplo, em seu livro *Invention and Evolution: Design in Nature and Engineering*, French (1989) contrasta o pensamento verbal com o pensamento visual e conclui que não se pode "projetar" apenas com palavras:

"O *homo jabber* (*falante*) não é o final de um percurso evolutivo que olha superiormente para o humilde *homo faber* (*fazedor*): o engenheiro e o arquiteto."

Shepard (1978) explica a importância da representação visual na resolução de problemas, nas ciências e nas artes, apresentando uma variedade de exemplos da vida real. De acordo com estes exemplos, uma grande quantidade de eminentes cientistas construiu suas teorias com base em imagens mentais específicas (por exemplo: Einstein, Watson e Crick). A vantagem de pensar através de imagens mentais, de acordo com Shepard, é que podemos simultaneamente ver diferentes conexões e interrelações dinamicamente. Shepard e Cooper (1982) apontaram que a utilização de analogias visuais, baseadas em imagens mentais concretas, é bastante efetiva na explicação e na compreensão de conceitos abstratos na ciência e na matemática (por exemplo, os campos eletromagnéticos).

De acordo com uma ampla variedade de pesquisas educacionais, parece não haver dúvida de que a habilidade espacial está altamente correlacionada e/ou diretamente relacionada ao bom desempenho em matemática, engenharia e em ciências (Battista et al., 1982; Bishop, 1978, 1980; Clements, 1983; Linn e Peterson, 1986; Salomon, 1974; Stuart e Plunket, 1979). Entretanto, muitas controvérsias e questões em aberto permanecem relacionadas a natureza da habilidade espacial, seu desenvolvimento, seus sub-componentes e suas interrelações com o bom desempenho em tarefas específicas (Eisenberg e Dreyfus, 1989; Mitchelmore, 1980).

C. O Exercício da Cognição Visual

Considerada a importância educacional da cognição visual, permanece uma questão óbvia: A Cognição Visual é treinável?

De acordo com as pesquisas, a resposta é afirmativa. Mas é necessário apontar, entretanto, que a esmagadora maioria destes estudos concentram-se em crianças em fase escolar do segundo segmento da escola primária e da escola secundária - normalmente da 4a. série em diante (veja uma revisão destas pesquisas em Ben-Chaim et al., 1985). Em um dos pouquíssimos estudos realizados com crianças da pré-escola, Cox (1978) demonstrou que crianças de 5 anos de idade podem ser treinadas em habilidades de tomada de perspectiva; além disso, estas crianças demonstraram a habilidade de transferir esta habilidade para novos problemas, desde que próximos aos problemas iniciais.

Várias revisões que avaliam os programas da pré-escola concluem que as crianças da pré-escola normais podem ser treinadas em habilidades visuais (Grossman, 1970; Fowler, 1983; pág. 235-242). Entretanto, estes programas foram conduzidos principalmente dentro do referencial da arte educação. Outros programas que desenvolvem habilidades visuais podem ser encontrados no campo da educação especial, por exemplo, o programa de percepção visual de Frostig-Horne (Weiderholt & Hammill, 1971) e outros (Kephart, 1971); (Getman, Kane, Halgren & McKee, 1968). A prática comum, então, limita o ensino do pensamento visual na pré-escola às artes e à educação especial.

Esta negligência dos programas do desenvolvimento da cognição visual das crianças da pré-escola é ainda mais surpreendente, se considerarmos (1) a importância da cognição visual para inteligência, como discutido no início deste artigo, (2) o fato de que a representação visual desempenha um papel significativo no pensamento das jovens crianças (Kosslyn, 1980), e (3) o interesse corrente de desenvolvimento das habilidades do pensamento.

O ensino das habilidades de pensamento é reconhecido como altamente prioritário em educação (Glaser, 1984, 1985) e uma variedade de programas educacionais para escola elementar tem sido desenvolvida para ensinar várias habilidades cognitivas (Chance, 1986; Costa, 1985; Nickerson, Perkins & Smith, 1985; Segal, Chipman & Glaser, 1985). Exemplos destes programas são o Instrumental Enrichment Program (Feuerstein, Jensen, Hoffman & Rand, 1985); Philosophy for Children (Lipman, 1985); o Problem Solving and Comprehension Program (Whimbley & Lochhead, 1980); o CoRT Thinking Program (de Bono, 1976) e o Productive Thinking Program (Covington, 1985). Estes e outros programas cobrem vários aspectos importantes do pensamento. Entretanto, a ênfase está principalmente no pensamento verbal, conceitual e lógico. O Instrumental Enrichment Program é uma exceção pois inclui um desenvolvimento sistemático das habilidades do pensamento visual como parte de um programa mais amplo que inclui também habilidades verbais e

lógicas; entretanto, este programa é devotado a crianças com dificuldades, e não para crianças normais.

