sem ela seria impossível de coletar, já que é difícil para um professor entrevistar 27 alunos a cada aula. Como as questões foram grupadas por objetivos temáticos, foi possível encontrar padrões que remeteram a esta ou aquela estrutura de pensamento.

Algumas respostas:

> **Grupo 1:** "Observamos que quando a escala diminui o tamanho aumenta, quando a escala aumenta o tamanho diminui".
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | ↓ | 1:50 =10 cm | 1:50 = 10 cm | ↑ |
> | ↓ | 1:100 = 5 cm(x2) | 1:100= cm(:2) | ↑ |
> | ↓ | 1:200 = 2,5 cm(x4) | 1:200 = 2,5 cm(:4) | ↑ |

Este grupo percebeu que, dependendo da escala utilizada o tamanho do desenho muda. A direção das setas para baixo e para cima, feitas por eles, indica a reversibilidade com que o grupo trabalhou com a operação de multiplicação e divisão. De acordo com sua justificativa pareceu que os alunos não "falaram", mas indicaram (nos cálculos) as relações "dobro", "quádruplo", "metade" e "quarta parte". Isso nos leva a crer que eles perceberam, mas ainda não formalizaram.

> **Grupo 5:** " O segmento que representa a escala 1:200 cabe 2 vezes dentro da de 1:100. O segmento da escala 1:200 cabe 4 vezes dentro da de 1:50".
>
> **Grupo 6:** "A escala 1:100 cabe duas vezes na escala 1:50. A escala 1:200 cabe 4 vezes na 1:50 e 2 vezes na escala 1:100".
>
> **Grupo 7:** "O segmento 1:50 é o dobro do segmento 1:100 que é o dobro do segmento da escala 1:200".

Estes três últimos grupos demonstraram fazer confusão entre a escala e o segmento que a representa, por exemplo, quando o grupo 5 diz que "cabe duas vezes dentro da de 1:100". Tal justificativa leva a pensar que, para o grupo, pode não estar claro que o segmento é uma representação da escala. Acredita-se que uma resposta do tipo "cabe duas vezes dentro do segmento que representa a escala de 1:100" estaria mais completa.

A discussão dessa atividade foi feita em vários momentos: primeiro com o professor analisando o desenho de cada aluno individualmente. Após a análise, o professor propôs aos alunos que colassem todos os desenhos em uma única folha e em seguida fizessem as devida(s) observação(ões) e correção(ões). Novamente o professor recolheu as respostas dos grupos, fez sua análise e devolveu-as, porém trocando os trabalhos entre os grupos, para que fizessem novamente suas intervenções, desta vez no trabalho dos seus colegas. Os alunos gostaram muito e se empenharam bastante na realização destes três momentos do trabalho propostos pelo professor.

A questão seguinte fez parte do *Protocolo* elaborado com base nos exercícios para o raciocínio de frações de Gimenez (1995). De acordo com a classificação proposta por Vergnaud (1989), este é um tipo de atividade de comparação, uma vez que o aluno ao realizá-la não necessita explicitar numericamente as razões, mas fazer comparações do tipo maior/menor que a metade, etc.

3.5 Máquinas Deformadoras

A escolha desta atividade também se deu por vários motivos:

trazer questões diferentes (não tradicionais) para o trabalho escolar, apresentar uma situação de aprendizagem diferente para o trabalho com semelhança e permitir um trabalho relacionando ampliação e redução de segmentos com frações.

Sua classificação foi a seguinte:

Objetivos cognitivos: estrutura multiplicativa e frações.
Objetivo técnico: -
Ferramentas: máquinas deformadoras.
Tipo: aprendizagem de conceitos e atividade aberta
Caráter: sala de aula(grupo) e casa(individual e grupo).
Tempo: 04 aulas.

Primeiramente a ficha foi deixada como dever de casa individual. Na aula seguinte foi recolhida pelo professor e após a análise da mesma confirmou-se a hipótese de que os alunos se apoiavam mais nas estruturas aditivas; poucos utilizavam estruturas multiplicativas.

Após a análise, selecionou-se algumas das respostas para que os alunos discutissem sobre a resposta melhor e mais completa. Novamente o professor devolveu as fichas aos alunos que, agrupados para a discussão de sua resposta com a dos outros colegas foram repensando suas respostas e re-escrevendo-as, quando necessário, para a correção com a turma toda na aula seguinte.

Esta ficha além de fornecer pistas sobre a não utilização pelos alunos das estruturas multiplicativas, também permitiu explorar outros conceitos importantes como o de fração, comparação e equivalência de frações. Eis uma questão e algumas respostas individuais.

Questão: Estes exercícios são de máquinas deformadoras, algumas espicham algumas reduzem. As máquinas A e B reduzem o bastão de entrada. Qual das saídas dessas máquinas que reduz mais? Por quê?

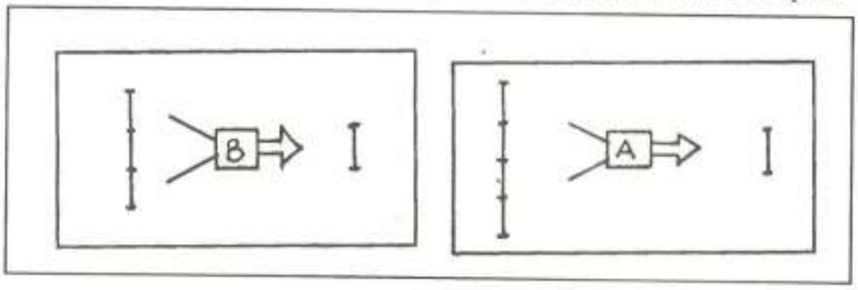


Figura 5

- "A. A primeira entrou com 4 saiu com 1 e a segunda entrou com 3 e saiu com 1, logo a primeira reduz mais".
- "A primeira reduz mais porque começou com um pedaço maior".
- "A. Porque o seu bastão possuia 4 pedaços e a outra três, se as duas foram reduzidas em um pedaço a A reduziu mais".

De um modo geral percebeu-se com as respostas acima que os alunos estão começando a estabelecer alguma relação entre as grandezas (por exemplo, quando dizem de 4 para 1 ou de 3 para 1). Porém, apesar de todos os alunos terem respondido que a máquina A reduzia mais, não se podia afirmar que eles tinham clareza do porquê da redução.

