

Diretoria do GEPEM

Presidente:
ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT

Vice-Presidente:
PAULO HENRIQUE COLONESE

Diretora Cultural:
JANETE BOLITE FRANT

Secretária Geral:
FRANCA COHEN GOTTLIEB

Tesoureiro:
LÚCIA MARIA AVERSA VILLELA

Conselho Editorial

ANGELA V. DUTRA DE S. CAMPOS
ANNA AVERBUCH
ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT
FRANCA COHEN GOTTLIEB
JANETE BOLITE FRANT
JOÃO BOSCO CARVALHO PITOMBEIRA
JOSÉ PAULO CARNEIRO
MARIA LAURA MOURINHO LITTELÓPES
MÔNICA RABELLO DE CASTRO
MOEMA L. MÁRIANIDESÁ CARVALHO
RENATO J. C. VALLADARES

Para receber o Boletim e/ou tornar-se sócio do GEPEM dirija-se ao GEPEM-USU, Rua Fernando Ferrari, 75 - Prédio VI - sala 208 - Botafogo - RJ ou ao MEM/USU - sala 1105

Tel.: (021) 551-5542 - ramal 264- ou 156

Edição e Organização

ESTELA K. FAINGUELERNT

FRANCA COHEN GOTTLIEB

JANETE BOLITE FRANT

Normas para apresentação de Trabalhos

O Boletim aceita artigos, comunicações, resenhas enviadas espontaneamente pelo autor, relatando experiências em sala de aula. Toda contribuição é importante.

O Conselho Editorial analisará a relevância dos trabalhos procurando abrir ao máximo o Boletim à comunidade.

Os trabalhos devem constar de 10 à 20 páginas datilografadas ou digitadas em espaço 1,5 em folha tamanho ofício. As figuras, desenhos ou gráficos serão escaneados.

Pede-se aos autores enviar três cópias de cada original ou um disquete contendo todo o artigo em Word.

Os textos assinados são de responsabilidade de seus autores.

BOLETIM GEPEM

ISSN - 0104-9739

33

APOIO CAPES / PADCT / SPEC

ÍNDICE

Apresentação	7
A Escrita como Veículo de Aprendizagem da Matemática.	
Estudo de um caso	
<i>Arthur B. Powell e José A. López</i>	9
Vamos rir um pouco	
Anônimo	42
Relato de uma Experiência com Alunos de Lógica Simbólica	
Dificuldade na Aceitação da Propriedade Transitiva	
<i>Franca Cohen Gottlieb</i>	43
Uma Metáfora para a Transdisciplinaridade	
<i>Eduardo Sebastiani Ferreira</i>	47
Intuição e Proporcionalidade	
<i>Renato J. C. Valladares</i>	50
A Prática de Ensino e a Formação do Professor de Matemática	
<i>Estela Kaufman Faiguelernt</i>	60
Educação Matemática: Do Discurso da Ordem à Ordem do Discurso	
<i>Roberto Ribeiro Baldino</i>	73

APRESENTAÇÃO

Estamos trazendo aos nossos sócios este Boletim nº 33 que se refere ao ano de 1995.

Temos a esperança de ainda neste ano de 1996 podermos trazer o Boletim nº 34 e assim nos colocar em dia com as datas relativas à publicação deste nosso meio de comunicação com os sócios do *GEPEM*.

Iniciamos com um artigo do Prof. Arthur Powell que nos traz uma experiência feita com alunos de Cálculo da Universidade de Rutgers em Newark e enfatiza a importância dos registros da experiência feitos pelos alunos e em especial os feitos por um aluno - José A. López - que participa da autoria do artigo. A tradução foi feita durante a licença sabática do Prof. Powell transcorrida no Departamento de Matemática do Instituto Superior Pedagógico (ISP) de Maputo, Moçambique. Além do interesse que provém do reconhecimento da relação existente entre a compreensão de um conceito e o registro em linguagem corrente das dúvidas e redescoberta do aprendiz, o artigo tem um atraente perfume lusitano em sua ortografia, sintaxe e construção de frases.

Da Prof^a Franca Cohen Gottlieb da diretoria do *GEPEM*, membro do grupo *MEM / USU - Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula* - e professora de Álgebra do curso de Licenciatura em Matemática da mesma Universidade, trazemos um relato da comunicação apresentada no V ENEM, Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em Aracaju em Julho de 1995 sobre o problema do ensino da propriedade transitiva em um curso de Lógica.

O professor Eduardo Sebastiani Ferreira, do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade de Campinas - IMECC/UNICAMP - nos fala sobre a necessidade de não construir em nossas salas de aula compartimentos-estaque e sim fazer com

que o conhecimento humano que é um mas multifacetado seja formado de aportes provindos de todas as direções, criando para alunos e professores um espaço de descoberta e construção.

O Prof. Renato J. C. Valladares, também do MEM/USU nos traz um interessante artigo sobre intuição e proporcionalidade que por ser de agradável leitura não deixa de ser profundo e instigante em suas conclusões, uma vez que a proporcionalidade é uma idéia matemática que perpassa todos os níveis de ensino.

A Prof^a Estela Kaufman Fainguelernt, Presidente do GEPEM e Diretora de Pós-Graduação da Universidade Santa Úrsula, assim como professora de Prática de Ensino do Curso de Licenciatura em Matemática da mesma Universidade, nos fala de suas reflexões sobre a formação do professor de Matemática desenvolvidas ao longo de sua experiência como professora não só universitária mas também dos 1º e 2º graus nos mais diversos tipos de escolas que se diferenciam pelo nível sócio-econômico de seus alunos mas não pela potencialidade dos mesmos.

Enfim o Prof. Roberto Ribeiro Baldino, do Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE - da Universidade do Estado de São Paulo - UNESP - e dos cursos de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática da mesma UNESP, no campus de Rio Claro - SP, fala do Discurso da Ordem e da Ordem do Discurso, em um artigo permeado de reflexões filosóficas e psico-analítica sobre o significado da Educação Matemática.