Resumindo, existem fortes evidências de que as habilidades visuais podem e devem ser ensinadas, mesmo na pré-escola, mas a prática educacional está muito reduzida, quase inexistente, neste sentido.

D. Conclusões

Os seguintes pontos podem ser considerados claros a partir das discussões anteriores:

(1) A cognição visual é um aspecto importante do pensamento humano e da inteligência humana. Se aceitarmos que a inteligência humana é um conceito unitário, a cognição visual é um aspecto essencial desta inteligência. Caso contrário, se aceitarmos a teoria das inteligências múltiplas (Gardner, 1982), a cognição visual é uma inteligência humana específica por si mesma.

(2) As pesquisas indicam claramente que a cognição visual possui significâncias bastante amplas. Esta significância tem sido documentada, tanto em domínios específicos como Matemática, Ciências, Engenharia, Arquitetura e Artes quanto em termos gerais.

(3) O desenvolvimento (ensino) da cognição visual tem sido tradicionalmente negligenciado, limitando-se aos campos da arte educação e da educação especial. As escolas enfatizam o desenvolvimento da cognição verbal, que está baseada num sistema simbólico verbal, ainda que a linguagem verbal se desenvolva "naturalmente". Os estímulos ambientais deste processo natural podem ser bastante benéficos. Da mesma forma, as escolas deveriam desenvolver a cognição visual que está baseada sobre um sistema simbólico visual e que também se desenvolve "naturalmente". Este último desenvolvimento deve ser orientado a todas as crianças; ele não deve ser encarado como um esforço de duplicação ou de substituição da educação especial ou da arte educação.

(4) O treinamento sistemático e bem inicial da cognição visual fornece vantagens especiais. As fundamentações desta hipótese provêm de pesquisas educacionais, embora ainda sejam necessários mais estudos nesta área.

É importante notar que as ciências cognitivas atualmente fornecem aos pesquisadores uma orientação e instrumentos para avaliação e para estudo da cognição visual. Como resultado, tanto as pesquisas básicas quanto as pesquisas aplicadas neste campo estão em fase de crescimento.

Duas conclusões são inevitáveis:

(1) Existe uma necessidade significativa de um programa educacional, elaborado sistematicamente para desenvolver a cognição visual em jovens crianças.

(2) Deve ser conduzida uma avaliação e uma pesquisa relacionada a tal programa educacional, de acordo com os avanços contemporâneos das ciências cognitivas.

Fundamentados nestas concepções, resultados de pesquisas e necessidades apontadas pelas mesmas, o Instituto Weizmann está desenvolvendo o Projeto Agam que inclui 36 unidades.

1. <i>Círculos</i>	10. <i>Horizontal, Vertical & Obliquo</i>	19. <i>Formas Típicas</i>	28. <i>Intuição Numérica</i>
2. <i>Quadrados</i>	11. <i>Triângulos</i>	20. <i>Proporções</i>	29. <i>Composição</i>
3. <i>Padrões</i>	12. <i>Círculos, Quadrados e Triângulos</i>	21. <i>Vermelho</i>	30. <i>Primeira Dimensão</i>
4. <i>Círculos e Quadrados</i>	13. <i>Variação de Forma</i>	22. <i>Amarelo</i>	31. <i>Segunda Dimensão</i>
5. <i>Identificação Instantânea</i>	14. <i>Simetria</i>	23. <i>Azul</i>	32. <i>Terceira Dimensão</i>
6. <i>Horizontalidade</i>	15. <i>Linhas Curvas</i>	24. <i>Cores Secundárias (Tintas)</i>	33. <i>Quarta Dimensão</i>
7. <i>Verticalidade</i>	16. <i>Grande, Médio & Pequeno</i>	25. <i>Branco, Preto & Cinza</i>	34. <i>Letras</i>
8. <i>Horizontal & Vertical</i>	17. <i>Ângulos</i>	26. <i>Trajetórias</i>	35. <i>Gramática Visual</i>
9. <i>Obliquidade</i>	18. <i>Pontos</i>	27. <i>Do Olho para a Mão</i>	36. <i>Criatividade</i>

Cada uma das 36 unidades que compõem o Programa Agam possuem as mesmas 5 categorias: de atividades: (1) atividades de Identificação; (2) atividades de Memória; (3) atividades de Reprodução; (4) atividades Reprodução Memorial; (5) atividades de Produção Criativa. Além destas categorias outras atividades envolvendo (a) Desenvolvimento de Precisão Visual e (b) Resolução de Problemas também estão em desenvolvimento.