Por exemplo, a explicação da última resposta não dá certeza se o aluno pensou: $4 - 1 = 3$, $3 - 1 = 2$ (estrutura aditiva) ou $1/4 < 1/3$ (estrutura multiplicativa). Será que o aluno respondeu a máquina A porque $3 > 2$? Com isso percebeu-se que apesar da resposta correta, o problema não havia terminado.

Várias questões deste tipo foram propostas e discutidas nesta atividade, inclusive a elaboração e apresentação de novas questões pelos alunos. Mesmo com a riqueza das discussões entre alunos e professor, não era possível afirmar que os alunos já trabalhavam confortavelmente com as estruturas multiplicativas, pois segundo Vergnaud (1989) essas estruturas se desenvolvem no sujeito entre 7-18 anos de idade.

A atividade proposta a seguir é, segundo a classificação de Vergnaud(1989), uma atividade de completar com números que estão faltando e sua resolução envolve proporções simples e proporções múltiplas.

3.6 Completando Tabelas

Classificação da atividade:

Objetivos cognitivos: estrutura multiplicativa, operações com números, frações e as diferentes representações de um número.

Ferramentas: tabelas.

Tipo: aprendizagem de conceitos, trabalhando a medida de forma contínua.

Caráter: casa(individual).

Tempo: 02 aulas

As tabelas seguintes foram deixadas como tarefa de casa (individual) para os alunos completarem. Esta atividade constituiu-se como mais uma a desenvolver a utilização das estruturas multiplicativas e, como se verá mais adiante, a maioria dos alunos justificou suas respostas utilizando tais estruturas.

O *Protocolo* das máquinas deformadoras serviu também como início de um processo de concretização do pensamento do aluno; pois sabe-se que não é apenas com uma atividade que vamos admitir que ocorreu a construção daquele conceito. Sendo assim, o aluno vai se apropriando ora de uma idéia, ora de outra; até perceber o atributo relevante do conceito. Este processo não foi e não é linear, sequencial e finito. Eis a atividade:

Complete cada tabela abaixo e justifique sua resposta.

Tabela1

Entra	Sai
1	50
2	...
3	...
...	200
1,5	...
6	...
...	175

Tabela2

Entra	Sai
1	70
2	140
...	210
2,5	...
...	490

Tabela3

Entra	Sai
2	5
4	10
5	...
[illegible]	...
...	15
...	20

Algumas respostas individuais dos alunos:

Aluno 1:

Tab. 1: "Porque se de 1 sai 50; de 2 sai 100(o dobro); de 3, 150 sempre acrescentando ou tirando 50. A não ser 1,5 aí é 1= 50 + a metade de 50 que é 25, sai 75. 3,5 'e o mesmo tipo".

Tab. 2: "É o mesmo tipo de cálculo, só muda o valor do 1 que é 70; de 2 sai 140, o dobro; no 3 acrescenta 70".

Tab. 3: "É a mesma coisa. Se de 2 sai 5, de 1 tem que sair a metade, sai então 2,5; 4

é duas vezes maior que dois então é 10 e 6 é duas vezes maior que 4 então é 15".

<u>Aluno 2:</u>

Tab.1: " 1x50=50 portanto, 2x50=100, 3x50=150, 200 : 50=4 e assim por diante".

Tab.2: " 1x70=70 portanto, 2x70=140, 210 : 70=3, 2,5x70=210(?) e assim por diante".

Tab.3: " 2x2,5=5 portanto, 4x2,5=10, 6x2,5=15, 1x2,5=2,5, 15 : 2,5=6 e assim por diante".

<u>Aluno 3:</u>

Tab.1: "Cada 1 vale 50, assim multiplicamos ou dividimos conforme o desejado".

Tab.2: "cada 1 vale 70, assim multiplicamos ou reduzimos conforme o desejado.

Tab.3: "Cada 2 vale 5, assim multiplicamos ou reduzimos conforme o desejado".

2+2+2=5+5+5=15

5 : 2= 2,5

2+2+2+2=5+5+5+5=20".

É interessante perceber a diversidade de representações que os alunos utilizam. O aluno 3, por exemplo, percebeu que para achar o 6 era só desmembrar de 2 em 2 quantas vezes fosse necessário, pois cada 2 vale 5 (não se preocupou com o resultado de 2+2+2+2 ' 5+5+5+5). Aparentemente, os alunos expressaram-se utilizando a estrutura multiplicativa e o aluno 3 associou a multiplicação como uma soma de parcelas iguais.

Esta atividade de tabela, além de contribuir para o desenvolvimento da estrutura multiplicativa, também proporcionou oportunidades para trabalhar a representação de um número, o trabalho com os números racionais e as operações, pois, ao se trabalhar com as estruturas multiplicativas uma das dificuldades geralmente apresentada, está ligada 'a manipulação e 'a representação de números racionais (Lesh, 1992).

Ao terminar esta seqüência de atividades, obteve-se na maioria dos alunos uma resposta mais positiva, isto é, uma resposta mais próxima da que se queria que eles tivessem, mas que não necessariamente estaria correta, pois não se poderia esperar que, apenas com essas atividades, o aluno tivesse completamente desenvolvido as estruturas multiplicativas.

Dando prosseguimento à pesquisa elaborou-se várias atividades aonde os alunos puderam manipular, discutir, criar e verificar a semelhança de figuras planas. Para realizar estas atividades, utilizou-se o PANTÓGRAFO para fazer ampliação e redução de figuras por um ponto externo, o TANGRAM e o GEOPLANO para trabalhar com polígonos / diagonais / perímetros / áreas etc, PAPEL QUADRICULADO para fazer a ampliação e redução e figuras. A utilização desta variedade de atividades justifica-se, uma vez que acredita-se que conceito é melhor aprendido através de uma multiplicidade de situações que dão sentido à esse conceito.

Após a realização destas artividades, retornou-se ao trabalho com as plantas baixas, isto é, a sua construção nas escalas 1:50, 1:70 e 1:35. Nesse caminhar, chegou-se então ao trabalho específico com o conceito de semelhança. Eis um exemplo.

3.7 Afinal: Semelhante ou Parecido ?

A questão seguinte fez parte de um teste realizado individualmente em sala de aula durante duas aulas (1h40min). Após a aplicação, o professor recolheu-os e na aula seguinte fez uma entrevista com cada aluno para esclarecer algumas de suas respostas e depois fez a discussão e correção com a turma. Este teste de verificação constou de quatro questões de semelhança encontradas em livros didáticos de 8ª série. Com estas questões, esperava-se verificar se os alunos conseguiriam utilizar os conceitos trabalhados nos *Episódios* anteriores, isto é, transferí-los a este novo contexto.

