INDICE

APRESENTAÇÃO

Este Boletim Especial do GEPEM pretende ser um instrumento de divulgação e de informação para educadores, professores, alunos de graduação e de pós-graduação em Matemática ou Educação Matemática das principais contribuições teóricas recentes ao Ensino da Geometria.

O Boletim foi elaborado tendo como base os principais artigos trabalhados e analisados durante o curso: **"Ensino e Aprendizagem da Geometria"** oferecido pela Pós-Graduação em Educação Matemática - USU e ministrado pela Dra. Rina Hershkowitz do Departamento de Ensino de Ciências do Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel com o qual a Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula mantém um convênio de cooperação técnico-científica.

O curso foi oferecido a professores, alunos da pós-graduação e alunos da graduação.

Os três principais temas subjacentes ao curso proposto eram:

- Geometria como a ciência do espaço.

- Geometria como estrutura matemática.

- Pensamento Geométrico como um componente essencial em muitas áreas.

O curso foi organizado numa combinação de oficinas e leituras, acompanhado de exercícios e leituras colaterais. Além disso manteve-se uma preocupação constante de estabelecer uma interface ativa entre teoria e prática.

Os tópicos abordados foram:

I Geometria e Pré-Escola

1. Percepção (formas, dimensões, orientações, codificação e decodificação).

2. Modelo de Van Hiele para o pensamento geométrico , descrição, aplicações, pesquisas baseadas na teoria de Van Hiele, conseqüências, limitações.

3. Exemplos de Desenvolvimentos Curriculares: O Programa Agam para pensamento visual.

II. Formação do Conceito Geométrico

1. Alguns fundamentos teóricos (por exemplo: Rosch e Mervis).

2. Estruturas epistemológicas dos conceitos geométricos.

3. Pensamento visual versus pensamento analítico no processo de desenvolvimento de conceitos geométricos.

4. Definição conceitual: - Um instrumento passivo ou ativo para a formação de conceitos em Geometria?

III. Processos Utilizados no Raciocínio em Geometria

1. Processos de generalização.

2. O que existe entre a justificativa intuitiva do aluno e a "prova formal"?

3. Implicações para o ensino da Geometria.

IV. O Papel do Microcomputador no Ensino e Aprendizagem da Geometria

1. Softwares no ensino da Geometria: quais e para quê?

2. A revolução do microcomputador no ensino-aprendizagem da Geometria.

V. O Futuro do Ensino da Geometria - algumas esperanças

VI. Geometria e as Outras Áreas da Educação Matemática

Como seria impossível cobrir todos os aspectos abordados durante o curso, selecionamos alguns artigos, de co-autoria da Dra. R. Hershkowitz, significativos para nosso objetivo de divulgar e informar sobre as pesquisas teóricas mais recentes e relevantes da área.

Selecionamos cinco artigos ao mesmo tempo representativos e diversificados do trabalho que foi desenvolvido durante o curso, com tradução de Prof. Paulo Colonese.

- Aspectos Psicológicos da aprendizagem da Geometria

Uma revisão sobre as principais pesquisas e suas fundamentações teóricas sobre o ensino-aprendizagem da Geometria.

- O Projeto Agam - Cultivando a Cognição Visual em Crianças da Pré-Escola.

Um programa desenvolvido para alunos da Pré-Escola especialmente dedicado ao desenvolvimento da cognição visual.

- Visualização em Geometria - As Duas Faces da Moeda

Uma experiência com formas não conhecidas por alunos e professores visando desenvolver um espírito crítico em relação a definições, atributos e conceitos novos.

- Atividades com Professores Baseadas em Pesquisas Cognitivas.

Um exemplo de pesquisa-ação sobre a formação de professores.

- O Software LOCI e Pensamento Visual.

Um software desenvolvido para explorar o conceito de lugar geométrico.

Maiores informações (ou consultas) sobre os trabalhos desenvolvidos durante o curso poderão ser obtidos através da Secretaria da Pós-Graduação em Educação Matemática-USU ou através da Secretaria do GEPEM.

ASPECTOS PSICOLÓGICOS DA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Rina Hershkowitz
com a colaboração de Ben-Chaim, Celia Hoyles, Glenda Lappan, Michael Mitchelmore & Shlomo Vinner

Introdução

Existem dois aspectos principais clássicos do ensino e aprendizagem da Geometria: a visão da Geometria como a ciência do espaço e a visão da Geometria como uma estrutura lógica, onde a Geometria é o ambiente no qual o aprendiz pode desenvolver suas impressões sobre a estrutura matemática (Freudenthal, 1973). Num estágio mais avançado, este *ambiente geométrico* adquire um significado mais amplo, sem a necessidade de um ambiente real (concreto) que o fundamente.

Há um consenso de que estes dois aspectos estão ligados porque alguns níveis da Geometria - enquanto ciência do espaço - são necessários para aprendizagem da Geometria - enquanto estrutura lógica. Este ponto de vista - aquele que entende as diferentes fases da aprendizagem da Geometria como um processo de desenvolvimento - é intrínseco na maior parte do trabalho teórico de pesquisa e do ensino realizado sobre a Geometria, sendo o fio condutor que conecta as diferentes seções deste artigo.

As várias fases da aprendizagem da Geometria levantam diferentes tipos de questões psicológicas. Se encaramos a Geometria como a ciência do espaço em geral, as questões iniciais são bastante amplas, tais como:

* Como as crianças percebem sua vizinhança?
* Que tipos de códigos são utilizados no processamento das informações visuais?

As questões tornam-se mais específicas se nos detivermos somente em relação a visualização, por exemplo:

* Que tipos de habilidades visuais são necessárias para a aprendizagem da Geometria? Em particular, como as crianças criam uma documentação (registros) de sua vizinhança e como elas interpretam esta documentação; isto é, como as crianças descrevem (verbalmente ou visualmente) o mundo tridimensional e como elas interpretam tais descrições?

Algumas destas questões serão discutidas na seção sobre visualização.

Outro tipo de questão lida com os processos de construção de conceitos básicos (por exemplo, as principais figuras geométricas) e as interrelações entre os elementos de um mesmo conceito e entre diferentes conceitos. Tais questões serão discutidas na seção sobre conceitos e interrelações. Estudos dentro do domínio da Geometria enquanto uma estrutura lógica levantam questões sobre generalizações e processos de provas. Estas questões serão discutidas na seção sobre conjecturas e provas.

Nos últimos anos, foi desenvolvida uma considerável quantidade de pesquisas envolvendo a Geometria num ambiente de aprendizagem informatizado. Os fortes elementos visuais fornecidos pelo computador, o seu potencial interativo e o modo como os objetos visuais podem ser facilmente manipulados e vistos de diferentes perspectivas têm atraído muitos educadores matemáticos. A maior parte dos trabalhos apresentados no International Group for the Psychology os Mathematics Education (PME) sobre esta questão têm focalizado o ensino da Geometria e não o computador em si mesmo. Existe um interesse comum em usar a interação criança<->computador para criar situações de aprendizagem que facilitem e provoquem a aquisição de habilidades visuais, de conceitos geométricos específicos ou de processos mentais. Portanto, nós podemos antecipar questões e tendências de pesquisa conforme elas forem "refletidas" no espelho do ambiente informatizado. Esta reflexão levanta questões relevantes às questões apresentadas anteriormente, como também traz novos insights e abre novas áreas de investigação. A contribuição especial do computador será discutida em cada uma das seções seguintes.

De modo a contextualizar as pesquisas e as suas aplicações ao ensino apresentados neste artigo, começaremos com uma discussão sobre alguns fundamentos teóricos.