Edição e Organização

ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT

JANETE BOLITE FRANT

FRANCA COHEN GOTTLIEB

A ESCRITA COMO VEÍCULO DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: ESTUDO DE UM CASO*

*por Arthur B. Powell e José A. López,
Rutgers University, New Jersey, EUA
tradução por John Manuel Francisco e
Arthur B. Powell, Instituto Superior
Pedagógico, Maputo, Moçambique[†]*

*Esta tradução com uma bibliografia atualizada, foi produzida durante a licença sabática de Arthur B. Powell pela Rutgers University no Departamento de Matemática do Instituto Superior Pedagógico (ISP), Maputo em 1993.

[†]Originalmente, "Writing as a vehicle to learn mathematics: A case study," in P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), *Writing to learn mathematics and science* (pp. 157-177), New York

Há um perigoso mito segundo o qual aprende-se pela experiência...
o melhor que se pode dizer é que existe a possibilidade de se aprender
reflectindo-se sobre a experiência.

D. Pimm (1987, p. 60, ênfase original)

Aprende-se reflectindo-se sobre a experiência — eis uma correção sábia e incontravérsica do bem conhecido adágio. A afirmação é, no entanto, tão evidente que arrisca-se a estimular apenas um simples pensamento momentâneo em vez de transformações fundamentais e duradouras na nossa concepção do ensino e da aprendizagem. No modelo predominante do ensino da Matemática, apelidado por alguns de método do "giz e da fala", encontram-se poucas, se é que existem, situações em que se pede explicitamente que os estudantes reflitam sobre a matemática que estejam a "fazer", sobre o que pensam da Matemática ou mesmo sobre eles próprios em relação a disciplina. Pelo contrário, os resultados das reflexões de outras pessoas são narrados aos estudantes a quem se pede simplesmente

para memorizá-los. Este método e os seus pressupostos sobre o ensino e a aprendizagem foi denominado por Freire (1970, 1973) de “método bancário” e por Gattegno (1971) de método tradicional de ensino.

Nesse modelo, a ausência duma exigência explícita para uma reflexão sugere que a aprendizagem ocorre à medida que a pessoa passa por uma sucessão linear de experiências (vide a Fig. 1.).

EXPERIÊNCIA₁ ⇒ EXPERIÊNCIA₂ ⇒ EXPERIÊNCIA₃ ⇒ ...

Fig. 1 — Modelo predominante de Educação Matemática que pressupõe que aprendizagem ocorre simplesmente à medida que a pessoa é transportada duma experiência para outra.

Neste modelo, as “experiências” são situações didáticas nas quais se apresenta a Matemática duma forma pré-concebida, atomizada, e onde predominam as regras. Como consequência, a aprendizagem torna-se, em grande medida, uma atividade intelectual passiva na qual a necessidade de construção dum significado é minimizada. Além disso, e porque nesse modelo espera-se que Matemática produza respostas objetivas à perguntas quantitativas, os sentimentos estão fora de qualquer consideração.

Entretanto, a realidade objetiva do processo de aprendizagem sugere um modelo mais complexo e dinâmico e que tome em consideração as interligações entre a experiência e a reflexão. O modelo da Fig. 2 ilustra a ligação dialética existente entre a experiência e a reflexão e ainda entre estas e um outro tipo de reflexão — a reflexão crítica. Nos momentos didáticos deste modelo, as “experiências” são situações nas quais a pessoa se torna não só consciente do ambiente que o rodeia como também sente e atua sobre o mesmo. As reflexões sobre as experiências, por seu turno, são pensamentos sobre idéias, coisas ou objetos e sobre sentimentos. Estas reflexões são descritivas, comparativas, inferenciais, interpretativas e avaliativas. Tais reflexões envolvem também uma tomada de consciência

das respostas afetivas da pessoa às experiências. A reflexão, portanto, tem dois componentes: o pensamento e o sentimento. Estes componentes se relacionam no sentido em que o afeto influencia o pensamento e o pensamento, por sua vez, tem um impacto no afeto.¹

Além de serem componentes da reflexão, o pensamento e a afetividade são também aspectos da reflexão crítica. A reflexão crítica é uma reflexão isenta duma imediatez em relação às experiências particulares. A reflexão crítica constitui ou é um pensamento sobre pensamentos que envolvam planificação, monitoração, recapitulação e revisão. Enquanto a cognição é uma componente da reflexão, a metacognição é uma componente da reflexão crítica. A segunda componente da reflexão crítica é o que se poderia chamar “meta-afetividade”, pela qual se monitora as respostas afetivas às experiências. No modelo da Fig. 2, reconhece-se que a aprendizagem é um processo ativo em que a cognição e a afetividade se interrelacionam. Esta visão pressupõe a existência de educandos capazes de orientarem os seus recursos cognitivos e afetivos para a aprendizagem pela experiência.



Fig. 2 — Modelo de aprendizagem ilustrando a interação dinâmica e complexa entre a experiência, a reflexão e a reflexão crítica.

A escrita é um instrumento poderoso com o qual se reflete sobre a experiência e, tal como a Matemática, é um importante instrumento para o pensamento. Há mais de duas décadas, Brunner (1968) afirmou que tanto a escrita como a Matemática eram “dispositivos de ordenção de pensamentos sobre coisas e pensamentos sobre pensamentos” (p. 112). Esta concepção instrumental da escrita e da Matemática pode ser alargada

até incluir a ordenação tanto do pensamento sobre o afeto como do pensamento orientado para a monitoração do afeto. É, por isso, legítimo que existam técnicas pedagógicas nas quais estes instrumentos funcionem juntos para o incremento da aprendizagem.