Classificou-se este *Episódio* da seguinte maneira:

Objetivo Cognitivo: conceito de figuras semelhantes e razão de semelhança.

Objetivos Técnicos: verificar se os alunos aplicaram os conhecimentos obtidos nos episódios anteriores, identificar figuras semelhantes e utilizar a razão de semelhança

Ferramenta: teste (xerocado)

Tipo: avaliação

Caráter: sala de aula (individual)

Tempo: 04 aulas

A seguir, a questão e algumas respostas.

Questão: Estes retângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.

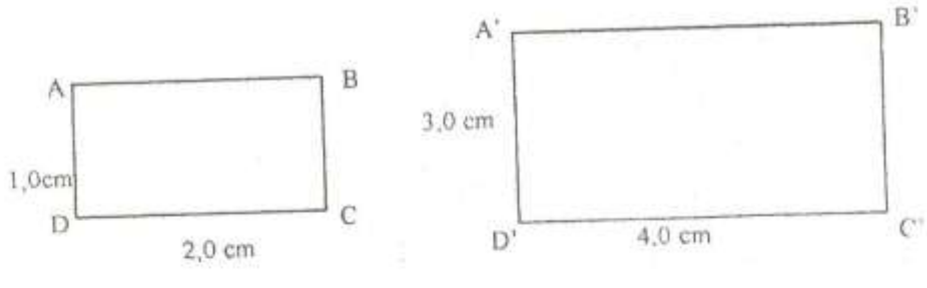


Figura 6

- "Não. Porque os ângulos são os mesmos, tem 90° e apenas os lados foram alterados. Um lado foi ampliado ou reduzido 3x e o outro foi ampliado ou reduzido 2x".
- "Eles não são semelhantes porque o lado AD "é de 1,0cm e o lado DC é de 2,0cm, então na segunda figura o lado AD aumentou 3 vezes, ou seja, ele foi para 3,0cm e o lado DC aumentou duas vezes, ou seja, foi para 4,0 cm então eles não aumentaram na mesma proporção".
- "Não, pois suas medidas não equivalem. Por exemplo: 1,0x3=3,0 ; 2,0 x 3=6,0 enquanto foi 4,0".
- "Sim. Porque os ângulos continuaram os mesmos só mudou o tamanho(2x) e os lados continuaram os mesmos só que ampliados".
- "Sim. Porque aumentou numa proporção de 1. As medidas dos retângulos passaram de 1,0cm para 3,0cm e de 2,0cm para 4,0cm. Isso significa que aumentou em 2x".
- "São, pois os lados aumentaram a mesma medida e na mesma proporção. Aumentou 2x, $1 \Rightarrow 3$ e $2 \Rightarrow 4$".

Como se vê, o trabalho com as estruturas multiplicativas deve ser continuado juntamente com a exploração do conceito de figuras semelhantes, pois, como pode ser observado, alguns alunos justificaram sua resposta apenas esboçando o conceito, enquanto outros perceberam a não proporcionalidade dos lados, mas justificaram utilizando um pensamento aditivo. Sendo assim, o professor não pode partir do princípio de que o seu aluno já domine o conceito; uma vez que ele pode apenas decorar e não conseguir aplicá-lo corretamente.

Torna-se, portanto, necessário mais atividades, maior variedade de situações sobre o mesmo tema e mais discussão com a turma toda sobre o conceito de semelhança. Sugere-se, então, que esse trabalho exploratório das noções de semelhança, seja feito desde as séries iniciais, de maneira que o aluno possa ir percebendo e, nas séries mais avançadas (8ª série, por exemplo), possa abstrair os atributos relevantes do conceito de semelhança. Com esta questão pode-se concluir que:

1. Ao trabalhar com retângulos, o professor deve estar atento ao fato de que os alunos não se preocupem em verificar a congruência dos ângulos, uma vez que todos os seus ângulos são congruentes, o que não lhe permitirá verificar se o aluno percebe a natureza conjuntiva da definição de semelhança e, também se o aluno já possui os atributos relevantes do conceito;
2. Os retângulos, apesar de aparentemente parecidos, podem não ser semelhantes. O professor deve a todo momento, explorar as diferenças entre a linguagem matemática e a linguagem corrente e reconhecer a importância desta última para o trabalho com os conceitos matemáticos. Na diversidade de respostas dos alunos nesta questão, surgiram expressões que enriquecerão o trabalho com semelhança e cujo significado o professor deverá trabalhar bastante, seja na linguagem corrente, seja na matemática, tais como: *"proporção, congruente, equivalentes, mudar de acordo, escalas, aumentar na mesma medida, aumentar na mesma proporção, proporcional, proporção diferente, estruturas parecidas e lados alterados, etc"*.

4. Considerações finais

⇒ Quanto à semelhança de figuras

O ensino de semelhança de figuras vem sendo realizado sem aprofundar os aspectos nele envolvidos e sem relacioná-lo com os demais conteúdos, ou seja, as noções são apresentadas de forma comprimida com definições formais e alguns exemplos seguidos de exercícios, numa seqüência que não explora a riqueza e complexidade que esse conhecimento pode propiciar. Procuramos nesta investigação construir instrumentos que envolvessem alguns aspectos contidos na noção de semelhança, aprofundando-os e na medida do possível, buscando integrá-los a outras áreas.

Na medida em que as atividades eram aplicadas, os dados eram obtidos e o professor podia analisá-los e verificar como estava se processando a estruturação do pensamento do aluno e que tipo de dificuldades ele (ou o seu grupo) estava apresentando. Quando os alunos respondiam alguma questão e não se conseguia entender o desenvolvimento de seu raciocínio, fazia-se uma entrevista de maneira a compreender a elaboração de seu pensamento.

Acredita-se que um trabalho interdisciplinar, envolvendo as disciplinas de Artes, História, Geografia e Matemática é bastante possível e pode contribuir na construção de um saber menos compartimentalizado.