As 36 unidades foram aplicadas e avaliadas, estando atualmente em fase de reelaboração ou de extensão. Os interessados na descrição da estrutura geral das unidades, bem como nos resultados das pesquisas envolvendo esta segunda fase do Projeto Agam poderão solicitar o relatório completo à Secretaria da Pós-Graduação em Educação Matemática - USU.

Visualização em Geometria - As Duas Faces da Moeda

Rina Hershkowitz
Weizmann Institute of Science
Rehovot, Israel

Existe um consenso entre os educadores matemáticos e pesquisadores que a visualização, ou habilidade espacial, é importante porque ela amplia uma visão intuitiva e global e a compreensão de muitas áreas da Matemática. (Usiskin, 1987).

Como a Geometria inclui muitos elementos visuais, muito tem sido escrito e realizado em teoria, pesquisa e áreas curriculares relativo a interrelação entre a visualização e a aprendizagem da Geometria. Por exemplo:

1. De acordo com a **teoria** de van Hiele, que está sendo largamente discutida atualmente, a visualização é o primeiro nível e um nível necessário na hierarquia do "pensamento geométrico" (Wirszup, 1976).
2. As **pesquisas** demonstram que existem interrelações entre a habilidade espacial e o desenvolvimento do pensamento geométrico (por exemplo: Bishop, 1983; De Guire, 1982).
3. Os educadores matemáticos que estão envolvidos no **desenvolvimento curricular** recomendam um curso intuitivo visual na Geometria antes ou em paralelo ao curso dedutivo (Del Grande, 1987; Fruedenthal, 1973; Schoenfeld, 1986; Usiskin, 1987).

Neste artigo, tentaremos mostrar que o papel da visualização, dentro do processo de desenvolvimento de conceitos geométricos, é extremamente complexo e atua em duas direções:

1. Por um lado, nós não podemos formar uma imagem de um conceito e de seus exemplos sem visualizar seus elementos.
2. Mas por outro lado, estes elementos visuais podem limitar e empobrecer a imagem conceitual (para imagem conceitual veja Vinner, 1983).

As discussões que se seguem e envolvem estas questões estão baseadas em dados experimentais. Uma investigação sobre o desenvolvimento e aquisição de conceitos geométricos básicos foi realizada em duas escolas em que o ensino da Geometria estava bem organizado e os professores estavam preparados. Em ambas as escolas, todos os alunos nas 5as., 6as., 7as. e 8as. séries participaram da pesquisa. Se os alunos devem aprender conceitos geométricos básicos, então é importante que os professores da escola primária se sintam confortáveis em relação aos mesmos, portanto nós também investigamos 142 professores primários em formação (estagiários - PRE) e 25 professores primários em serviço (ST).

Os conteúdos e as tarefas foram selecionados do silábário geométrico da escola primária, que inclui: identificação, desenho e raciocínio relacionados a conceitos básicos, seus atributos, seus exemplos e contra-exemplos e algumas interrelações entre estes elementos. As crianças terão visto estes conceitos ou de forma estruturada através das suas experiências escolares ou de forma não estruturada através de suas vivências ambientais, familiares e sociais. Portanto, as estratégias dos processos de ensino-aprendizagem, pelas quais as crianças estabeleceram os conceitos, somente pode ser descrita de forma vaga e imprecisa, baseada em nossa familiaridade com as situações de aprendizagem envolvendo adultos e crianças; nas maneiras comuns de ensino da Geometria da escola primária, e na análise dos textos dos livros didáticos. As principais características das estratégias de ensino nas situações de ensino não formais e também frequentemente no ensino da escola primária são: **incompletude** (apenas alguns dos elementos são apresentados), e o **desconhecimento ou inconsciência** do professor e até mesmo dos livros didáticos da existência de outros elementos.