Há alguns anos que educadores matemáticos têm explorado as conexões existentes entre a escrita e a Matemática, particularmente, a escrita como um suporte da aprendizagem da Matemática. As razões, os fins bem como os diferentes métodos de implementação da escrita no ensino têm sido variados. Nessa variedade distinguem-se duas categorias de abordagens a saber: a do produto e a do processo-produto. Nas abordagens da primeira categoria, a escrita é usada como meio de demonstração de conhecimentos enquanto que nas da segunda categoria a escrita aparece como meio de conhecimento. Ainda nas abordagens da primeira categoria, os educadores matemáticos envolvem os educandos em atividades escritas para fins que incidem mais sobre a Matemática do que sobre os próprios educandos. A questão central é o que os educandos sabem no momento e não a evolução da sua compreensão dos conceitos matemáticos. O recíproco dessa afirmação é entretanto verdadeiro para as abordagens da segunda categoria — do processo-produto — onde a escrita é usada primeiro para focalizar os educandos e só depois, e por estes, como meio de reflexão sobre a Matemática. Resulta então que as atividades escritas, nas abordagens desta categoria, tendam a consistir de duas fases ou estágios de redação. Estes estágios proporcionam aos educandos oportunidades para concordarem sobre significados e para gerarem conhecimentos.

Abordagens diferentes requerem, conseqüentemente, que as produções escritas dos estudantes tenham diferentes funções. Essas funções variam entre a função expressiva e a função transacional¹ — duas das três funções da escrita formuladas por Britton et al. (1975). A escrita transacional é principalmente o tipo de escrita que se espera que os

estudantes produzam nas abordagens da categoria do produto. Nestas abordagens, as atividades escritas são usadas para a avaliação e para o diagnóstico; nelas, os estudantes completam frases ou escrevem respostas curtas, quase perfeitas, a questões ou tópicos fornecidos pelo professor; também se pede aos estudantes que registrem todos os passos de procedimentos aritméticos (Azzolino & Roth, 1987; Geeslin, 1977; Goldberg, 1983; Jonhson, 1983; Nahrgang & Petersen, 1986; 1986; Pallmann, 1982; Watson, 1980) Porque estas atividades destinam-se principalmente a avaliação pede-se aos estudantes que produzam trabalhos escritos impessoais ou transacionais e não expressivos (vide também King, 1982)⁵.

Mais pedagogicamente interessantes são as abordagens em que a escrita reflete um pensamento independentemente dos estudantes. As abordagens do processo-produto esforçam-se por consegui-lo e conseqüentemente a reflexão e a reflexão crítica são os focos pedagógicos das suas atividades escritas. Tais atividades tendem a requerer uma escrita exploratória e especulativa pela qual os estudantes exteriorizam algum conteúdo das suas mentes. A escrita é aqui usada principalmente como meio de aprendizagem da Matemática e de conhecimento da própria pessoa que escreve e não somente para medir a quantidade de informação adquirida.

Embora não necessariamente expressos segundo o modelo teórico de Britton et al., as atividades escritas do processo-produto transportam os estudantes ao longo dum contínuo expressivo-transacional. Isto é, as atividades da escrita expressiva proporcionam pontos de partida da aprendizagem pois, de acordo com Britton e outros, são "um tipo de matriz da qual se desenvolvem formas diferenciadas de escrita madura [poética e transacional]" (1975, p. 83). Nas abordagens do processo-produto, as atividades escritas expressivas proporcionam muitas vezes pontos de partida para a escrita transacional. Os estudantes escrevem para articular combinações de suas crenças

to keep record of him

sobre a natureza do conhecimento matemático com as respostas afetivas a questões matemáticas, escrevem também para construir e negociarem significados, para refletirem e monitorarem a sua aprendizagem e afetividade (Buerk, 1982; Countryman, 1992; Frankenstein, 1983; Hoffman & Powell, 1989; Powell, 1986, 1993; Powell & Ramnauth, 1992a, 1992b). A partir destes pontos de partida e através dum processo que inclui o "feedback" e a revisão, os estudantes desenvolvem uma escrita sobre Matemática cuja função é transacional (Burton, 1985; Gopen & Smith, 1988; Kenyon, 1987; Mett, 1987; Stempien & Borasi, 1985).

Pode, de fato, a escrita ser usada como veículo de aprendizagem da Matemática? Pelos estudos da Psicologia Cognitiva (Bruner, Luria, Vygotsky), da Neuropsicologia (Gardner), da Sociolingüística (Hymes) e da Filosofia (Dewey, Polanyi), Emig (1977) argumentou teórica e convincentemente que a escrita é um "processo lingüístico" bi-hemisferal único e multirepresentacional conjuntamente com outras estratégias poderosas de aprendizagem; portanto, deve-se considerá-lo um processo acadêmico-chave. Um bom número de educadores matemáticos já defenderam que a escrita facilita a aprendizagem da Matemática; entretanto, apenas pouca evidência dum desenvolvimento conceptual ou duma maior maturidade matemática por parte dos estudantes já se produziu para sustentar a validade desta asserção. Os estudos empíricos visando medir os efeitos da escrita tanto no desempenho matemático dos estudantes como na sua atitude em relação à disciplina têm sido em si problemáticos. Entre outras dificuldades técnico-pedagógicas enfrentadas verificou-se que ou o período instrucional era muito curto, como no caso do estudo feito por Bell & Bell (1985), ou os instrumentos estatísticos produziam resultados confusos e contraditórios, como no caso do estudo feito por Selfe, Peterson, & Nahrang (1986).

Foi como uma primeira tentativa de questionar a validade desta

afirmação que se iniciou o estudo deste caso tendo-se sempre em mente a seguinte questão: Que mudanças podem ser observadas na compreensão matemática dos estudantes e nos seus sentimentos em relação a Matemática devidas à escrita? As três questões seguintes estiveram também na base deste estudo:

1. Será que as produções escritas dos estudantes refletem o seu reconhecimento de padrões, relações e atributos na Matemática?
2. Será a escrita um meio pelo qual os estudantes podem chegar a um acordo sobre significados e gerar conhecimentos?
3. Usarão os estudantes a escrita para tirar conclusões, fazer conjecturas, formular questões e expressar os seus sentimentos em relação à Matemática?