⇒ Quanto aos conteúdos pré-requisitos

O professor deve estar esclarecido da diferença entre a *"operação multiplicação"* e a *"estrutura multiplicativa"*. Isto porque é objetivo do ensino de matemática de 1ª `a 4ª série do 1º grau que o aluno domine as quatro operações, e por isso, o professor de matemática – que possui uma visão de currículo estruturado de forma lógica e sequencial – parte deste pressuposto e continua este trabalho nas séries subsequentes admitindo que os conteúdos ensinados anteriormente são pré-requisitos (cumpridos e alcançados). Porém, como o pesquisador foi o próprio professor da turma no ano anterior e acompanhou-a, pode ver que este tipo de pensamento nem sempre nos ajuda a ensinar. No caso do ensino de semelhança não basta ao professor apenas acreditar que o aluno já domina a operação multiplicação, considerada um pré-requisito para a aprendizagem desse conceito.

⇒ **Quanto à linguagem:**

As palavras possuem diferenças e semelhanças de significado na linguagem corrente e na linguagem matemática. Exemplificando, a palavra *semelhante* na linguagem corrente é sinônimo de *parecido* ou algo que tem a *mesma forma* mas matematicamente falando, para que duas figuras sejam semelhantes é necessário que tenham *exatamente a mesma forma*. Nessa visão, é importante também valorizar a linguagem oral e escrita do aluno.

Muitas são as palavras ou expressões que podem surgir para enriquecer o trabalho com semelhança através da exploração do seu significado, dentre elas: *mudar de acordo, proporção, proporcionalmente, mesma proporção, escala, correspondentes, congruentes, dobro, ampliar, reduzir, manter, razão, vezes maior, medidas não comuns, medidas multiplicadas, ângulos conservados e lados modificados.*

Devido à natureza conjuntiva da definição de semelhança torna-se necessário realizar um trabalho com os juntores E e OU, pois como vimos, os alunos algumas vezes se preocupavam apenas com proporcionalidade dos lados em outras apenas com a correspondência dos ângulos. Diante desta necessidade, este trabalho poderá ser articulado com o professor de Português, já que é importante ter clareza da distinção entre estes conectivos.

⇒ A proposta didático-pedagógica: professor x aluno(s)

Ao se optar por esta proposta - que estava voltada para o desenvolvimento do raciocínio num processo de analisar e avaliar os diferentes caminhos escolhidos pelos alunos ou grupos ao resolver as situações propostas - o pesquisador, ao acompanhar a turma durante a 6ª e 7ª séries pode também confirmar o que dizem as teorias cognitivas do processo ensino-aprendizagem: o conhecimento não se dá por transmissão, repetição ou reforço num processo estático e desvinculado da prática social do aluno. Percebeu isso pois sabia que todo o conteúdo programático previsto para a 6ª série tinha sido "cumprido" e, no entanto, pouco ficara para os alunos, uma vez que eles não tinham construído os conceitos envolvidos neste conteúdo.

Apesar da insatisfação do professor com sua prática em sala de aula nos anos anteriores esta sua "frustração" foi importante, despertando-o para a necessidade de mudar sua postura, ou seja, passar a encarar o aluno como sujeito do processo ensino-aprendizagem, reconhecendo suas limitações, despertando o seu interesse e o gosto pela matemática, respeitando sua individualidade e sua maneira de elaborar o pensamento, não priorizando apenas o conteúdo matemático. Sendo assim, para o professor esta proposta resgatou a importância da "fala" na construção cognitiva de um conceito, quando ele valorizava o diálogo e a escrita do seu aluno e, a partir deles procurava fazer as intervenções que achava serem adequadas.

Esta mudança de postura do professor implica em reflexões profundas sobre o que é aprendizagem, qual a sua relação com o ensino e qual o papel dos conteúdos, significações e dos procedimentos de ensino no desenvolvimento das estruturas lógicas e vice-versa.

A mudança de postura desafiou também o aluno para assumir a cada momento um papel questionador, ora no entrosamento com o(s) grupo(s), ora na resolução das atividades propostas, procurando apresentar-lhe a matemática como uma disciplina dinâmica, realmente útil e presente em seu dia-a-dia.

As avaliações de alguns alunos transcritas abaixo sintetizam a intervenção ocorrida:

"Eu achei diferente pois o conteúdo dessa matéria é totalmente diferente do ano passado, principalmente a atividade de ampliação e redução onde no começo tive muitas dúvidas, mas acabei entendendo. A matéria de geometria permite que hajam muitas brincadeiras como tangram, etc. As aulas tem sido divertidas". **RI**

"Gostei muito das aulas de geometria, mas em algumas coisas como ampliação e redução com o pantógrafo e quadriculado tenho dúvidas. As aulas de figuras semelhantes foram super legais e fáceis de aprender. As aulas em geral estavam bem elaboradas e criativas, por causa do trabalho em grupo que ajudou muito nos trabalhos. As aulas das plantas, das máquinas deformadoras, tangran e o geoplano também foram interessantes". **HE**

"Foi bom, as atividades em grupo pois "várias cabeças pensam melhor que uma". Algumas atividades foram fáceis e outras mais difíceis. As fáceis sempre são as mais legais. Aprendi várias coisas úteis, que eu

posso utilizar em outros trabalhos. O Tangram é o melhor, pois foi uma atividade mais descontraída. As atividades me serviram para desenvolver meu raciocínio". **PR**

A "fala" dos alunos aconteceu em trabalhos individuais ou trabalhos em grupo, quando considerava-se o que o aluno falava, analisava-se e devolvia-se com uma nova pergunta para que ele pudesse re-elaborá-la juntamente com seu grupo: os colegas trocavam opiniões, pensavam melhor sobre a adequação ou não de uma solução, ou um colega apresentava uma solução diferente, havia reelaboração; e até mesmo quando o aluno justificava sua resposta.

Este intercâmbio levou a dois pontos importantes: incentivou as crianças a pensarem e a raciocinarem e evitou que se criasse ou reforçasse a idéia de que a matemática é difícil, incompreensível, que poucos (os *experts*!) conseguem aprendê-la e, que só se aprende pela memorização.

Admitindo e reconhecendo como é difícil, mas ao mesmo tempo importante uma mudança de postura e de prática pedagógica, olvidou-se das práticas de ensino tradicionais e buscou-se, assim, romper as relações com elas, preocupando-se com a construção do conhecimento do aluno. E foi neste caminho que **"Buscando Semelhanças Encontramos Mais Do Que Meras Coincidências"**.

5. Referências Bibliográficas

ABRANTES, P.(1995). **Avaliação e Educação Matemática.** Rio de Janeiro, MEM/USU. Série Reflexões em Educação Matemática(vol.1).

BAIRRAL, M. A. (1996) **Buscando semelhanças encontramos mais do que meras coincidências.** Disertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro, MEM/USU.