Sobre as Teorias e Suas Linhas de Pesquisas

Podemos distinguir duas abordagens principais na forma como as pesquisas cognitivas estão relacionadas às teorias. Na primeira, a teoria baseada numa abordagem *top-down*, o foco de interesse está na teoria que se supõe seja confirmada ou rejeitada. O conteúdo geométrico e as tarefas que são selecionadas nestas investigações *top-down* são escolhidas de modo a se ajustarem ao modelo teórico e não refletem necessariamente os conteúdos comuns e os processos envolvidos na aprendizagem da Geometria. A segunda abordagem, *bottom-up*, adota o conteúdo e a estrutura a serem aprendidos como ponto de partida de suas investigações; a compreensão e a explicação das dificuldades e processos do aluno são os objetivos principal destas pesquisas. De acordo com esta abordagem, a teoria não é a base para o projeto de pesquisa, mas é usada como um instrumento para explicar as situações e os resultados levantados pela pesquisa, quando a teoria está adequada (Balacheff, 1987b). As pesquisas podem ainda conduzir ao aperfeiçoamento das teorias ou mesmo a formulação parcial de novas teorias.

A distinção anterior entre estas duas abordagens é, em certo sentido, uma super-simplificação e podemos encontrar trabalhos de pesquisa que estejam entre as duas abordagens. Entretanto, a maior parte das pesquisas cognitivas correntes, incluindo as pesquisas sobre Geometria desenvolvidas pelo Grupo do PME, concentram-se na segunda abordagem, enquanto a primeira abordagem foi mais prevalente há alguns anos atrás. Desta forma, a discussão nas próximas seções deste artigo considera as teorias e as teorias parciais como instrumentos de pesquisa e de ensino. No restante desta seção, discutiremos algumas características de teorias relevantes, acompanhadas de exemplos de pesquisas baseadas nas mesmas.

Piaget

Em sua teoria da concepção do espaço da criança (Piaget&Inhelder, 1967) e da concepção da Geometria da criança (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960) Piaget descreve o desenvolvimento da representação espacial da criança. Este foi definido como a imagem mental do espaço real em que a criança está atuando, onde "a representação mental não é meramente uma consulta aos dados de um arquivo da memória. Ela é uma reconstrução ativa de um objeto no nível simbólico." (J.I. Martin, 1976a,p.28). Este processo não é puramente perceptivo. Nas palavras de Piaget:

> *A percepção é o conhecimento dos objetos resultante do contato direto com os mesmos. Ao contrário disto, a representação ou imaginação envolve a evocação dos objetos em sua ausência ou, quando ocorre paralela à percepção, em sua presença. Ela completa o conhecimento perceptivo pela referência a objetos não percebidos realmente. (Piaget & Inholder, 1967, p.17)*

Com certa simplificação, podemos dizer que Piaget, a seu modo, estava interessado nas transformações mentais do espaço real para a representação do espaço da criança, naqueles atributos dos objetos reais que são invariantes sobre estas transformações e como eles se modificam com a idade. De acordo com a Teoria de Piaget, as primeiras transformações da criança são aquelas que conservam os atributos topológicos dos objetos (por exemplo, interior e exterior de um conjunto, periferia (limites) de um conjunto, conectividade, fechamento e abertura de curvas). Apenas mais tarde, a criança é capaz de transferir para sua representação do espaço os atributos Euclidianos dos objetos (por exemplo, comprimento de linhas e tamanho de ângulos). Os resultados desta transformações Euclidianas são as conservações dos conceitos de comprimento, área, volume, etc. É apenas neste ponto que a criança, de acordo com Piaget, pode executar tarefas de mensuração e de níveis mais altos.

O volume de pesquisas baseadas nas pesquisas piagetianas tem sido bastante amplo e diversificado. Alguns estudos (Dodwell, 1959; Lowell, 1959) forneceram apoio a suas teorias, enquanto outros (J. L. Martin, 1976; Taloumis, 1975) forneceram evidências contraditórias as teorias piagetianas.

Van Hiele

Enquanto as teorias piagetianas relacionam fundamentalmente a Geometria com a ciência do espaço, as teorias de van Hiele combinam duas visões da Geometria, como ciência do espaço e como instrumento com o qual demonstrar uma estrutura matemática. A teoria distingue níveis seqüenciais do pensamento geométrico (Freudenthal, 1973; Hoffer, 1983; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958; Wirszup, 1976; e muitos outros). Além disso, a teoria de van Hiele sugere *fases de ensino* que auxiliem o desenvolvimento das crianças através destes níveis. Os níveis, numa descrição resumida, seriam (Hoffer, 1983; Usisnkin, 1982):

> **Primeiro Nível**: Reconhecimento ou Visualização: As crianças percebem os conceitos geométricos em termos de sua *aparência física*; as figuras são reconhecidas pela sua *forma*, como um todo, e não pelas suas propriedades.
>
> **Segundo Nível**: Análise: As crianças podem analisar as *propriedades* das figuras.
>
> **Terceiro Nível**: Ordem. As crianças podem ordenar logicamente figuras e relações, mas não podem operar dentro de um sistema matemático. Portanto, uma dedução simples pode ser acompanhada, mas uma prova completa não é compreendida.
>
> **Quarto Nível**: Dedução. As crianças compreendem o significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva. Portanto, as provas podem ser "reinventadas" pelas crianças ou ao menos, compreendidas.
>
> **Quinto Nível**: Rigor. As crianças podem trabalhar numa variedade de sistemas axiomáticos e são capazes de fazer deduções abstratas. Por exemplo, uma Geometria não-euclidiana pode ser compreendida.

Mais tarde, a teoria de van Hiele foi modificada e reduzida a três níveis (van Hiele, 1987): o primeiro, segundo e terceiro nível (que inclui, mais ou menos, os outros três níveis apresentados acima). Outras características da teoria de van Hiele são as seguintes:

* A Memorização não é considerada ao caracterizar qualquer um dos níveis.

* A criança avança de um nível para o nível seguinte, sem saltar nenhum dos níveis. (são seqüenciais).

* Os níveis são discretos e globais; isto é, a criança está no mesmo nível em diferentes contextos.

* As crianças que estejam num determinado nível não podem interagir ou compreender o ensino em níveis mais elevados.

* O desenvolvimento do pensamento do indivíduo de um nível para o nível seguinte é consequência do ensino e de experiências de aprendizagem e não depende muito da maturidade.

Está claro que a teoria de Van Hiele assume como meta final da aprendizagem da Geometria a construção da Geometria enquanto uma estrutura dedutiva, mas com a Geometria enquanto ciência de nosso ambiente sendo um pré-requisito necessário.

A teoria de van Hiele, especialmente o modelo dos níveis, tem atraído muitos educadores e pesquisadores matemáticos. A maioria das pesquisas baseadas na teoria de van Hiele tem sido realizadas nos Estados Unidos. (Para conhecer os trabalhos russos de mais de 20 anos atrás, consulte Wirszup, 1976). As hipóteses de que os níveis possam ser identificados, sejam discretos e formem uma hierarquia têm sido pesquisadas e os aspectos preditivos do modelo tem sido investigados. Além disso, têm sido feitas tentativas de usar o modelo como base para elaboração de currículos e livros didáticos.

A generalidade e a globalidade do modelo de van Hiele são ao mesmo tempo sua força e sua fraqueza. De modo a utilizá-lo em pesquisas e no ensino é necessário estabelecer instrumentos operacionais pelos quais se possa determinar o nível de desenvolvimento particular de um indivíduo. Portanto, na maioria das pesquisas e do ensino, foram feitos esforços para estabelecer estes instrumentos (por exemplo, Usisnkin, 1982; teste de Hoffer, 1981, tabelas).

Os resultados das pesquisas mostraram que, em geral, os níveis criam a hierarquia descrita e coincide com o comportamento das crianças, com poucas exceções:

* O lugar do quinto nível de van Hiele na hierarquia não está claro. (Usisnkin, 1982).

* O caráter discreto e a globalidade dos níveis são duvidosos, o que significa que uma criança pode atuar em diferentes níveis em diferentes contextos ou que pode até mesmo mudar de nível numa mesma tarefa. (Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez & Jaime, 1987; Mayberry, 1983).