ORGANIZAÇÃO

Durante o primeiro semestre do ano letivo 1987-88, realizou-se este estudo junto dum parte dos estudantes do curso de Cálculo — Developmental Mathematics I — no Colégio de Arte e Ciência Newark da Universidade de Rutgers cujos estudantes na sua maioria não vivem no campus. O curso, baseado no modelo pedagógico de Joffman e Powell (1991a) o qual, por sua vez, afasta-se, nas suas linhas fundamentais, do modelo do "giz e da fala", inclui o estudo de frações, decimais, percentagens, problemas apresentados na forma escrita e uma introdução à Álgebra Elementar. O curso começou com 24 estudantes dos quais apenas dezoito concluíram-no. As aulas realizavam-se com uma frequência de três vezes por semana durante catorze semanas. A maior parte dos participantes ao curso eram estudantes dos primeiros anos e eram admitidos ao curso com base no seu desempenho no Teste Estatal de Habilidades Básicas ministrado na Universidade de Rutgers do Estado

de New Jersey ou com base num instrumento interno — o Teste de Colocação de Matemática. O conteúdo de ambos os instrumentos é o Cálculo Aritmético e a Álgebra Elementar.

A partir de situações escolares anteriores por que passaram, muitos estudantes do curso têm desenvolvido sentimentos e crenças negativas acerca da Matemática e acerca deles próprios em relação da sua aprendizagem como educandos de Matemática. Um estudante chegou mesmo a dizer que a “Matemática é algo que se faz e não que se compreende”. A maior parte dos estudantes deste curso considera a Matemática não apenas um sistema simbólico impenetrável mas também um corpo imutável misterioso cujos segredos não podem ser revelados. Esta crença é não só compartilhada por outros estudantes em situações similares (Berk, 1982) como também é geral (McKnight et al., 1987, pp. 42-49). Os estudantes tem desenvolvido uma relação de distanciamento com a Matemática acadêmica: Este “distanciamento” manifesta-se em estratégias tendentes a evitá-la, que incluem uma passividade na aprendizagem, uma rotina de estudo inapropriada e uma relutância em participar ativamente na sala de aula.

O curso — Developmental Mathematics I — foi escolhido por duas razões importantes: é o primeiro duma sucessão de três cursos, o último dos quais é um curso intermédio de Álgebra Elementar (Álgebra Colegial), cuja conclusão é um dos requisitos para concessão de grau acadêmico. Aproximadamente 50% dos estudantes admitidos respondem corretamente a menos de 40% dos itens de um dos dois testes de colocação. Estes estudantes são colocados num dos dois primeiros cursos da sucessão mencionada mais atrás. Em qualquer dos semestres, o índice de reprovação na cadeira de Álgebra Colegial é de aproximadamente 40%. Este índice é válido tanto para estudantes entrando diretamente para o curso como para aqueles que têm de frequentar primeiro um ou dois cursos de “Developmental Mathematics.” Conseqüentemente, há uma grande preocupação por parte

dos administradores da universidade em reter os estudantes que não tem, à entrada, o nível mínimo de desempenho matemático requerido.

Houve uma segunda e igualmente forte razão para a escolha desta organização. Os estudantes do curso — *Developmental Mathematics I* — provêm dos setores mais desfavorecidos da nossa sociedade e são, por conseguinte, vítimas de opressão racial, de gênero e de classe. O efeito total disto tem, de um maneira geral, um impacto negativo no desempenho acadêmico dos estudantes, em particular no matemático. (para uma abordagem mais detalhada dum modelo que tenta explicar a diferença do desempenho matemático dos estudantes com base na raça, sexo e estado sócio-econômico dos mesmos vide Reyes & Stanic, 1988). O método predominante de ensino de Matemática do "giz e da fala" contribui o distanciamento entre os estudantes e a disciplina e, por isso, é também outro elemento de opressão. Porque o escrever requer um envolvimento ativo e não passivo dos educandos este projeto tem em vista capacitá-los em duas vertentes: (1) promover uma tomada de consciência da escrita como veículo de aprendizagem e das facilidades que elas lhes proporcionam na aprendizagem; e (2) colocar os estudantes no centro da sua própria aprendizagem e dotar-los do controle da mesma enganjando-os na reflexão e na reflexão crítica das experiências matemáticas.

MÉTODOS

Durante a segunda semana do semestre, discutiu-se oralmente e por escrito com os alunos a natureza e os objetivos do presente estudo (vide a Fig. 3), tendo-se solicitado colaboradores para o projeto. Dos que responderam positivamente ao convite foram selecionados dois estudantes um dos quais, José, é não só co-autor do presente trabalho como também fez um trabalho que constitui a base de todo este estudo.

Dear Developmental Mathematics I Student:

This semester, I will conduct a research project for which I am looking for student collaborators. The goal of the research project is to discover whether writing about the mathematics that one is learning and doing can be helpful in learning mathematics. Let me tell what the project is about.

In this course, I will ask each of you to keep a journal about your learning and to do other types of short writing assignments related to the course. Most of the writings that you do I will collect and analyze, and to some writings I will respond. Those who collaborate with me may be asked to do a bit more writing than others. Each week, collaborators and I will meet as a research team to help me analyze their writings.

The central research question that I hope to answer by the end of this research project is: What types of thinking about mathematics are displayed in student writing? In addition, there are three sub-questions that I will be asking about the writing that you do.

- 1 - Do students' writings display their recognition of patterns, relationships, and attributes in mathematics?
- 2 - Is writing a mean by which students can construct or negotiate meaning?
- 3 - Do students use writing to draw conclusions, make conjectures, ask questions, and express their feelings about mathematics?

Why do I ask students to write in a mathematics class? I believe that writing can be a powerful tool for developing or improving your critical and reflective thinking about mathematics. By critical thinking, I mean the type of thinking that is careful and reasoned. And by reflective thinking, I mean thinking that is inquisitive, thoughtful, and deliberate. Reflective thinking also can lead one to think about how one thinks. Both critical and reflective thinking can lead one to search for and find meaning and understanding. These, I believe, can be the benefits to you of this research project.

I intend to co-author a paper, with those who collaborate with me, on the results and findings of this project. Let me know if you would like to work with me. The first meeting of the research team will be held in my office at 13:00 on Wednesday, 16 September.