É muito comum encontrar aprendizes que tenham sido introduzidos a conceitos apenas através de alguns poucos exemplos. A generalização dos atributos do conceito são apresentadas (quando são) pelo professor ou pelo texto didático. Mas geralmente, o aprendiz está envolvido de forma receptiva e passiva no processo de aprendizagem. De modo a nos aproximarmos mais dos processos de formação de conceitos, nós acrescentamos situações controladas inovadoras em nossas investigações.

Os Exemplos "Bitrian" e "Biquad"

Aqui a situação de aprendizagem inicia com a definição verbal de um "conceito". Nós inventamos as seguintes definições:

1. Um **bitrian** é uma figura geométrica consistindo de dois triângulos que possuem um vértice em comum. (Veja Hershkowitz, Bruckhelmer & Vinner, 1987).
2. Um **biquad** é uma figura geométrica consistindo de dois quadriláteros que possuem em comum um lado.

Solicitamos a metade de cada grupo (alunos e professores) que identificasse bitrians e biquads dentre um conjunto de figuras, e a outra metade que desenhasse dois bitrians e dois biquads. Cerca de 60%-70% dos alunos e 80%-90% dos professores identificaram os três exemplos mais "fáceis" de cada conceito, ou desenharam pelo menos um exemplo de cada conceito corretamente (veja Figura 1).

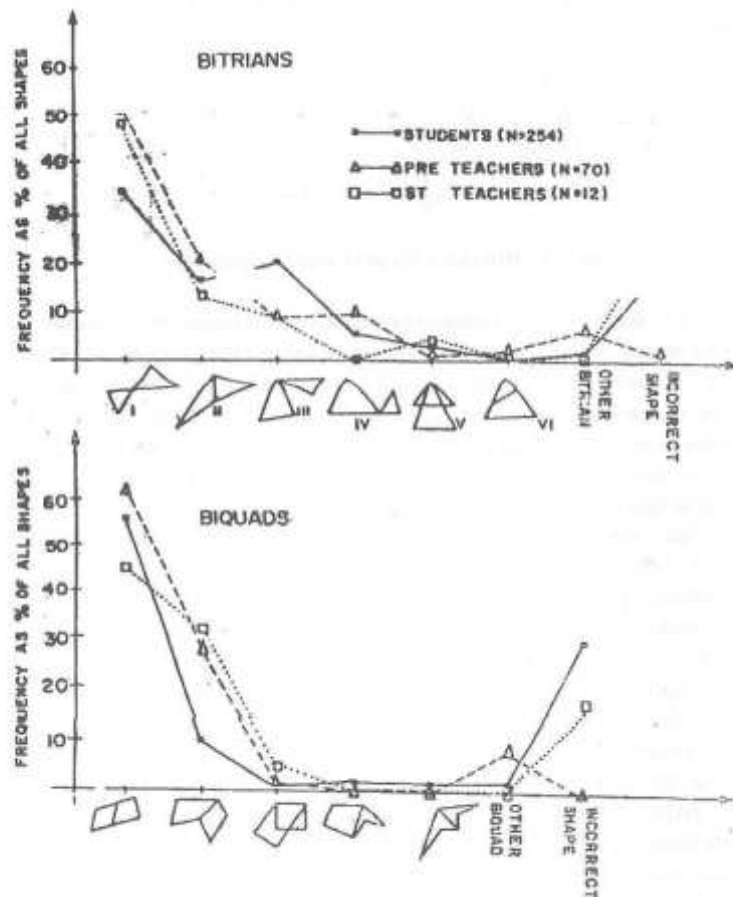


Figura 1, Frequências dos tipos de bitrians e de biquads desenhados pelos professores e pelos alunos.

Se analisarmos as frequências dos bitrians e dos biquads desenhados pelos alunos e pelos professores (PRE e ST), poderemos esboçar duas conclusões:

1. **O fenômeno do modelo protótipo.** Cada conceito possui um conjunto de atributos críticos (aspectos relevantes) e um conjunto de exemplos. Todos os exemplos do conceito são matematicamente equivalentes, no sentido de que eles satisfazem a definição do conceito e contém todos os seus atributos críticos, mas eles são diferentes uns dos outros visualmente e psicologicamente. Existem "super"-exemplos - protótipos - (Rosch & Mervis, 1975) que tendem a ser muito mais populares do que todos os outros. (O bitrian mais popular, tanto na tarefa de

identificação quanto na tarefa de desenho, está indicado na Figura 2a e o biquad mais popular está indicado na Figura 2b.)