As últimas descobertas levam a questionar um currículo baseado na diversidade (broad-based) *versus* um currículo baseado na especificidade (narrow-based); isto é, se devemos introduzir muitos conceitos geométricos às crianças e progredir com cada um deles em paralelo até chegarmos ao terceiro nível de van Hiele (a abordagem usual) ou introduzir uma coleção limitada de conceitos às crianças, por exemplo, quadriláteros, e progredir até o terceiro nível e só então introduzir conceitos mais amplos.

Esta questão tem sido discutida intensivamente nos encontros do Grupo de Geometria nas Conferências do PME (Hershkowitz & Vinner, 1987). Ela ainda necessita ser pesquisada e pode ter um importante papel no planejamento do ensino da Geometria.

Um uso típico das pesquisas de van-Hiele tem sido a determinação dos níveis de uma determinada população. Por exemplo, Mayberry (1983), Matos (1985) e Gutierrez & Jaime (1987) estudaram o desempenho de professores em formação da escola básica em suas respectivas cidades e descobriram que eles geralmente atuam no primeiro ou no segundo nível de van Hiele.

Um exemplo típico é fornecido pelo trabalho de De Villiers e Njisane (1987). Eles conduziram um estudo detalhado com alunos do curso secundário. Para tornar os níveis de van Hiele mais operacionais, eles desenvolveram seu próprio teste. Os itens variavam de simples questões (como indicar os ângulos alternos quando duas paralelas são cortadas ou listar as propriedades de uma determinada figura como um paralelogramo) até questões que requeriam a interpretação de definições formais e a construção de provas formais. Muitas questões lidavam com conteúdos encontrados normalmente no currículo secundário. De Villiers e Njisane distinguiram oito categorias de pensamento geométrico necessários a resolução das diversas questões:

1. Reconhecimento e representação de figuras típicas.
2. Reconhecimento visual de propriedades.
3. Uso e compreensão da terminologia.
4. Descrição verbal das propriedades de uma figura ou seu reconhecimento pela descrição verbal.
5. Dedução direta.
6. Deduções indiretas.
7. Classificações hierárquicas (relações de inclusão).
8. Leitura e interpretação de definições apresentadas.

Suas análises os levaram a estabelecer que: (a) as categorias 1 e 2 pertencem ao primeiro nível de van Hiele; (b) as categorias 3 e 4 pertencem ao segundo nível de van Hiele; e (c) as categorias 5 e 6 pertencem ao terceiro nível.

Eles levantaram dúvidas quanto à categoria 7. De acordo com a teoria de van Hiele, a classe de inclusão é uma relação entre conceitos e seus atributos e portanto estaria no terceiro nível. Mas de acordo com seus resultados, este era a categoria mais difícil. (O modelo reduzido de van Hiele resolve este problema). Como já era esperado, eles descobriram que a porcentagem de crianças respondendo corretamente num determinado nível aumenta com o nível da turma daquela série escolar (maturidade, experiência, ou ambos?) mas diminuía conforme o nível da série aumentava.

Outra utilização típica do modelo da van Hiele tem sido as pesquisas realizadas no ambiente de aprendizagem Logo. Os fundamentos deste tipo de pesquisas estão baseados em dois aspectos:

* A necessidade de cobrir a lacuna curricular entre o nível da Geometria da escola elementar e o nível necessário para a aprendizagem da Geometria no secundário; aqui as sequências instrucionais baseadas no modelo de van Hiele parecem se adequar bastante bem.

* O fato de que o Logo pode ser usado como um ambiente de aprendizagem geométrico de alto nível e, portanto, tem o potencial de ser a base em que esta ponte necessária pode ser construída.

A questão geral é se as experiências de aprendizagem com Logo podem acelerar o desenvolvimento da criança através dos níveis de van Hiele. Por exemplo, Scally (1986, 1987) usando uma abordagem clínica com entrevistas, pré-testes e pós-testes com grupos experimentais e de controle, investigou como o ambiente Logo pode fornecer experiências do segundo e terceiro níveis de van Hiele para alunos do primeiro ano secundário partindo no curso de Logo do primeiro e segundo níveis. Seu trabalho envolvia o desenvolvimento de uma definição operacional dos níveis de van Hiele para o conceito de ângulo, como base para as entrevistas dos alunos. Ela analisou o desenvolvimento dos alunos dentro de cada nível e entre os níveis e descobriu que os alunos com a experiência Logo desenvolveram-se mais do que o grupo de controle.

Ludwig e Kieren (1985) investigaram, além da questão acima, uma questão mais simétrica, isto é, as interrelações entre o conhecimento geométrico construído de acordo com o modelo de van Hiele e a utilização do Logo. Eles filmaram o comportamento dos alunos da sétima série enquanto aprendiam transformações geométricas usando o Logo. A análise das fitas de vídeo mostraram uma interrelação positiva: A experiência da utilização dos procedimentos Logo como instrumentos de pensamento para representar idéias geométricas parece facilitar o desenvolvimento de idéias geométricas do primeiro nível para o segundo nível de van Hiele.

A Visualização no Exemplo 3D <=> 2D

Visualização geralmente se refere à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual. Fischbein (1987) ao analisar a visualização, afirmou que "muito freqüentemente o conhecimento intuitivo é identificado com a representação visual. É uma afirmativa trivial que nós tendemos naturalmente a pensar em termos de imagens mentais e que aquilo que não conseguimos imaginar visualmente é difícil de perceber mentalmente." (pág. 103). Ele continua argumentando que

> a representação visual contribui para a organização da informação em representações sinópticas e desta forma, constitui um fator importante da globalização. Por outro lado, a concretude das imagens visuais é um fator essencial no estabelecimento do sentimento de auto-evidência e mediação. Uma imagem visual não apenas organiza os dados disponíveis em estruturas significativas mas ela também é um fator importante na orientação do desenvolvimento analítico de uma solução. (pág. 104).

Existe uma concordância geral de que a visualização é importante não apenas pelo seu próprio valor, mas também por que o tipo de processos mentais envolvidos são necessários em (e podem transferir-se para) outras áreas da matemática (veja Bishop, 1989). Esta concordância geral fundamenta a linha de pensamento expressa por Fischbein, sendo especialmente relevante, é claro, à Geometria, na qual os elementos visuais formam alguns dos "blocos de construção." Bishop (1983) fez uma distinção entre "a habilidade de processamento (HP)" e a "habilidade para interpretação de informação figurativa (HIFI)." Ele descreveu HP como envolvendo "a visualização e a translação das relações abstratas e informações não figurativas para termos visuais" (pág. 184). Se nós seguirmos a diferenciação de Bishop, nós podemos classificar rigorosamente as pesquisas sobre visualização em investigações do processamento visual do próprio domínio visual e em investigações do processamento visual dos domínios não visuais.

Neste artigo, nós estamos preocupados com a visualização em relação a aprendizagem da Geometria, que em certo sentido é um processamento visual do próprio domínio visual. Nesta seção, nós rediscutimos o papel da visualização nos processos de aquisição de conceitos e em processos geométricos de níveis mais elevados. Para uma revisão sobre a própria visualização e a relação entre a visualização e a educação matemática em geral, veja Bishop (1980, 1989).