Sincerely,

Arthur B. Powell

** Fig. 3 - Carta aos estudantes explicando o projeto da pesquisa solicitando colaboradores para a mesma e indicando as vantagens do uso da escrita em aulas de Matemática*

Dentre as atividades escritas usadas no curso, duas — a escrita livre e a crônica da aprendizagem — foram analisadas no presente estudo. No princípio de cada aula ou exame, pedia-se aos estudantes que escrevessem, durante cinco minutos, sobre o que e como bem entendessem. Se não tivessem idéias nenhuma podiam também escrever tal fato. Disse-se aos estudantes que os seus trabalhos escritos não iriam ser avaliados nem recolhidos. Sugeriu-se, entretanto, que guardassem-nos para o seu próprio interesse e hipotetizou-se que a escrita livre era capaz de promover a reflexão e proporcionar um período de meditação durante o qual a pessoa dar-se-ia perspectivas. Como veremos, a escrita livre serviu para outro fim inesperado. Nenhuma tentativa foi feita para se monitorar a escrita livre, mas apesar de que o professor também escrevia livre, verificou-se que os estudantes escreveram durante todo o tempo regulamentar.

A crônica da aprendizagem constituiu a atividade escrita central e a mais produzida das duas. Com efeito, considerou-se inicialmente que ela seria a única atividade escrita da aprendizagem na qual se basearia o presente estudo. Pediu-se aos estudantes para escreverem diariamente, ou pelo menos para cada aula ou tarefa, sobre qualquer tópico ou questão ou relacionado com a aprendizagem da Matemática do curso, ou sobre os seus sentimentos em relação a esta, ou mesmo sobre o curso em si. Porque alguns estudantes têm a concepção de que a escrita é uma tarefa difícil e para eliminar ansiedades que muitos associam à quantidade de trabalho escrito produzida, aconselhou-se os estudantes que cinco minutos de atividade escrita era suficiente para cada artigo de crônica. Depois que se acostumaram à escrita de crônica a maior parte viu-se gastando mais do que cinco minutos para expressar os seus pensamentos. Uma lista de tópicos foi apresentada para estimular o pensamento e a reflexão (vide a Fig. 4).

You are asked to keep a journal on A4 sheets of loose-leaf paper. Generally, one or two sheets will be sufficient for a weeks' worth of journal writing. Neither your syntax nor grammar will be a concern or checked; my only concern and interest is what you say, not how you say it. You are asked to make, at least, one journal entry for each meeting that we have, and, as a rule of thumb, you need not spend more than five to ten minutes writing each entry. Each week, the latest journal entries will be collected and returned with comments.

The focus of your journal entries should be on *your learning* of mathematics or on the mathematics of the course. That is, your reflections should be on what you do, feel, discover, or invent. Within this context, you may write on any topic or issue you choose. To simulate your thoughts and reflections, here are some questions and suggestions.

1. What did *you* learn from the class activity and discussion or the assignment?
2. -What questions do *you* have about the work *you* are doing or not able to do?
3. -Describe any discoveries *you* make about mathematics (patterns, relationships, procedures, and so on) or yourself.
4. -Describe the process *you* undertook to solve a problem.
5. -What attributes, patterns, or relationships have *you* found?
6. -How do *you* feel about your work, discoveries the class the assignment?
7. -What confused *you* today? What did *you* especially like? What did *you* not especially like?
8. -Describe any computational procedure *you* invent.

* Fig. 4 - Instruções aos estudantes para a escrita de crônicas ("journal").

As crônicas eram recolhidas semanalmente e devolvidas com comentários sobre o que tivesse sido escrito. Estes, entretanto, não constituíam juízos de valor, muitas vezes consistindo de perguntas ou sugestões sobre tópicos, ideais, etc para encorajar uma maior investigação. O objetivo era usar as crônicas como instrumentos de aprendizagem da Matemática. Por isso, disse-se aos estudantes para que não se preocupassem com a gramática e com a sintaxe mas apenas com o que eles tivessem de escrever. Além

dos incentivos intrínsecos, nenhuma penalização ou prêmio na forma de notas ou outro equivalente foram atribuídas aos estudantes. Tal daria a entender indiretamente aos estudantes que havia modos pré-concebidos pelos quais eles deviam “processar” conceitos e sentimentos. Os dezoito estudantes que concluíram o curso submeteram crônicas correspondentes a uma frequência de 93%.

A escrita livre e a de crônica são duas de três atividades realizadas neste projeto de investigação. A terceira envolveu uma colaboração estudante-professor na análise tanto pelos trabalhos escritos pelos estudantes como da Matemática feita por estes e ainda na redação do presente trabalho. Como co-autores do artigo, tivemos encontros periódicos para a discussão e análise primeiro da produção em crônica de José e finalmente artigos seus de escrita livre. As observações destas discussões foram guardadas e mais tarde discutidas, enriquecidas e revistas. No fim do semestre, encontramos-nos muitas vezes para decidir sobre a forma deste trabalho e para escrever um rascunho do mesmo.

RESULTADOS ESCRITA LIVRE

Na concepção inicial deste estudo não tencionávamos analisar a escrita livre de José. No fim do curso, contudo, ele sugeriu que a análise de artigos seus selecionados poderia ser informativa. De fato, foi-o e descobrimos que a sua escrita livre serviria para quatro objetivos, cada um inserindo-se na categoria da escrita expressiva. Primeiro: a escrita livre fora uma atividade meditativa, permitindo a pessoa não só estabelecer um contato com a sua realidade interior mas também controlá-la e fazê-lo se tornar mais confiante. Segundo: a escrita livre serviria como uma maneira de afastar preocupações de mente. Estas preocupações eram variadas, tendo os artigos incluindo discussões sobre sentimentos relacionados ou não com o curso e a Matemática; por exemplo, sobre tarefas a serem executadas;

sobre a ansiedade que precede as apresentações em frente à turma; sobre a escolha de carreira e a definição da vida futura; sobre avaliações de conteúdos do curso; sobre a estrutura e método de ensino; e finalmente sobre questões acerca da interação social. Terceiro: a escrita livre funcionou como meio de reflexão sobre processos matemáticos. Os extratos de artigos escritos por José abaixo indicados ilustram estas três funções da escrita livre (este extrato e outros que vêm a seguir são, salvo menção expressa do contrário, são autoria do estudante e co-autor, José):

Ah! Aqui estou mais uma vez. Eu acho que o papel aborrece-se quando escrevo nele. Que fazer. Que fazer. O quê? Fiz várias observações sobre os padrões na tabela de multiplicação. Foi útil ouvir o "feedback" do grupo. Começa com as tarefas de Jones esta noite, estude para o exame de química, estude psicologia.