BROUSSEAU, G.(1996) **Os diferentes papéis do professor.** *In: PARRA,* *Cecília e SAIZ, Irma (org.)* ***Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas.*** *Porto Alegre, Artes Médicas. Tradução Juan Acuña Llorens*

CAMPOS, A.V.D.S.(1990) **Estruturas Cognitivas e o Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro, Boletim GEPEM nº 26 (p. 73-80).

CASTRO, E.(1995) **Estructuras Aritméticas Elementales y su modelización**. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.

CATALÁ, C.A. et alli.(1991) **Materiales para construir la Geometría.** Madrid, Editorial Sintesis.

COLL, C.(1992) **Psicologia y Curriculum**. Barcelona, Paidós.

D'AMBRÓSIO, U.(1991). **A matemática e seu entorno sócio-cultural.** *In Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educacion Matemática(42). Sevilla, Septiembre, (p. 76-79).*

FAINGUELERNT, E.K.(1995) **O Ensino de Geometria no 1º e 2º graus.** Blumenau, A Educação Matemática em Revista, nº 4 (p.45-53).

_______ et alli (199) **Trabalhando com geometria**. São Paulo, Ática.

FRANT, J.B.(1994) **Método Qualitativo.** RIMEM 002/94. Rio de Janeiro, MEM/USU.

GIMENEZ, J.(1995). **Epistemologia dos números racionais**. Rio de Janeiro, Seminário MEM/USU, (mimeo).

GONZÁLEZ, R.L.(coord.) (1990) **Proporcionalidad Geometrica y Semejanza.** Madrid, Sintesis.

GROSSI, E.P.(org.) (1993) **Construtivismo Pós-Piagetiano: um novo paradigma sobre aprendizagem.** Petrópolis, Vozes, 1993 (3ª. ed.)

HERSHKOWITZ, R. (1994). **Aspectos Psicológicos de Aprendizagem da Geometria.** Rio de Janeiro, Boletim Especial GEPEM nº 32.

IMENES, L.M. e LELLIS, M.C.(1994) **O Currículo Tradicional e o**

problema: um descompasso. Blumenau, A Educação Matemática em Revista nº 2 (p.5-12).

JAKUBOVIC, J. et alli(1992). **Semelhança**. São Paulo, Atual(Pra que serve matemática?).

KALEFF, A. et alli (1994) **O desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele.** Rio Claro-SP, BOLEMA (p.21-30)

LESH, R. et alli (1992). **Rational Number, Ratio and Proportion.** *In Handbook of research NCTM (p.296-333).*

LINDQUIST, M.M. e SHULTE, A.P.(org.)(1994) **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo, Atual. Tradução de Hygino H. Domingues.

LOPES, M.L.M.L e NASSER, L.(coords.), et alli (1996) **Geometria na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro, Editora da UFRJ.

MACHADO, N.J. (1991) **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua.** São Paulo, Cortez (autores associados).

_______.(1990) **Semelhança não é mera coincidência.** São Paulo, Scipione(coleção vivendo a matemática.

MEIRA, L.L. et alli (1993). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife, Editora da UFPe.

NASSER, L.(1990) **O desenvolvimento do raciocínio em geometria**. Rio de Janeiro, Boletim GEPEM nº 27 (p. 93-99).

_______ (coord.) et alli (1995). **A Teoria de van Hiele aplicada ao ensino de semelhança**. Rio de Janeiro, UFRJ, (mimeo).

POWELL, A.B. e LÓPEZ, J.A. **A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: estudo de um caso.** New Jersey, Rutgers University, 1995 (Tradução John Manuel Francisco e

Arthur Powell). Mimeo.

SANCHEZ, L.B (1991). **O desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de questões de ampliação e redução de figuras planas.** Sao Paulo, USP, Dissertação de Mestrado.

SCHLIEMANN, A.D.et alli (1995). **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo, Cortez. (9 ed.)

SCHWARTZ, B.(1989). **The use of a microword to improve the concept image of a function: The Triple Representation Model Curriculum.** Unpublished doctoral dissertation. Israel, Weizman Institute of Science.

TINOCO, L.A.A.(coord.) et alli (1996) **Razões e Proporções**. Rio de Janeiro, Editora da UFRJ.

VERGNAUD, Gérard (1989) **Multiplicative Structures.** *In Hiebert, James e Behr, Merlyn(eds.)* ***Number Concepts and Operations in the middle grades.****NCTM, vol.2, p.141-161.*

_______.(1983) **Multiplicative structures.** *In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics: Concepts and process.* New York: Academic Press.

_______.(1984) **Understanding proportion, fraction and ratio at the primary level.** Trabalho apresentado no V Internacional Congress on Mathematical Education. Adelaide, Austrália.

[1] 1. Mestre em Educação Matemática-USU e Professor Assistente do Departamento de Teoria e Planejamento de Ensino do Instituto de Educação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. e-mail: mbairral@ufrrj.br

O PAPEL DA ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DA GEOMETRIA: UM ESTUDO DE CASO[1].

Maria Solange da Silva[2]

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa a tomada de consciência do professor, em especial o de matemática, da importância do uso da argumentação em sala de aula. Mostra que o ensino das demonstrações pode ocorrer de maneira bem mais espontânea, se os alunos tiverem a argumentação como fator estimulador deste processo, possibilitando um ambiente de descontração e construção. Veremos como a Teoria da Argumentação desenvolvida por Chaïm Perelman, também conhecida como Nova Retórica, pode ser uma ferramenta poderosa para o professor no sentido de compreender os processos cognitivos por que passam seus alunos na construção de conceitos matemáticos, sendo por isso mesmo, fundamental à pesquisa desses processos.

A geometria foi escolhida para este estudo por várias razões, entre elas temos:

⇒ Seu abandono nos currículos escolares;

⇒ Para questionar sua forma de abordagem (caracterizada principalmente pela aplicação de fórmulas e manipulações algébricas);

⇒ Para poder associar aspectos do mundo físico à geometria e assim criar condições do aluno desenvolver sua intuição espacial, a visualização e a criação de relações lógicas;

⇒ E, por propiciar ao aluno meios de relacionar seus conhecimentos geométricos em situações diversas, dando-lhes a oportunidade de construir outros conceitos.