Na tentativa de investigar como o espaço é percebido e interpretado pelos indivíduos, os pesquisadores utilizam uma ampla variedade de tarefas visuais e medidas, tais como a relação bivalente entre os objetos tridimensionais (3D) e suas representações bidimensionais (2D), dobraduras de papel e a descoberta de figuras planificáveis. Em particular, a transformação 3D <=> 2D (que é uma habilidade extremamente necessária à aprendizagem da Geometria e as suas aplicações) tem atraído muitos pesquisadores (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985; Bessot & Eberhard, 1986; Bishop, 1978, 1979; Burton, Cooper & Leder, 1986; Cooper & Sweller, 1989; Gaulin, 1985; Mitchelmore, 1980a, 1980b, 1983; Mukhopadhyay, 1987). Neste direcionamento, o desenho dos objetos 3D tem sido investigado extensivamente e sérias dificuldades têm sido apontadas. Por exemplo, Mitchelmore (1980a) definiu níveis de desenvolvimento para esta habilidade e os utilizou para classificar os desenhos espontâneos de objetos tridimensionais das crianças. A maioria dos sujeitos estavam em níveis bastante baixos. A pesquisa de Ben-Chaim, Lappan & Houang (1989) é outro exemplo típico deste tipo de trabalho. Eles investigaram a habilidade de adolescentes comunicarem informações visuais usando a Tarefa de Descrição de Construções que consiste na descrição de uma construção formada por 10 pequenos cubos acoplados. A tarefa dos alunos era descrever a construção para um amigo ausente. As produções dos alunos foram classificadas pelo modo de representação (verbal, misto e gráfico). Os resultados demonstraram que os alunos apresentavam grande dificuldades em comunicar satisfatoriamente uma informação visual. As várias tentativas de descrever as construções 3D exemplificam os problemas que as crianças possuem na representação de objetos tridimensionais. A Figura 1 mostra algumas das produções obtidas na pesquisa de Ben-Chaim et al. (1989). A figura 1a demonstra a descobertas de Mitchelmore (1983) de que as crianças apresentam dificuldades na representação de retas paralelas e perpendiculares. As figuras 1b e 1c exemplificam dificuldades que estão relacionadas a percepção de profundidade no desenho das vistas da construção. É interessante notar que as descrições dos alunos estavam aproximadamente igualmente distribuídas nos três modos de representação. Burton et al. (1986) descobriu numa tarefa semelhante que a maioria dos professores em formação produziram descrições verbais.

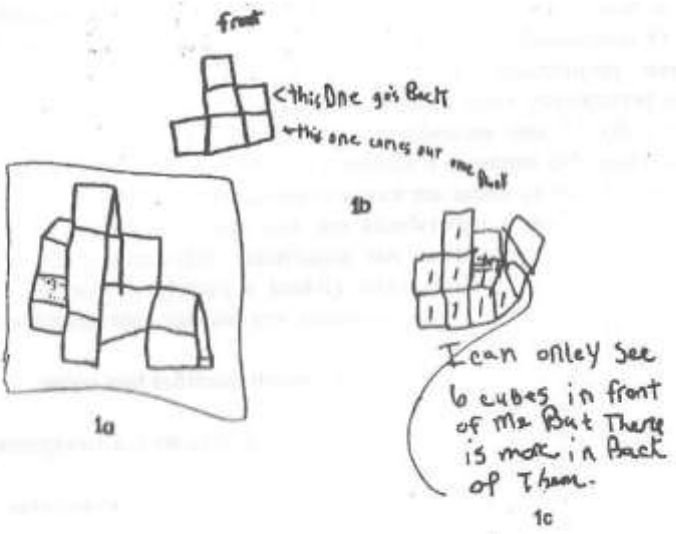

Figura 1. Desenhos de crianças de construções formadas por blocos (de Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989, pág.: 132, 137 & 138; reimpressão com permissão de KluwerAcademic Plubishers).

A direção contrária - isto é, a interpretação de desenhos de volta ao espaço tridimensional real - é muito importante na nossa sociedade moderna, na qual nós obtemos grande parte da informação de nosso ambiente tridimensional através de meios bidimensionais (jornais, revistas, fotos, vídeo, televisão, etc). Mas este direcionamento tem sido bem menos investigado. A principal linha de investigação neste sentido tem sido explicar como os alunos se movem dos desenhos bidimensionais aos desenhos quase-perspectivos - considerados serem internalizados de modo muito semelhante as visões das estruturas tridimensionais reais (Metzler & Shepard, 1974). Foi descoberto que esta translação também é muito difícil (veja por exemplo, Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1988). Burton et al. (1986) descobriu que na interpretação, os professores em formação preferiram descrições visuais das estruturas 3D às descrições verbais.

O computador veio introduzir uma dimensão *dinâmica* às pesquisas sobre visualização pois as representações das figuras 3D e 2D sobre o monitor podem ser manipuladas e transformadas de muitas maneiras. Além disso, o computador permite que o pesquisador examine micro-estágios do comportamento do aluno. Por exemplo, Osta (1987) usou dois programas comerciais: o MacSpace, no qual podem ser executadas operações sobre o objeto 3D representado sobre a tela e o MacPaint no qual podem ser executadas operações apenas sobre desenhos figurativos 2D. Ela criou sequências instrucionais de situações problema em que os alunos tinham que modificar as transformações 2D executadas sobre os designes figurativos para gerar as transformações 3D executadas sobre o objeto representado, e vice-versa. O computador apresentava algumas condições que forçavam o aluno a usar propriedades geométricas dos objetos e não apenas as informações perceptivas. Osta analisou as estratégias de solução de alunos da 8.ª série e do 1.º ano secundário e descobriu que elas tendiam a ser desenvolvimentais. No início, o trabalho dos alunos era local, lidando com pequenas partes da figura como um todo e resolvendo o problema apenas por meios perceptivos. Com a experiência em tais situações de resolução de problemas e conforme progrediam nas sequências instrucionais, os alunos começavam a considerar critérios mais globais e percebiam que os meios perceptivos eram ineficientes e que, portanto, era melhor usar propriedades geométricas dos objetos 3D.

Este tipo de pesquisas 3D <=> 2D levantou questões tais como:

* Quais são os fatores que influenciam a descrição e a interpretação dos desenhos de figuras 3D?
* Estas habilidades de visualização podem ser adquiridas ou melhoradas através de treinamentos explícitos?
* Caso afirmativo, o que deveria ser incluído no currículo, e como deveria ser ensinado?

Em relação a primeira questão, existem muitas evidências de que os fatores culturais, a experiência e a familiaridade com as convenções de transformação de figuras 3D em suas representações 2D e vice-versa possuem efeitos consideráveis no desenho e interpretação das figuras 3D. Os três fatores estão acoplados: as convenções podem ser consideradas como os elementos da "linguagem" formulados pela cultura para expressar e representar o espaço. Adquirir experiência é adquirir mais "efeitos" culturais. Mas diferentes pesquisadores relacionam estes fatores de forma diferente. Os estudos de Mukhopadhyay (1987) fornecem um exemplo de um efeito cultural e da experiência. Ela realizou uma experiência numa situação livre de nossas convenções usuais. Ela entrevistou crianças entre 8 e 12 anos, vivendo isoladas na Índia que não tinham tido quase nenhuma escolaridade e que não tinham sido expostas às convenções de representação comuns da cultura ocidental dos objetos sólidos que foram apresentados às crianças. Ela descobriu que sua habilidade de representação visual estava relacionada ao seu treinamento profissional no tipo de ocupação tradicional de seu grupo familiar em sua cultura. Desta forma, as crianças das famílias que trabalhavam com cerâmica e portanto, com sólidos ridimensionais,produziram representações de objetos 3D muito mais complexas do que as crianças das famílias de agricultores e das famílias de tecelãos. (vide Figura 2).

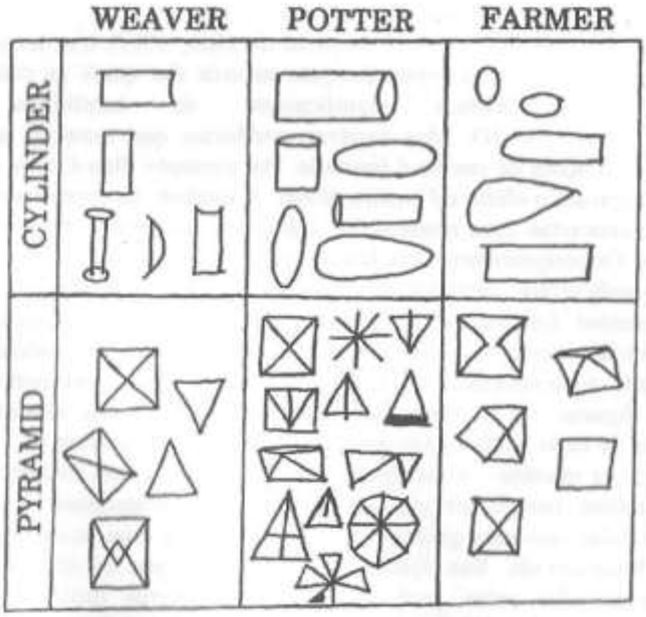

Figura 2. Representações de sólidos 3D por crianças de famílias com diferentes tradições profissionais (de Mukhopadhyay, 1987).