Escrito durante a sexta semana do semestre e depois de igual número de semanas de escrita livre, este foi o primeiro artigo a conter uma referência específica à Matemática ou a um processo matemático da mente (reconhecimento de padrões). Mais tarde, o artigo a seguir foi escrito e nele José detalha uma observação específica e um certo conhecimento profundo que tal engendrou.

Aqui vamos nós mais uma vez. Hoje observei na turma enquanto trabalhava com expoentes que quando se passa da esquerda para a direita que o valor do expoente aumenta por uma unidade. Oh! Oh! Cheguei ao fim da página. Onde é que eu estava? Oh! Então o que eu disse na página anterior e o seu inverso é verdadeiro que quando se passa da direita para a esquerda. E também, o número de passo na multiplicação é o mesmo que do expoente quando se passa da direita para a esquerda e quando se passa da. Wow!

Às vezes, a natureza de prosa de circunstância dos trabalhos de escrita livre requer que a pessoa leia os artigos cuidadosamente e, poucas vezes, que extraia significados. Muitas observações interessantes são mencionadas no artigo acima referentes a tabela semelhantes à da Fig. 5 mais abaixo. Nele a frase comparativa de que o número de “passos na multiplicação” (realmente fatores da base) “é o mesmo que o do expoente” demonstra que o seu conhecimento anterior foi sintetizado com a informação observada diretamente na tabela. Tratou-se observar e conduzir para além das aparências.

...	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	...
...	$\backslash(1,8)$	$\backslash(1,4)$	$\backslash(1,2)$	1	2	4	8	16	32	64	...

* Fig. 5 - Uma tabela onde podem ser observadas as relações e os modelos das potências de dois com expoentes inteiros (positivos, negativos e zero).

É interessante notar que nenhuma menção se fez de que este conhecimento não é válido para expressões a esquerda de 2^1 . Contudo, a escrita livre acima ilustra, por escrito, a luta de José com um novo conceito — o expoente negativo — da qual resulta que ele consiga uma compreensão em alguns níveis do significado do conceito. Adicionalmente, a penúltima frase do estrato acima indica que José adquiriu um conhecimento da relação entre dois conceitos: os conceitos de recíproco e de expoente negativo.

O quarto objetivo da escrita livre não estava inicialmente previsto. Muitas vezes um artigo de escrita livre do dia era revisto imediatamente antes de se escrever um artigo de crônica. Isto é, artigos de escrita livre eram usados como notas para o enriquecimento de artigos de crônica. Um exemplo de tal objetivo será dado depois duma discussão dos resultados gerais da escrita de crônica.

CRÔNICA

Tal como no caso da escrita livre, as crônicas eram variadas mas limitadas em vários aspectos. Elas deviam ser uma espécie de apontamentos sobre o conteúdo e o próprio processo de aprendizagem do que meras prosas de circunstância e deviam tornar-se documentos públicos para serem lidos e comentados. Entretanto, elas retiveram quase sempre a sua função expressiva: as crônicas continham comentários sobre o curso bem como descrições de soluções e descobertas. Talvez por limitações particulares à escrita de crônica, esta proporcionou, mais do que a escrita livre, uma informação substancial sobre como e o que se aprendia e sentia. As crônicas provaram também serem veículos poderosos de diálogo entre estudantes e professores.

Com o decorrer do semestre do curso, a natureza dos artigos e tópicos das crônicas de José evidenciaram um crescimento na sua compreensão e no seu prazer em fazer matemática bem como uma maior confiança nas suas habilidades matemáticas. No princípio, contudo, os artigos versavam sobre como a turma ou alguns colegas da turma reagiam ao curso e, como tal, estes trabalhos escritos eram principalmente mensagens ao professor tal como o ilustra o seguinte extrato:

Também noto que quanto mais trabalhamos com expressões de círculo (vide Hoffman e Powell, 1988, 1991b) mais confiantes nos sentimos em trabalhar com elas. Eu noto ou é uma opinião pessoal que os grupos de trabalho ajudam muita gente. Dá-lhes uma espécie de maior segurança trabalharem em grupos do que individualmente.

Sugeriu-se que os estudantes escrevessem crônicas que focalizassem a sua própria aprendizagem, os seu sentimentos, conhecimentos, descobertas, etc. Mais tarde, as crônicas de José tornaram-se, na sua maioria, resumos de discursões na turma. Durante as primeiras duas semanas, estes resumos eram, na sua maioria, narrativas simples e rotineiras sobre

encontros na turma.

Hoje trabalhamos com o velho problema dos selos postais. Debruçamo-nos sobre informações anteriores relativas ao problema e também descobrimos novas coisas sobre o problema... Algumas conjecturas foram também sugeridas.

Os trabalhos escritos de José ainda não focalizavam o seu interior, mas com tempo tal passou a acontecer, começando a incluir reflexões que sustentavam que ele observava padrões e que descreviam sentimentos em relação à tarefa a executar.

À medida que o tempo passa, está a tornar-se fácil para mim descobrir padrões no trabalho que estou a fazer. Sinto-me mais confiante no trabalho que estou a fazer...

Também havia frases de satisfação e prazer derivados da facilidade de resolução de problemas.

Descubro, à medida que o tempo vai passando, que está a tornar-se fácil para mim resolver problemas matemáticos e que estou gostando mais da Matemática do que antes.

Nesta altura do semestre, as respostas afetivas mais positivas de José em relação à Matemática correspondiam tanto a uma maior especificidade nas suas frases dos resumos como a uma viragem em direção a uma reflexão, pela escrita, sobre a Matemática. Até certo ponto, esta viragem foi também estimulada pelas cutucadas do professor através dos comentários na crônica da semana: "Seria interessante ler sobre os padrões que você está observando. Se você escrever sobre eles, então a sua compreensão do

material pode também aumentar.” Logo após esta sugestão foi escrito o artigo abaixo indicado. O que é particularmente interessante é que o artigo contém um enriquecimento duma observação mencionada inicialmente num artigo de escrita livre produzido nos princípios daquela semana, demonstrando que artigos de escrita livre eram usados, às vezes, como “notas para o enriquecimento de crônica” (vide o extrato da Fig. 5). Este é uma função inesperada pela escrita livre que não fora prevista.