Dentre as Teorias cognitivas existentes, acredito que a Teoria da

Construção do Pensamento Geométrico desenvolvida por Pierre van Hiele é a que melhor justifica as dificuldades inerentes ao ensino /aprendizagem da geometria. É nesta Teoria que está pautada o processo de construção dos conceitos geométricos apresentados aos alunos no decorrer da pesquisa. Entretanto com a teoria da argumentação de Chaïm Perelman busco a valorização do discurso argumentativo dos alunos no momento da construção destes conceitos. Procuro também o aprimoramento e a qualidade da escrita na forma de expressar o pensamento. Com a Nova Retórica, analiso o caráter lógico argumentativo da forma de se expressar dos alunos e apresento uma metodologia que pode ser um elo facilitador para a construção de conceitos.

Portanto a pesquisa objeto deste trabalho avalia como a ARGUMENTAÇÃO pode ser um facilitador para estimular e possibilitar a produção do saber matemático, para desenvolver a capacidade e a necessidade de demonstrar e para estimular ao raciocínio ao mesmo tempo que resgata a oralidade dos alunos. Para isso parto da idéia básica de que a construção do conhecimento matemático está no campo da enunciação e que o conhecimento só se efetiva no momento de sua justificação.

A idéia é tornar os alunos capazes de apresentar idéias matemáticas: oralmente, por escrito, utilizando representações gráficas, ou ainda outras representações. Objetiva também fazer com que os alunos sejam capazes de se envolverem em discussões matemáticas e de formularem questões acerca das mesmas.

O PROBLEMA

Acredito que o grande interesse em refletir sobre a argumentação no ensino da matemática reside na possibilidade de provocar no aluno a busca de uma justificação que fundamente o que está sendo estudado, a princípio de acordo com o que ele acredita. Penso também que, para o aluno, esta justificação está fundada na escolha, no preferível, que é onde está contido os valores pessoais, as crenças, as hierarquias relacionadas com o senso comum. Por pensar assim procuro com esse trabalho uma concepção de razão que não decorra apenas de uma teoria que esteja limitada à prova necessitária, mas que se manifeste também na argumentação contingente dos alunos.

Dessa forma, levantamos os seguinte questionamentos:

⇒ "Podemos admitir, ao lado das provas formais outros meios de prova?"

⇒ "Através das ações e justificações dos alunos podemos observar a lógica de seus discursos matemáticos?"

⇒ "Enquanto argumenta o aluno busca justificações mais convincentes, procura ser o mais claro possível, cria condições necessárias para se fazer entender?"

O ensino pretendido neste trabalho envolve racionalidade e diálogo. Induz a crenças e convicções através do julgamento racional dos estudantes. Por isso, com a teoria da argumentação procuro verificar, pelas justificações dos alunos, como se processa as ligações entre as várias enunciações. O que eles aceitam como verdadeiro, plausível ou como preferível.

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E METODOLOGIA

A pesquisa foi um estudo de caso realizado entre março de 1995 e julho de 1996 em uma escola da Baixada Fluminense no Estado do Rio de Janeiro. Participaram desse trabalho 6 jovens entre 14 e 16 anos que na época freqüentavam a 7ª série. Os encontros ocorriam semanalmente por um período de 2 horas em horário extra classe. O conteúdo estudado foi o de um curso de geometria para a série em questão. Para atingir meus objetivos, foi apresentado aos alunos problemas envolvendo conceitos que eu gostaria que eles construíssem. Após apresentar-se o problema adotava-se o seguinte esquema de funcionamento:

⇒ os alunos escrevem suas justificações;

⇒ cada aluno lê sua justificação para o restante do grupo;

⇒ professor pergunta para os que estão ouvindo se eles entenderam o que foi lido;

⇒ cria-se o conflito entre os alunos;

⇒ aluno procura esclarecer sua fala com argumentos que visam a adesão do grupo;

⇒ se os argumentos do aluno não forem convincentes, este reformula sua fala.

Com isso esperávamos:

1)fazer com que cada aluno desenvolvesse o hábito de ouvir e interpretar o que está sendo falado pelo colega e,

2)forçar o aluno que estava relatando a justificação ser o mais claro possível, tendo sempre o cuidado de não omitir informações importantes para a compreensão de sua fala.

A idéia foi criar situações em que um aluno assume o papel de falante e os outros de ouvinte e vice-versa, para a seguir estabelecer um confronto entre as situações apresentadas por eles.

Essa estratégia incentivou o diálogo e a argumentação, visando sempre a justificação dos conhecimentos aprendidos. Os encontros foram gravados e as gravações transcritas. As análises foram feitas sobre os diálogos transcritos, previamente selecionados. Mostrarei a seguir, exemplos de como os alunos argumentavam na tentativa de convencer e se fazerem convencer. Mostrarei algumas crenças e convicções que baseiam seus argumentos no momento de construir justificações. Com a análise do discurso dos alunos, veremos que, fazendo uso da argumentação os alunos conseguem construir justificações sob a forma de demonstrações contingentes e em algumas situações, até formais, de acordo com o seu nível de desenvolvimento

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DA TEORIA DE CHAÏM PERELMAN

Por acreditar na importância da retórica para o pensamento contemporâneo, Perelman inicia a partir de 1947 o estudo de uma teoria visando ao resgate da lógica argumentativa. Desse estudo resulta um trabalho que hoje é conhecido como "A Nova Retórica de Chaïm Perelman.

A argumentação nesse contexto é pessoal, pois dirige-se a indivíduos. Uma de suas características principais está no fato de que ela visa a obter a adesão de um grupo, busca orientar o discurso no sentido de se atingirem determinadas conclusões que são desejadas. Convencer, na teoria da argumentação de Perelman é uma meta mais importante do que provar.

A teoria de Perelman admite e fundamenta uma nova interpretação para a história do pensamento. À sugestão de que o que ocorre atualmente é uma restrição do conceito de razão, Perelman contrapõe que a historicidade da razão está intrinsecamente determinada pela construção dialógica do conhecimento.

A argumentação defendida por Perelman visa à adesão e à persuasão do indivíduo às teses propostas, mas não as determina necessariamente. Daí, a razão presente quando se deseja essa adesão é chamada por Perelman de razão histórica, ou seja, a razão existente no discurso.

Em sua teoria Perelman amplia o conceito de racionalidade. Este deixa de ser restrito apenas às provas analíticas e se expande no campo da argumentação, onde para ele, existe uma lógica do discurso argumentativo. Amplia também o alcance da argumentação quando afirma que auditório não se trata apenas daqueles que estão de corpo presente, mas também qualquer um a quem a argumentação se dirige. Define auditório como sendo o "conjunto daqueles que o orador quer influenciar com sua argumentação"(Perelman,1996,p.22).