Existem muitos outros estudos inter-culturais que demonstram diferenças culturais (por exemplo, Bishop, 1978; Mitchelmore, 1980a). Mitchelmore argumenta que estas diferenças "refletem diferenças inter-culturais nas atitudes em relação ao uso de modelos espaciais no pensamento" (pág. 205) e que esta atitude é parcialmente revelada pelo "grau de ênfase geométrica no currículo escolar de matemática" (pág. 205). Não existe nenhuma outra conclusão envolvendo os efeitos da experiência (fora ou dentro da escola) e da familiaridade com as convenções. Geralmente, o efeito de ambos é considerado ser positivo, mas existem contra-exemplos. Por exemplo, Mitchelmore (1983) apresentou evidências de que os erros de desenho persistem mesmo quando as crianças estão muito familiarizadas com as convenções usuais. Burton et al. (1986) mostrou que, os mesmos tipos de dificuldades encontradas por Ben-Chaim et al. (1989) persistem nos adultos a despeito do aumento de sua experiência (embora desestruturada).

A pesquisa apresentada levanta ainda uma segunda questão: Em que medida uma intervenção direta do ensino pode melhorar a habilidade de transformação 3D<=>2D? Esta questão é importante (Gaulin, 1985) mas nem um pouco simples. Bishop (1989) cita Lean sobre o efeito de que estas "habilidades visuais (envolvidas nas HIFIs) são ensináveis desde que sejam fornecidas experiências apropriadas" (pág. 12).

Trabalhos de pesquisas (tais como os de Osta, 1987) têm fornecido exemplos de experiências de aprendizagem através das quais as crianças atingiram desenvolvimentos significativos da habilidade de transformação 3D <=> 2D. Mas existem evidências que mostram que o efeito das intervenções de ensino é limitado. Por exemplo, Ben-Chaim et al. (1988) investigaram o efeito do ensino direto. A unidade de ensino oferecia experiências concretas com construções cúbicas e suas representações em desenhos 2D. Os pesquisadores concluíram que "da quinta à oitava séries, os alunos se beneficiaram consideravelmente com o ensino, e que o ganho (desenvolvimento) foi similar para meninos e meninas, a despeito de diferenças iniciais destes dois grupos"(pág. 51). Mas apesar do módulo de ensino incluir representações e familiarização com as convenções do desenho de figuras 3D e interpretações, o desempenho dos alunos nos mesmos tipos de itens ainda estava apenas moderadamente correto.

A terceira questão - o que incluir no currículo e como isto deve ser ensinado também parece ser crucial. A seguir apresentaremos algumas tentativas de lidar com esta questão. Nos Países Baixos uma nova *Unidade Visual* foi desenvolvida. Sua fundamentação era de que as situações de ensino demonstradas pelos professores ou pelos livros didáticos (que estavam baseadas em habilidades de transformações 3D <=> 2D) geralmente são restritas a procedimentos de desenho estereotipados (nossas convenções usuais?) e que deviam ser ampliadas, incluindo uma compreensão mais crítica dos procedimentos de desenho e interpretação (Godijn & Kindt, 1985). O currículo proposto utiliza muitos tipos de técnicas: comparações entre próximo e distante no mundo real e pequeno e grande no desenho, pontos de fuga e horizonte, empacotamento de objetos, linhas ocultas, linhas de fuga, sombreamento&projeções, imaginar a si mesmo estando em algum lugar sugerido, vistas de frente, laterais, de cima, etc.

Outro projeto de estilo holístico, que vai bem além do exemplo 2D <=> 3D, é o Projeto Agam (Razel & Eylon, 1986). É um programa básico e bastante geral sobre educação visual para crianças de 3 a 7 anos de idade. Sua fundamentação é de que dentro do currículo regular da escola, não é feito nenhum esforço sistemático para desenvolver as habilidades visuais a despeito de sua importância. Este projeto objetiva preencher esta lacuna ensinando sistematicamente conceitos visuais básicos que podem ser usados como uma base para o desenvolvimento de uma linguagem visual. Um cuidadoso estudo, ainda em processo, acompanhando a implementação do Projeto Agam já mostra uma melhoria significativa tanto das habilidades visuais quanto do conhecimento geométrico.

A discussão anterior sobre visualização e o exemplo 3D <=> 2D estão relacionados aos aspectos positivos da visualização. A única crítica que entra em discussão envolve as convenções culturais. O valor de utilizar convenções como elementos de linguagem na comunicação de informação visual tem dois lados. De um lado, nós precisamos destes elementos "linguísticos" para nos comunicar e para o desenvolvimento do pensamento visual posterior. Portanto, sempre existem esforços de criar mais elementos linguísticos para representar o mundo físico e para o processamento da informação visual. A linguagem visual no Projeto Agam é um exemplo deste esforço; outro exemplo é a Notação de Movimento criada por Eshkol e Wachman (1973), que é a linguagem do movimento do corpo humano no mundo 3D. Por outro lado, em cada desenvolvimento linguístico existe alguma arbitrariedade. Os desenvolvimentistas (indivíduos ou culturas) escolhem (criam) os "blocos de construção" da "linguagem" mas esta escolha não é a única possível na construção de uma linguagem envolvendo uma certa habilidade. A utilização de um número limitado de elementos linguísticos fixos pode, desta forma, colocar algumas limitações no desenvolvimento desta habilidade. Um exemplo extremado da reação a este "sentimento de limitação" é o trabalho de artistas que romperam as fronteiras das convenções visuais aceitas em seu tempo ao longo dos anos.

Além das limitações visuais induzidas pelo uso de convenções resultantes da cultura, existem ainda limitações visuais induzidas pelas mentes individuais, tais como limitações perceptivas. Estas limitações serão discutidas nas próximas seções.

Conceitos Geométricos Básicos e Relações

Nós incluímos neste título os aspectos cognitivos dos processos de aprendizagem de conceitos geométricos básicos (por exemplo: ângulos, triângulos, quadriláteros), interrelações tais como inclusão de classes, conceitos de alto nível (como os exemplos de semelhança e simetria) e mensurações geométricas.

Conceitos Básicos

Tem havido uma considerável discussão nos encontros do PME sobre a distinção entre o *Conceito* - o conceito como decorre de sua definição matemática - e a *Imagem Conceitual* - o conceito como está refletido na mente individual; isto é, o resultado dos processos mentais de formação do conceito (Vinner, 1983). O objetivo das pesquisas é acompanhar o desenvolvimento da Imagem Conceitual na mente individual (ou em uma determinada população), onde o conceito fornece um sistema de referência contra o qual este desenvolvimento é comparado e examinado (confrontado). Para compreender melhor como os alunos constroem as imagens conceituais geométricas e os fatores que influenciam este desenvolvimento, é necessário uma análise dos conceitos e de sua estrutura matemática. Boa parte da estrutura dos conceitos básicos pode ser considerada como *conjunção*. Por exemplo, um triângulo isósceles pode ser visto como uma conjunção (E) dos seguintes atributos relevantes: (i) um triângulo (ii) ter dois lados (iii) que são iguais. (Um triângulo também já é uma conjunção, mas no estágio em que nós geralmente definimos triângulos isósceles, ele já é considerado uma entidade). As interrelações matemáticas entre os elementos de um conceito matemático podem ser descritas no esquema mostrado na figura 3.