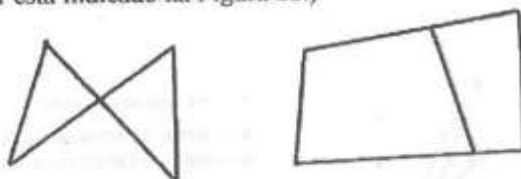


Figura 2. Bitrian e Biquad mais populares.

2. Os **padrões de comportamento** em relação aos exemplos do conceito na tarefa de desenho são muito similares entre alunos, professores estagiários e professores em serviço. Na tarefa de identificação, os professores de ambos os grupos tiveram desempenhos melhores do que os alunos, mas o padrão permaneceu similar. Encontramos um outro padrão similar para outras análises destas tarefas quando separamos a população entre as variáveis independentes de série, sexo e origem sócio-cultural.

Nesta situação de aprendizagem, o conceito foi apresentado verbalmente sem nenhum exemplo simples, e novamente os resultados demonstram que as crianças desenvolveram uma imagem conceitual correta, mas incompleta. Nós não podemos responsabilizar a incompletude de um livro didático ou o conhecimento limitado do professor pois os conceitos envolvidos aqui eram totalmente novos para todos. Mas estas descobertas são típicas de crianças sobre muitos conceitos geométricos básicos do silabário geométrico primário e até mesmo ginásial em muitos países. A seleção fixa de alguns exemplos de conceitos e a negligência de outros exemplos, parece ser um reflexo dos processos cognitivos que atuam de forma semelhante sobre diferentes indivíduos.

Em seguida, continuaremos a descrever, através de resultados de pesquisas, alguns elementos que desempenham um papel nestes processos.

A Quantidade de Atributos Críticos de um Conceito

A maioria dos conceitos básicos em Geometria são **conjuntivos**; por exemplo, um triângulo isósceles pode ser visto como a conjunção dos seguintes atributos críticos: (a) Um **triângulo** (b) que possui **dois lados** (c) que são **iguais**. Na realidade se esta é a estrutura conjuntiva ou não depende do aprendiz e do estágio de aprendizagem da Geometria. Num estágio inicial "um triângulo" é também uma conjunção, enquanto mais tarde ele já passa a ser considerado como uma entidade única (Miller, 1956). Não daremos prosseguimento a esta discussão, mas admitiremos que existe alguma arbitrariedade no estabelecimento do número de atributos críticos.

No exemplo do biquad, nós temos uma conjunção dos seguintes atributos críticos: (a) **dois quadriláteros**, (b) que possuem **um lado** (c) **em comum**. A Figura 3 mostra as respostas dos alunos de 5a. e 6a. série à tarefa de desenhar dois biquads.