Uma argumentação para ser eficaz ela precisa desencadear nos ouvintes uma ação (positiva ou não), ou pelo menos criar uma disposição para a ação que se manifeste no momento oportuno. Para garantir a eficácia da argumentação Perelman mostra que há dois aspectos que devem ser considerados: o estabelecimento de uma solidariedade entre as teses propostas e as que já são admitidas e um possível abalo entre o que já foi admitido e o que se opõem à tese proposta pelo argumentador. Para Perelman a argumentação se apresenta como um discurso. No seu discurso o orador tem a intensão de persuadir o grupo para o qual ele se dirige, partindo de premissas que ele supõe sejam aceitas e que visam a adesão deste grupo ao seu discurso. O orador busca um acordo com seu auditório sobre as teses propostas. Esse acordo Perelman defini como sendo: "tudo aquilo que é aceito como ponto de partida de raciocínios e, depois, sobre a maneira pela qual estes se desenvolvem graças a um conjunto de processos de ligação e dissociação"(Perelman, 1996, p.73).

Perelman apresenta em sua teoria tipos de argumentos que possibilitem a análise dos acordos estabelecidos no discurso entre o locutor e seu auditório. Classifica os argumentos em três grandes tipos: os argumentos quase lógicos, os argumentos fundados sobre a estrutura do real e os argumentos que fundam a estrutura do real.

OS ARGUMENTOS QUASE LÓGICOS: São aqueles que, por sua estrutura, lembram os raciocínios formais. Resultam da introdução do formal e do quantitativo no campo do qualitativo da linguagem. Tais argumentos reivindicam Ter o mesmo valor do signo da linguagem lógico-matemática e por isso tiram sua força persuasiva de sua aproximação com esses modos de raciocínios.

Verificaremos a partir da atividade abaixo como identificar um argumento do tipo quase lógico.

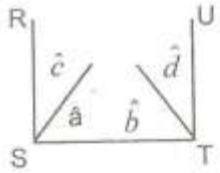
ATIVIDADE 1: Da figura abaixo são dadas as seguintes informações:

$\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ são perpendiculares.

$\overline{ST}$ e $\overline{TU}$ são perpendiculares.

O ângulo â tem a mesma medida do ângulo $\hat{b}$.

Que conclusão você pode chegar em relação aos ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$



Ao ser apresentado essa atividade Vanderson dialoga com seus amigos e usa o seguinte argumento para justificar sua resposta.

V: "Aqui. Vamos supor que $\hat{S}$ mede 90° e â 45°. Então $\hat{b}$ mede 45°. Não sobrou a mesma medida pro ângulo $\hat{c}$ e $\hat{d}$? Então, eles são iguais!"

O argumento de Vanderson baseou-se nas seguintes premissas:

$\hat{S}$ mede 90°

â mede 45°

$\hat{b}$ mede 45°

Sobrou a mesma medida para os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$

Vanderson faz a partir de então, uso de um argumento do tipo quase lógico, usando a estrutura da implicação para poder ligar necessariamente 1, 2 e 3 à igualdade entre o ângulo $\hat{c}$ e o ângulo $\hat{d}$.

Vanderson pede a adesão do grupo para um caso particular ("Não sobrou a mesma medida pro ângulo $\hat{c}$ e $\hat{d}$?"). Logo em seguida liga o caso particular a um enunciado geral. A implicação de um caso particular com um enunciado geral não é permitida. Vanderson, no entanto, usa essa estrutura na tentativa de validar sua conclusão.

<u>ARGUMENTOS QUE FUNDAM A ESTRUTURA DO REAL</u>: São basicamente os que fazem uso do exemplo, do modelo, da analogia. O pressuposto desse tipo de argumento é que o que é aceito a propósito de um caso particular, pode ser generalizado. Este tipo de argumento procura conduzir à formulação de uma lei, ou norma, ou regra, a partir de casos particulares. Ele é usado quando se quer fundamentar uma situação.

No diálogo de onde foi destacado o argumento apresentado acima Vanderson usa um único exemplo para generalizar a igualdade entre os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$ ("Aqui. Vamos supor que $\hat{S}$ mede 90° e â 45°. Então $\hat{b}$ mede 45°. Não sobrou a mesma medida pro ângulo $\hat{c}$ e $\hat{d}$? Então, eles são iguais") em uma situação em que o valor desses ângulos é desconhecido. Seu último argumento é o exemplo.

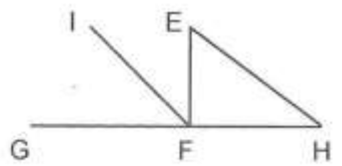
ARGUMENTOS FUNDADOS SOBRE A ESTRUTURA DO REAL: Esses argumentos são geralmente estruturados em ligações de sucessões (como a relação causa/efeito, o todo e as partes) e as relações de coexistência (como a relação entre a pessoa e seus atos). Podem valer-se dos argumentos quase-lógicos para criar um vínculo entre algo que já foi admitido e o que se procura promover.

Para exemplificar essa situação temos a seguinte atividade:

ATIVIDADE 2: Na figura os ângulos G $\hat{F}$ I e I $\hat{F}$ E são complementares. Com essa informação responda as perguntas abaixo e justifique sua resposta.

Que tipo de triângulo é o triângulo E $\hat{F}$ H? acutângulo, retângulo ou obtusângulo?

Qual a relação que existe entre os ângulos E $\hat{F}$ G e E $\hat{F}$ H?



A fala de Silvia que apresentaremos a seguir sugere que ela percebeu que os ângulos compõem um reto: "Mas por ter uma reta em baixo e uma outra em cima cortando eu acho que tem que ter 90° para um lado e 90° para o outro."

Não podendo fazer uso de uma implicação, até porque não estava segura (eu acho), ela usa uma relação de causa e efeito dos argumentos fundados na estrutura do real. A reta cortada por uma em cima e outra em baixo tem como efeito uma metade para cada lado.

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DA TEORIA DE VAN HIELE

O modelo teórico para a construção do pensamento geométrico sugerido por van Hiele diz que existem diferentes graus de dificuldades na compreensão e construção dos conceitos geométricos. Seu modelo teórico sugere níveis seqüenciais do pensamento para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Para ele é através destes níveis que se desenvolvem as características do pensamento.