Hoje observei na turma a trabalhar com expoente que quando se passa para a direita o valor do expoente aumenta uma unidade. O inverso é válido se passa para a esquerda. Também observei que o número de passos na multiplicação é igual ao número do expoente. Quando passa para a esquerda, tomo o recíproco do valor positivo que encontrei quando passei para a direita. Quando se multiplica potência com a mesma base, mas expoentes diferentes, eu posso somar aos expoentes. Por exemplo, $5^3 \times 5^1 = 5^4 = 625$. Quando se dividem potências com a mesma base, mas expoentes diferentes, subtraio o primeiro expoente do segundo. Por exemplo,

$$\frac{5^3}{5^1} = 5^{3-1} = 5^2 = 25.$$

No extrato acima, José não só re-escreve mais claramente o que ele escreveu durante uma sessão de escrita livre nos princípios daquela semana, que é por si um indicativo dum certo grau de engajamento intelectual no tópico, mas também continua com o resumo detalhado de novo material.

Outra mudança na natureza das crônicas de José evidenciou-se a meio do semestre. Novos elementos apareceram: resumos detalhados e ilustrações expressivas e ainda explorações de conceitos matemáticos e suas relações. Estes elementos podem ser vistos no seguinte artigo:

Hoje, na turma, observei mais regularidades nas propriedades dos expoentes. Há até agora seis maneiras de resolver equações exponenciais. São as seguintes:

PE1: Se a é um número qualquer e n e m são expoentes, então $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

$$\text{PE2: } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\text{PE3: } (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\text{PE4: } (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\text{PE5: } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{PE6: } (a^t \times b^t)^n = a^{t \times n} \times b^{t \times n}$$

Quando se trabalha com frações a pessoa pode dizer que determinar o recíproco dum número é o mesmo que elevá-lo a primeira potência negativa inteira. Também, quando se eleva um número ímpar potência o resultado será negativo, e quando se eleva um número negativo a um número par o resultado será positivo. Por exemplo, $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ e $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$.

Esta é uma crônica dum dia de trabalho. Na primeira parte, José resume seis propriedades dos expoentes (PE) que tinham sido discutidas em dias anteriores. Foi a primeira evidência de que a crônica era usada para resumir, em grande detalhe, e não simplesmente para mostrar o que foi aprendido. Tal como crônicas posteriores, o seu objetivo era assegurar à própria pessoa o que aprendia. Estes rephraseamentos de ideais mencionadas na turma representam ideais com as quais José se

sente agora mais confortável e dos quais reclama autoria. José usou a técnica do rephraseamento para explorar e compreender novas idéias suas.

Na segunda parte da crônica acima, José menciona duas descobertas de sua autoria. A primeira é uma interpretação do significado duma situação invariante e foi feita independentemente. É interessante notar que esta descoberta representa uma re-entrada no tópico das potências negativas. Desta feita, outro aspecto foi descoberto: a relação entre determinar o recíproco duma fração e a primeira potência negativa inteira da mesma fração. A segunda descoberta de José expõe uma relação não discutida na turma, mas feita durante a reflexão sobre uma tarefa.

As crônicas foram também usadas para promover a reflexão crítica. Pediu-se aos estudantes que revissem crônicas anteriores, procurassem nelas exemplos onde tivessem usado a escrita para pensar sobre a Matemática, refletissem sobre esses casos e finalmente comentassem-nos por escrito. Durante tal exercício, o conhecimento, por parte de José, da equivalência entre “determinar o recíproco dum número” e “elevar esse número à primeira potência negativa inteira,” até então válida para frações, alargou-se para incluir os números inteiros, números cujos denominadores são iguais a unidade.

Da mesma maneira que as crônicas detalhavam o que um estudante compreendia na lição ou tarefa, elas também revelavam falhas na compreensão e na concepção. Uma atenção adequada a estas indicações poderia tornar tais crônicas veículos dinâmicos para o desafio e o aumento do conhecimento matemático do estudante. Um exemplo no qual se usou a crônica para desafiar-se um falha de concepção ocorreu quando nós estudamos técnicas de determinação do Máximo Divisor Comum (MDC) e do Menor Múltiplo Comum (MMC). Numa tentativa de esclarecer e reclamar a autoria do primeiro destes dois conceitos, José escreveu:

Descobri que podia determinar o máximo divisor comum de dois

inteiros, determinando primeiro os fatores comuns aos dois inteiros e depois escolhendo o maior de todos eles. Por exemplo,

$$(24,30) : 1,2,3,6 \quad \text{M.D.C} = 6 \text{ ou } 2^1 \times 3^1.$$

Mais tarde, ele tentou interiorizar ambos os conceitos e acomodá-los à sua compreensão dos fatores primos e da fatorização por fatores primos.

A determinação MMC de um grupo de inteiros consiste em tomar, nas fatorizações destes as potências de fatores primos comuns. Por exemplo, $\text{MMC}(28, 36) = 2^2$, porque $28 = 2^2 \times 7^1$ e $36 = 2^2 \times 3^2$. Neste caso 2^2 é o MMC.

Parece que a confusão de José adveio simplesmente do fato de ele ter usado o grupo errado de três letras, MMC em vez de MDC, e não duma falha de concepção. O problema foi apresentado e colocada uma questão. Subseqüentemente, a questão reiterada na primeira frase da crônica abaixo indicada foi respondida e ilustrada com alguns exemplos. José descreveu corretamente como determinar o MDC dum grupo de inteiros positivos e até discutir um caso especial.