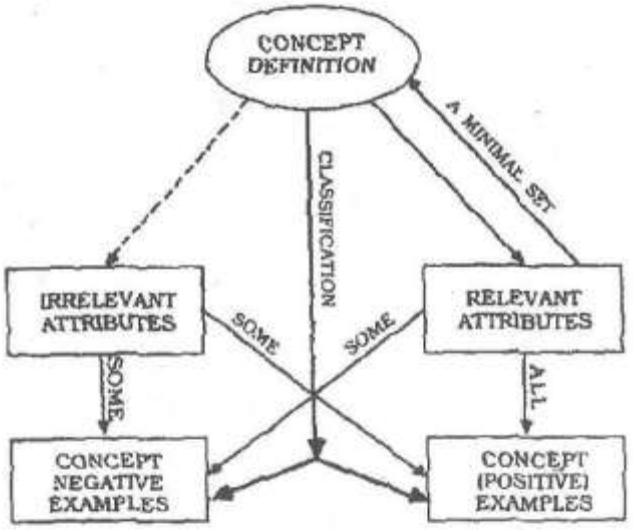

Figura 3. Interrelações entre os elementos conceituais.

O conceito é derivado de sua definição matemática e desta forma, possui atributos relevantes (críticos) - aqueles atributos que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo do conceito - e atributos não críticos - aqueles atributos que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. A própria definição verbal geralmente inclui um subconjunto mínimo dos atributos relevantes suficientes para definir o conceito. A definição portanto pode ser considerada como um critério para instâncias de classificação entre exemplos conceituais positivos ou negativos. Os exemplos negativos (os contra-exemplos) que são relevantes para o ensino e para as pesquisas sobre a formação do conceito são aqueles que possuem alguns, mas não todos os atributos relevantes. Outra característica estrutural pode ser chamada de "movimento de oposição à interrelação de inclusão" (Hershkowitz, 1987, pág. 240) entre os conjuntos de exemplos (conceitos por si mesmos) de um lado, e seus conjuntos de atributos, de outro. Por exemplo, o conjunto dos quadrados está incluído no conjunto dos paralelogramos, que está incluído no conjunto dos quadriláteros. Mas se analisarmos os conjuntos de atributos críticos de cada um dos conjuntos anteriores, nós obtemos uma interrelação de inclusão na direção oposta.

Além das características estruturais anteriores, que não são exclusivas aos conceitos geométricos, os exemplos, os contra-exemplos relevantes e os atributos dos conceitos básicos na Geometria são todos entidades visuais. Esta característica fornece um sabor de concretude, que lhes dá uma vantagem como tema para pesquisas psicológicas sobre formação de conceitos (veja a revisão sobre formação de conceitos matemáticos em geral feita por Sowder, 1980). Este tipo de pesquisa geralmente investiga uma cadeia (ou cadeias) na estrutura acima, que são comuns a formação de conceitos em geral.

Nossa preocupação aqui são os processos cognitivos que caracterizam a construção dos próprios conceitos geométricos básicos. Está claro que a despeito do fato de que eles possam ser facilmente definidos estruturalmente em termos de atributos, exemplos e contra-exemplos, e assim por diante, como fizemos acima, estes termos não são suficientes para descrever o desenvolvimento cognitivo das imagens conceituais da mente. Vamos descrever algumas características principais deste desenvolvimento que têm sido sugeridas através dos resultados de pesquisas.

O Fenômeno de Formação de Protótipos

Vinner e Hershkowitz (1983) e Hershkowitz, Vinner e Bruckheimer (1987) investigaram as imagens conceituais de conceitos geométricos básicos de crianças da 5a. à 8a. séries e de professores. Os conceitos e tarefas eram amostras retiradas do "silabário" da escola elementar. Os pesquisadores descobriram que cada conceito possui um (ou mais) *exemplo protótipo* que são forjados inicialmente e portanto existem na imagem conceitual da maioria dos sujeitos. Os exemplos-protótipos geralmente são o subconjunto de exemplos que possui "a maior listagem" de atributos - todos os atributos críticos do conceito e mais ainda aqueles atributos (não-críticos) específicos que possuem fortes características visuais: por exemplo, o triângulo-retângulo com ângulo reto em orientação vertical, os lados e ângulos iguais do quadrado como exemplo de um quadrilátero, a altura interna de um triângulo e as diagonais internas de um polígono. Estas descobertas estão de acordo com outros estudos (veja em particular, Rosch & Mervis, 1975, que investigaram intensivamente o fenômeno de formação dos modelos protótipos num contexto não geométrico). Além disso, Vinner e Hershkowitz descobriram que mesmo em conceitos instantaneamente formados, onde um conceito *inventado* era apresentado através de uma definição verbal sem apresentar nem mesmo um exemplo, os sujeitos (alunos e professores) produziam basicamente os mesmos exemplos protótipos.

O protótipo é a base para julgamentos "prototípicos". Para cada conceito, os indivíduos usam o exemplo protótipo como modelo em seu julgamento de outras instâncias. Fischbein (1987) chamou este tipo de julgamento de "a natureza paradigmática do julgamento intuitivo" (pág. 143). Os estudos de Wilson (1986) ilustram tais julgamentos paradigmáticos. Ela investigou "as interrelações entre as definições das crianças de retângulos e suas escolhas de exemplos" (pág. 158), solicitando que os sujeitos definissem o conceito, identificassem exemplos conceituais adicionais e reagissem a algumas afirmativas envolvendo o conceito. Ela descobriu que os alunos escreviam definições que eles não aplicavam quando escolhiam exemplos ou quando reagiam às afirmativas. A escolha de exemplos dos alunos estava baseada mais em seus próprios protótipos do que em suas próprias definições.

Existem 2 tipos de julgamentos prototípicos (Vinner & Hershkowitz, 1983):

> *Tipo 1.* O exemplo protótipo é usado como um sistema de referência e o *julgamento visual* é aplicado a outras instâncias (primeiro nível de van Hiele). Por exemplo, na construção da altura de um determinado triângulo, as crianças falham ao desenharem exemplos de alturas que contradizem sua imagem conceitual protótipa de uma altura *interna* e acabam desenhando alguns segmentos internos do triângulo que não correspondem à definição de altura.

> *Tipo 2.* O exemplo protótipo é usado como um sistema de referência, mas o sujeito baseia seus julgamentos nos *atributos próprios do protótipo* e tenta impor estes atributos a outros exemplos deste conceito. Quando isto não funciona, o sujeito simplesmente não aceita a figura como um exemplo do conceito. Por exemplo: "Todas as figuras, exceto o quadrado, não são quadriláteros porque elas podem ter lados iguais, mas elas não possuem ângulos iguais." Este tipo de resposta, em certo sentido, é analítica (segundo nível de van Hiele) mas representa um comportamento errôneo.

O fenômeno do protótipo e o julgamento prototípico parecem ser fundamentalmente um produto de processos visuais. Os atributos irrelevantes do protótipo geralmente possuem fortes características visuais (um forte apelo visual) e desta forma eles são atingidos primeiro e então, passam a atuar como perturbadores. Outro tipo de julgamento será discutido no próximo parágrafo.

Aspectos Analíticos. Existem evidências de que a formação dos conceitos geométricos é, pelo menos parcialmente, um resultado de aspectos lógico-analíticos. Alguns exemplos destas evidências são as seguintes:

> * *Julgamento Tipo 3.* Além dos dois tipos de julgamento prototípico mencionados acima, o julgamento analítico correto também é comum (Hershkowitz & Vinner, 1983). Este tipo de raciocínio está baseado nos atributos críticos do conceito. Por exemplo, a Figura 4 "não é um quadrilátero porque não é fechada, portanto não é um polígono, e todo quadrilátero é um polígono." A frequência deste tipo de raciocínio, que também demonstra uma

compreensão da estrutura de inclusão de classes, é bastante baixa na 5a. série mas cresce dramaticamente da 5a. para a 7a. série. Ao mesmo tempo, a frequência do julgamento visual (Tipo 1) é baixa mas não desaparece completamente mesmo entre professores, e a frequência do julgamento prototípico (Tipo 2) diminui e desaparece por completo entre os professores.