OS NÍVEIS DE VAN HIELE

<u>NÍVEL 1: RECONHECIMENTO OU VISUALIZAÇÃO</u> – Nesse nível o aluno forma imagens mentais basicamente através da visualização. As conclusões são tiradas a partir da forma.

Em relação a atividade 1 apresentada neste trabalho uma aluna argumenta no sentido de convencer o grupo da seguinte forma:

Ariadne: "Se nós colocássemos os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{b}$ no lugar dos ângulos $\hat{c}$ e â veremos que do mesmo jeito que o ângulo â tem a mesma medida que o ângulo $\hat{b}$, o ângulo $\hat{c}$ tem a mesma medida que o ângulo $\hat{d}$.

Observem que nesse caso Ariadne busca e aceita o recurso visual para sua justificação. Sua estratégia é a sobreposição dos ângulos.

<u>NÍVEL 2: ANÁLISE</u>- Nesse nível o aluno começa uma análise dos conceitos geométricos. Começa a discernir acerca das características da figura que lhe é apresentada. Surgem propriedades que são usadas para conceituar. Entretanto, os alunos ainda não fazem inter-relações entre figuras, não dominam definições.

Ainda na atividade 1 a Silvia usou o seguinte argumento:

Silvia: "A gente já sabe que $\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ são perpendiculares, então o ângulo mede 90°. A gente sabe mas fica mais fácil se tivesse número. Eu acho que mesmo com todas essas

informações, tem que Ter um exemplo, uma justificativa maior, mais completa."

Observem que Silvia apesar de identificar algumas propriedades relativas à figura, de aceitar as informações oferecidas no enunciado, mesmo assim não vê como suficientemente clara a justificação como decorrente dessas informações.

NÍVEL 3: DEDUÇÃO INFORMAL – O aluno relaciona as figuras entre si e com outras figuras, de acordo com suas propriedades. Percebe que uma propriedade pode ser decorrente de outra. Definições são compreendidas, mas pode ou não dominar o processo dedutivo. A rede de relações fica estabelecida por palavras decorrentes de fatos observáveis.

Vejamos a fala que se segue:

Ariadne: "Mas $\hat{c}$ e $\hat{a}$ são ângulos de 90° e $\hat{b}$ e $\hat{d}$ também são... Eles medem 90° também. Então se $\hat{a}$ é igual a $\hat{b}$, $\hat{c}$ também é igual a $\hat{d}$.

O argumento de Ariadne baseou-se nas seguintes premissas:

$\hat{c}$ e $\hat{a}$ são ângulos de 90°. (Leia-se $\hat{c} + \hat{a}$)

$\hat{b}$ e $\hat{d}$ também são. (Leia-se $\hat{b} + \hat{d}$)

Se $\hat{a} = \hat{b}$ então $\hat{c} = \hat{d}$

Observem que de acordo com a fala de Ariadne a relação $\hat{c} = \hat{d}$ é decorrente das duas premissas anteriores. Ariadne estabelece relações de forma que sua conclusão seja decorrente das anteriores

PROPRIEDADES DO MODELO

Van Hiele também identificou cinco propriedades para o ensino da geometria;

⇒ Seqüencial - Para ele uma pessoa deve necessariamente passar pelos vários níveis, sucessivamente.

⇒ Lingüística - cada nível tem seus próprios símbolos lingüísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos.

⇒ Intrínseco e extrínseco - os objetos inerentes a um nível tornam-se objetos de ensino no nível seguinte.

⇒ Avanço – a progressão (ou não) de um nível para outro depende mais dos métodos de instrução recebidos do que da idade.

⇒ Combinação Inadequada – se o aluno está num certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejados podem não se verificar.

Van Hiele identificou ainda cinco estágios para o processo de aprendizagem de um nível para o imediatamente superior.

⇒ Informação - professor e alunos conversam e desenvolvem atividades envolvendo os objetos de estudo do respectivo nível. Fazem observações, levantam-se questões e introduz-se um vocabulário específico do nível.

⇒ Orientação dirigida - os alunos exploram o tópico de estudo através do material que o professor ordenou. Essas atividades deverão revelar aos alunos as estruturas características desse nível.

⇒ Explicação – baseando-se em experiências anteriores os alunos expressam e trocam informações sobre as estruturas que foram observadas.

⇒ Orientação livre - o aluno vê-se diante de tarefas mais complexas e que podem ser concluídas de diversas maneiras.

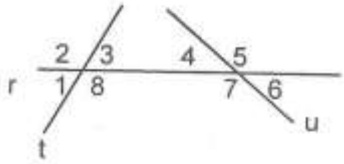
⇒ Integração - os alunos revêem e sumarizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações.

O modelo de Van Hiele sugere que a solução está em fazer coincidir o nível atingido pela turma com aquele em que a instrução é dada.

ANÁLISE DOS DIÁLOGOS

Na dinâmica das atividades, os alunos registram suas conclusões e após a redação de cada grupo um aluno do grupo lê as respostas dadas

para os outros alunos. Nesse momento segue-se uma seqüência de diálogos que o professor analisa fundado na teoria de Perelman.
ATIVIDADE PROPOSTA: Uma reta r intersecta as retas t e u de forma que o ângulo $\hat{3}$ é igual ao ângulo $\hat{4}$. Qual a relação que existe entre os outros ângulos?



ARGUMENTO	RÉPLICAS
S: $\hat{3}$ e $\hat{4}$ não são iguais! Então se colocasse o $\hat{4}$ no lugar do $\hat{3}$ não ia mudar nada, os valores iam ser os mesmos.	V: Mas não está. Eles mudaram para serem suplementares. Mas eles estão em lugar diferentes.
S: Vem cá! O $\hat{4}$ não é igual ao $\hat{3}$? Então, se a gente trocasse e colocasse aqui $\hat{4}$ e aqui $\hat{3}$ eles iam continuar tendo a mesma medida porque são iguais.	V: Mas o $\hat{4}$ não está no lugar do $\hat{3}$ logo não são suplementares.
S: Mas pode ficar?	V: Pode, mas só que não está.
Ch: Mas $\hat{4}$ tem a mesma medida que $\hat{3}$. O ângulo $\hat{3}$ é igual ao ângulo $\hat{4}$. Então eles ($\hat{2}$ e $\hat{4}$) são suplementares.	
E: Se colocasse esse ângulo ($\hat{4}$) aqui (no lugar do $\hat{3}$) ia continuar sendo da mesma	V: Mas não está no lugar.