Hoje, tentei determinar o MDC e o MMC dum grupo de números a partir da sua fatorização em fatores primos. Descobri que as duas respostas podem ser determinadas a partir da fatorização em fatores primos. A maneira pela qual se termina o MDC dum grupo de inteiros consiste em procurar os fatores primos comuns aos inteiros do grupo. Os fatores primos comuns são o MDC. Note que se não há fatores primos comuns aos inteiros do grupo, então o MDC é 1 (unidade). Por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{MDC}(60,12) &= 2^2 \times 3^1 & \text{MMC}(5,12) &= 1 \\ 60 &= 2^2 \times 3^1 \times 5^1; 12 = 2^2 \times 3^1 & 5 &= 5^1; 12 = 2^2 \times 3^1 \end{aligned}$$

Contudo, na sua segunda parte, desta crônica, apresentada abaixo, está ainda evidente uma falha na compreensão matemática ou na linguagem.

O MMC pode ser determinado duma maneira semelhante. Contudo, quando se pretende determinar o MMC dum grupo de inteiros tomam-se as fatorizações primas comuns aos inteiros do grupo.

Por exemplo,

$$\text{MDC}(60,12,15) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$$

$$6 = 2^2 \times 3^1; 12 = 2^2 \times 3^1; 15 = 3^1 \times 5^1$$

Embora José tenha calculado corretamente o MMC, nesta parte da crônica, a sua linguagem não lhe permitiu descrever com precisão a sua percepção e ação. Por outro lado, a parte da “confusão,” relacionava-se em parte, com o que o adjetivo “comum” qualicava e com o que pode ver na fatorização por fatores primos de um grupo de inteiros. Para determinar o MDC, a palavra “comum” relaciona-se com o que a pessoa vê diretamente nas fatorizações por fatores primos. Dada uma fatorização em fatores primos dum grupo de inteiros, o MMC desse grupo não se relaciona com os elementos “comum” visíveis. Isto é, os múltiplos dos inteiros do grupo, não são visíveis numa simples observação das fatorizações.

José teve que procurar uma linguagem que correspondesse às suas percepções e ações. Quando se lhe pediu para refletir criticamente, bem como para rever e comentar sobre um grupo de crônicas contendo a crônica acima, ele conseguiu encontrar uma linguagem que descrevesse corretamente o método que ele empregara para determinar o MMC. Eis um extrato do tal artigo:

Para determinar o MMC, o menor múltiplo comum, dum grupo de números tomam-se os fatores primos distintos do grupo que a pessoa tiver elevado à potência mais alta. Por exemplo,

$$\text{MMC}(2^5 \times 5^3 \times 3^3, 2^1 \times 5^3 \times 3^1, 7^1 \times 19^1 \times 13^1) = \\ 2^5 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^1 \times 13^1 \times 19^1$$

Há três aspectos interessantes neste extrato. Primeiro, os números inteiros não são representados na sua forma padrão como por exemplo 750, mas na sua fatorização em fatores primos como $2^1 \times 5^3 \times 3^1$, ficando evidente uma certa facilidade em usar uma representação mais abstrata. Segundo, a descrição do José da maneira pela qual se determina o MMC é geral e concisa. Ele conseguiu este nível de generalidade e concisão refletindo e refletindo criticamente através da escrita e da revisão das suas conceitualizações escritas. Terceiro, na descrição acima, se a palavra “tomam-se” fosse substituída pela palavra “multiplicam-se” e a frase “que a pessoa” pela frase “cada,” que é, como se diz na prática, então a descrição de José pareceria uma tirada dum “James e James” (1963, p, 262) [um dicionário matemático]!

COLABORAÇÃO ESTUDANTE-PROFESSOR

Nos modelos convencionais de investigação, incluindo aqueles baseados nas salas de aula, há um investigador e um objeto da investigação. Mesmo nos modelos mais progressivos, tais como os baseados na sala de aula, o professor é o investigador e os estudantes os objetos da investigação. Nós rejeitamos tais modelos a favor de outro denominado participatório. Na concepção metodológica deste estudo, em termos de processo e produtos, o estudante e o professor trabalharam juntos na análise das produções escritas do estudante e para escreverem este relatório. No extrato a seguir, José faz uma reflexão sobre diversos aspectos e benefícios do seu envolvimento no projeto conjunto.

Eu interessei-me no estudo devido às minhas fracas habilidades matemáticas. Senti que se eu desempenhasse um papel mais ativo na aprendizagem da Matemática, eu seria capaz de obter melhores resultados no curso. Durante todo o semestre, mantive crônicas em que detalhava as minhas observações sobre a turma, sobre o curso, sobre a minha aprendizagem da

Matemática.... Nós nos encontrávamos depois das aulas, e sempre que fosse possível, para discutirmos sobre o que eu pensava que ganhara como resultado da utilização da escrita numa aula de Matemática. O professor pediu-me que eu comentasse a experiência da utilização da escrita e as crônicas para se saber como fora exatamente que ganhara uma melhor compreensão da Matemática que eu estava a aprender. Eu deparei-me com muitas situações em que certas idéias e conceitos se tinham tornado para mim mais claros como resultado do fato de ter escrito sobre eles... Então, nós prosseguimos com a idéia de elaborarmos conjuntamente a nossa comunicação, enfocando o meu processo de aprendizagem e a minha compreensão dos conceitos matemáticos como resultado da utilização da escrita. Como resultado dos trabalhos escritos que eu produzira ao longo do semestre, eu senti-me mais confiante nas minhas habilidades de resolução de problemas e comecei a entender melhor os conteúdos. Eu me tornara não só mais eficiente e passara a entender melhor os conteúdos como também descobrira pela escrita sobre a Matemática que eu eliminara algumas das ansiedades que já tivera sobre a mesma. Como resultado, eu tive uma das duas notas mais altas tanto no exame como na classificação finais do curso. Antes eu não gostava da Matemática e o meu desempenho era pobre.

A decisão de José de participar no projeto foi um ato com vista a melhorar o seu desempenho matemático. De fato, o seu conhecimento matemático e a facilidade de fazer Matemática melhoraram. Estes melhoramentos foram acontecendo à medida que José conseguia superar as suas ansiedades matemáticas e o seu distanciamento em relação à disciplina. Uma atenção explícita à reflexão e à reflexão crítica foram os veículos da ocorrência de tais transformações.