Figura 4. Figura para tarefa de julgamento: Quadrilátero ou Não, Eis a Questão!

* O número de atributos relevantes na estrutura conjuntiva (*e*) do conceito possui um efeito significante sobre o desempenho nas tarefas (Hershkowitz, 1989).

* As crianças, pelo menos da 5a. série em diante, podem construir imagens conceituais corretas e bastante ricas através de estratégias analíticas. Por exemplo, quando a definição do conceito é dada verbalmente e solicitamos que os sujeitos a utilizem para identificar ou construir exemplos do conceito, ou quando o novo conceito é formado através de uma seqüência de exemplos positivos e negativos do conceito na qual a aprendizagem por tentativas e erros é modificada através de um feedback imediato, conduzindo à testagem das conjecturas e portanto, à descoberta dos atributos críticos (Hershkowitz et al., 1987; Wilson, 1986).

Existe alguma evidência de que a construção da Imagem Conceitual seja uma mistura de processos visuais e analíticos. Por exemplo, o comportamento dos sujeitos mudam de um conceito para outro: alunos e professores que demonstraram um comportamento analítico (Tipo 3) numa tarefa sobre quadriláteros, falharam ao identificarem triângulos retângulos não-prototípicos.

Existem outras características da construção dos conceitos básicos, tais como:

Uma ordem hierárquica na elaboração dos exemplos conceituais (partindo de exemplos protótipos e continuando aos demais através de processos visuais ou processos analíticos ou ambos) comuns a toda a população e processados com a experiência.

Existem diferentes tipos de padrões de conceitos errôneos dentro de uma mesma população: (a) *conceitos errôneos que persistem* - que possuem o mesmo padrão de incidência geral de uma série para a série seguinte, ou ainda, entre alunos, professores em formação e professores em exercício (por exemplo: a falha na identificação de triângulos retângulos não protótipos); (b) *conceitos* *errôneos que diminuem* - com a construção do conceito conforme poderíamos esperar (por exemplo, a redução da frequência do Julgamento Tipo 2); e (c) *conceitos errôneos que aumentam* - com a construção do conceito, que são desenvolvidos com o processo de aprendizagem (por exemplo: a imagem conceitual da altura de um triângulo como um segmento interno).

Implicações para o Ensino

As crianças se apropriam dos conceitos geométricos básicos ou de uma maneira estruturada através das experiências de aprendizagem escolares ou de maneira não estruturada através de sua vizinhança, pais, jogos, etc. As principais características das estratégias de ensino nestas situações são: (a) falta de completude, na qual apenas parte dos exemplos e atributos são apresentados; (b) falta de consciência, como também ausência do conhecimento da existência de elementos adicionais (Hershkowitz et al., 1987) por parte do professor ou até mesmo dos livros didáticos (ou material didático); (c) falta de consciência das dificuldades do aluno e dos conceitos errôneos na construção destes conceitos; e (d) generalização dos atributos do conceito (definições) realizada (se tanto) pelo professor ou pelo material pedagógico, com o aluno sendo visto meramente como um simples receptor passivo.

Como nós podemos melhorar o ensino dos conceitos geométricos básicos? Desejamos, é claro, que os alunos desenvolvam habilidades analíticas e que baseiem seus julgamentos nos atributos críticos (definições) e que se conscientizem da incompletude e das concepções errôneas do raciocínio geométrico decorrentes do próprio pensamento visual. As estratégias analíticas que foram mencionadas acima podem ser estimuladoras na construção do pensamento analítico e não devemos subestimar as habilidades analíticas dos alunos. Estas estratégias, em que os atributos críticos e os exemplos positivos e negativos (os erros dos alunos podem ser usados para gerar exemplos negativos relevantes) são utilizados em diferentes e ricas formas, são também muito úteis na educação de professores em serviço (Hershkowitz et al. 1987). Mas não devemos utilizar estas estratégias muito cedo, porque as crianças nos estágios iniciais criam as suas Imagens Conceituais basicamente visualmente.

Como a formação de uma Imagem Conceitual visualmente limitada pode ser prevenida neste estágio visual? As respostas à esta questão cobrem uma variedade completa entre dois pontos de vista opostos. Um extremo, como nos estudos russos (por exemplo: Zykova, 1969), tende a por a responsabilidade na limitada experiência visual que nós oferecemos ao alunos com os materiais e métodos utilizados e considera que o enriquecimento da experiência visual irá prevenir totalmente estas limitações visuais. O outro extremo coloca a responsabilidade nas limitações de nossa percepção: isto é, os indivíduos imporiam suas limitações visuais sobre suas imagens conceituais, independentemente da riqueza dos exemplos com que eles trabalhassem e, desta forma, nós sempre teríamos imagens conceituais limitadas. Nós sugerimos que a resposta possa estar entre estes dois extremos. Entretanto, nós teríamos ainda que fornecer um ambiente de aprendizagem tão rico quanto possível e bem melhor do que os ambientes proporcionados atualmente.

O exemplo seguinte mostra a contribuição que uma interação dinâmica com o computador pode ter na superação do efeito orientador sobre a imagem conceitual. Shelton (1985) usou um programa de computador em que crianças de 2 a 6 anos de idade formavam sequências aleatórias de exemplos de triângulos isósceles ou triângulos retângulos de diferentes formas e em diferentes orientações. Após o módulo de ensino, a maioria das crianças estava livre dos protótipos comuns de posição dos triângulos e generalizaram a sua imagem conceitual de triângulos incluindo todas as formas e orientações possíveis. Portanto, um ambiente de aprendizagem rico e dinâmico pode superar limitações perceptivas. Softwares geométricos como o Cabri Géomètric (Baulac, Bellemain & Laborde, 1988), onde uma dada figura é continuamente redesenhada quando o aluno a movimenta ao redor de um de seus componentes tem um grande potencial para fornecer tais ambientes.

Outra questão interessante envolvendo aprendizagem e a interrelação entre o conceito e seus atributos foi levantada por Harris (1987). Ela ensinava crianças sobre figuras geométricas usando atributos da vida cotidiana. A ênfase, então, moveu-se dos atributos regulares para atributos mais "úteis" (por exemplo, o atributo mais útil dos retângulos na fabricação de caixas de papelão é que eles ladrilham o plano). Como esta progressão pode ser representada nos processos de formação de conceitos?

Logo e Conceitos Geométricos Básicos

Uma questão muito complexa é: Qual é o efeito da programação numa "linguagem geométrica" como o Logo sobre a formação de conceitos e vice-versa? Ao estudar esta questão, nós temos que considerar relações tais como procedimento<->figura, figura<->procedimento e subprocedimento<->subfigura (Hillel, 1986). As pesquisas têm indicado que o Logo pode ser usado como um meio de projetar ricos ambientes geométricos, onde as crianças possam atuar e então, com uma intervenção apropriada, vir a compreender uma variedade de idéias e processos envolvendo conceitos geométricos de uma maneira significativamente pessoal (Hoyles & Sutherland, 1989; Noss, 1987). As crianças precisam de oportunidades de se engajar em generalizações indutivas, torna-las explícitas numa codificação de programação e então aperfeiçoa-las. Entretanto, as pesquisas têm indicado que as crianças tem tido dificuldades com a interrelação figura<->procedimento; elas não necessariamente usam idéias geométricas quando trabalham com a Geometria da tartaruga (Hillel & Kieran, 1987; Leron, 1983a). Elas podem tornar-se confusas quanto ao giro da tartaruga e o ângulo sem uma intervenção pedagógica apropriada (Hoyles

& Sutherland, 1989; Rouchier, 1981), e freqüentemente usam mais pistas perceptivas do que analíticas (Kieran, Hillel & Erlwanger, 1986). Por exemplo, Hoyles e Noss (1987b) utilizaram um micromundo baseado no ambiente Logo sobre paralelogramos para investigar como os alunos chegavam a compreender "a essência do paralelogramo" através de modificações do formalismo de um dado programa. Eles identificaram diferenças entre as intuições iniciais dos alunos e suas definições formais e documentaram as maneiras como os alunos progressivamente se tornavam conscientes (e generalizavam) das interrelações embebidas dentro do procedimento paralelogramo usando o Logo. Eles também apontaram as interrelações complexas que existem entre o código simbólico (o procedimento) e a figura. Mesmo quando o comportamento do aluno demonstrava uma interrelação bem próxima, isto não se dava num nível consciente. Parece que a despeito do potencial assumido da programação numa linguagem geométrica no desenvolvimento de conceitos dinâmicos e generalizados, o aluno possui grandes dificuldades em modificar os elementos de programação e seus produtos visuais. Serão necessárias mais pesquisas antes que possamos estabelecer conclusões.