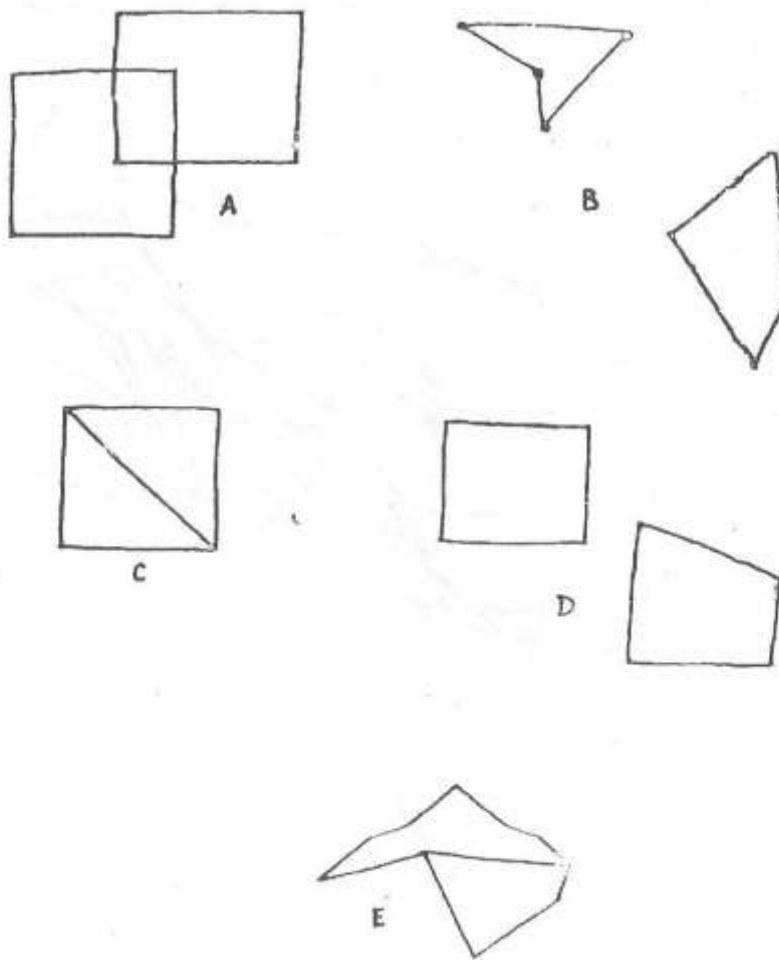


Figura 3. Respostas dos alunos de 5a. e 6a. séries a tarefa de desenhar dois biquads.

Os alunos B e D "deram atenção" apenas ao atributo (a); o aluno A desenhou dois quadriláteros que tinham alguma coisa em comum, mas não um lado; o aluno C desenhou o lado comum mas com triângulos e não com quadriláteros. Apenas o aluno E considerou os três atributos críticos de um biquad. Percebemos que os atributos críticos do biquad possuem alguma coisa em comum com a formação do conceito.

Outra análise que mostra o efeito da quantidade de atributos na formação do conceito está apresentada na Figura 4.

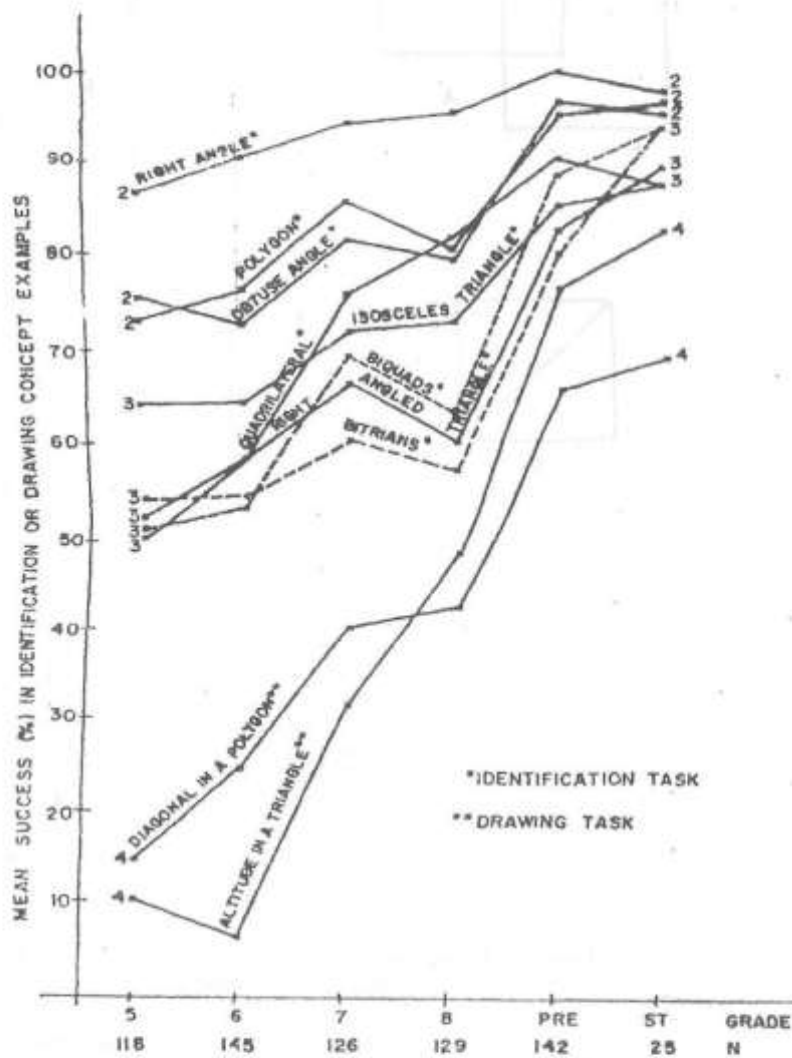


Figura 4. O desempenho médio na identificação ou no desenho dos exemplos do conceito. (A quantidade de atributos críticos de cada conceito é dada ao final de cada gráfico do desempenho médio nas tarefas).