Conceitos de Alto Nível

Têm havido alguma pesquisa bastante intensiva sobre conceitos e relações geométricos de alto nível. Nós citaremos três exemplos.

1 - Simetria Axial

Grenier (1985, 1987) investigou as concepções dos alunos sobre simetria axial em escolas de ensino médio francesas. Ela identificou variáveis que afetam as imagens conceituais dos alunos (concepções) e seu desempenho em tarefas sobre simetria axial. Ela descobriu que a habilidade de construir a imagem de um ponto simples não capacita os alunos a construir a imagem de toda a figura. Os alunos utilizam diferentes procedimentos que fornecem respostas corretas apenas em casos especiais. As variáveis que afetam o desempenho nas tarefas são: a orientação do eixo de simetria; a posição relativa entre diferentes partes da figura e o eixo (fenômeno protótipo) e a idade das crianças.

2 - Medidas

Existe um ponto de vista comum sobre os estágios que a aprendizagem significativa da mensuração geométrica deve seguir:

A. Conservação da quantidade medida (comprimento, área, volume).
B. O significado da unidade de medida e da iteração de unidades (unidades arbi-trárias, unidades padronizadas, utilização correta dos instrumentos de medida); e
C. Desenvolvimento de fórmulas para cálculo da quantidade medida.

Figueras e Waldegg (1984) usaram o teste sobre medidas dos Conceitos de Matemática e Ciência Secundários para avaliar diagnosticamente os conceitos sobre medidas de alunos entre 11 e 13 anos. A intenção era utilizar esta avaliação como orientação para elaboração de atividades de mensuração. Eles descobriram que:

* A conservação da área é muito mais fácil do que a conservação de volume e até mesmo mais fácil que a conservação de comprimento.
* Mais da metade dos alunos usavam as unidades incorretamente.
* Os processos de mensuração (por exemplo: o uso de uma régua para medir comprimentos) como uma iteração de intervalos iguais era feita mecanicamente.
* A maioria das crianças encontrava as áreas e volumes contando as unidades a despeito de sua experiência anterior com fórmulas, mesmo quando a contagem era muito mais complicada (por exemplo: no caso de volumes onde as crianças tinham dificuldades na visualização das unidades que não estavam visíveis).
* O desempenho nas tarefas de mensuração caia drasticamente quando os números envolvidos eram frações.

Figueras e Waldegg desenvolveram e implementaram atividades de aprendizagem e descobriram que a maioria das dificuldades acima inibiam os processos de aprendizagem corretos. Eles argumentaram que "um sistema de medida fixo é introduzido muito cedo no currículo da escola elementar, criando, então, uma barreira para a compreensão completa do conceito de unidade" (pág. 99).

Maher e Beattys (1986) examinaram o desempenho em tarefas de resolução de problemas lidando com o conceito de área num estudo clínico de crianças entre 10 e 14 anos de idade. A meta das tarefas era orientar os estágios de conservação e de iteração da unidade (Estágios A e B, acima). Eles descobriram que os alunos "utilizaram a iteração da unidade quadrada como um esquema subjacente a descoberta da área de uma figura regular, mas não fizeram isto na medida de regiões irregulares" (pág. 168). A maioria das crianças não aplicava o conceito de área ao descrever o tamanho da região, e daquelas que o faziam, algumas expressavam suas respostas em unidades lineares.

Douady (1986) desenvolveu sequências de ensino para o ensino e aprendizagem do conceito de área e observou sua implementação em sala de aula. A conservação era expressa pela movimentação, corte em partes e reconstrução e pela utilização de uma malha quadriculada (duas superfícies sobre a malha que incluam a mesma quantidade de quadrados possuem a mesma área). Ela observou algumas estratégias semelhantes as acima (por exemplo: contagem de unidades e estratégias lineares). Nas entrevistas, ela observou e mesmo induziu conflitos de concepções. Estes conflitos resultaram em mudanças de estratégias.

Como podemos perceber, os estudos anteriores lidam principalmente com os Estágios A e B, descritos anteriormente. É senso comum que geralmente o ensino parte do meio do estágio B, com as unidades padrões de medida de figuras regulares e que isto pode ser a razão dos alunos parecerem não compreender o conceito de mensuração.

3 - Semelhança

O Projeto de Matemática para o Ensino Médio desenvolveu e implementou uma unidade sobre semelhança, acompanhado de uma pesquisa desenvolvida por Friedlander, Fitzgerald & Lappan, em 1984. O conceito de semelhança foi escolhido por que: (a) parece fornecer às crianças imagens mentais concretas sobre proporções e (b) é considerado uma das idéias mais básicas na compreensão da Geometria das medidas indiretas, do desenho em escala, dos modelos em escala e da natureza do crescimento. A unidade foi aplicada e seus efeitos foram investigados através de pré-testes, pós-testes e entrevistas antes e depois de cada etapa. "As entrevistas indicaram as estratégias individuais e os níveis cognitivos do pensamento sobre semelhança como resultantes do ensino. A descoberta mais impressionante foi a ausência de estratégias consistentes entre os indivíduos" (pág. 127). As categorias das estratégias que foram encontradas correspondem às classificações encontradas em outros estudos de raciocínios proporcionais e áreas; por exemplo, estratégias aditivas, estratégias baseadas na visualização e estratégias baseadas em contagens. A estratégia mudava dependendo dos números utilizados nas razões. Um micromundo informatizado sobre o mesmo tema foi recentemente elaborado por Hoyles, Sutherland e Evans (1989). As descobertas relatadas são similares às encontradas nos pré-testes de Friedlander et al., como descritas acima, mas nos pós-testes haviam evidências de uma apreciação da necessidade de estratégias consistentes; isto é, um reconhecimento de que estratégias idênticas são apropriadas dentro de uma determinada classe de problemas e ainda que a estratégia apropriada neste caso é a multiplicação. Esta diferença nos resultados das pesquisas pode ser interpretada como o resultado do feedback visual imediato frente às estratégias incorretas.

Níveis Superiores do Pensamento Geométrico - Conjecturas e Provas

Como em outras áreas da Matemática, os níveis superiores do pensamento geométrico se relacionam ao processo indutivo da elaboração de generalizações; isto é, a elaboração de conjecturas em todos os aspectos de justificativa (prova) das generalizações.

Na abordagem tradicional do ensino da Geometria, o processo de descoberta indutiva, formulado como conjecturas, está praticamente negligenciado. Esta negligência era um resultado do ensino clássico da Geometria Euclidiana como o exemplo típico (protótipo) de um sistema dedutivo - o que tem tido uma série de críticas (Balacheff, 1987b; Freudenthal, 1971; Schoenfeld, 1986). Nas palavras de Freudenthal, "A estrutura dedutiva da Geometria tradicional nunca chegou a ter um desempenho pedagógico convincente... Ela falhou porque sua dedutividade não pode ser reinventada pelo aprendiz, mas apenas imposta" (pág. 417-418).