ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Estamos trazendo aos sócios este Boletim n° 34, o último boletim emitido foi o Boletim n° 33 no ano de 1996.

Gostaríamos de pedir aos sócios que nos enviem artigos para serem avaliados pelo Comitê Editorial, é extremamente importante que os sócios utilizem este nosso meio de Comunicação para divulgarem suas pesquisas e suas experiências pedagógicas.

Iniciamos este Boletim com um artigo da Profª Helena Noronha Cury que nos traz uma análise histórica propondo um novo olhar, revê o movimento conhecido como Escola dos Anais. Aborda relações entre acontecimentos históricos e descobertas matemáticas. Uma análise sobre uma perspectiva histórica pode permitir traçar novos rumos para o ensino-aprendizagem de Matemática.

Das Profª Cristiane de Lima Santos e da Profª Gilda de La Rocque Palis, nos fala sobre inter-relações entre representações gráficas e manipulações algébricas, quais os "limites" das manipulações algébricas para que os resultados sejam avaliados de maneira a satisfazerem a equação inicial.

A Profª Vera Lúcia Fazoli Cunha Freitas Viana relata em seu artigo um processo interativo de extração da raiz quadrada, muito eficiente, conhecidos pelos Babilônios, e nos fala sobre a sua utilização no 1° grau, contrariando algumas tendências que acreditam que o Método está acima do nível dos alunos neste grau de ensino.

Os próximos artigos são trabalhos que foram apresentados no I Encontro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática realizado em novembro de 1997, na UNESP - Rio Claro/SP. Os trabalhos hoje, são teses de Mestrado defendidas e aprovadas no Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula.

O Prof. Marcelo de Almeida Bairral relata em seu artigo uma pesquisa realizada durante os anos de 1994 e 1995, numa escola particular do Rio de Janeiro, com alunos de 7ª série, cujo objetivo foi investigar o processo de construção do conceito de semelhança de figuras planas.

A Profª Maria Solange da Silva visa com sua pesquisa discutir a importância da argumentação em sala de aula. Utiliza a teoria da Argumentação desenvolvida por Chaïm Perelman, também conhecida como Nova Retórica. Utiliza a Geometria para discutir argumentações e demonstrações dos alunos, fazendo um elo com a Teoria da Construção do Pensamento Geométrico de van Hiele.

A Profª Rosana de Oliveira apresenta sua pesquisa com alunos de 5ª série, mostrando a importância de se explorar o Pensamento Algébrico em séries iniciais. O principal eixo é criar condições para que os alunos falem sobre o texto matemático Seqüências, o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) - Lins - 1994 - foi escolhido para expor uma outra perspectiva sobre a construção do conhecimento.

Para finalizar o Prof. Ubatam Gomes Gurgel, expõe o seu Projeto para a Graduação do CEFET/RJ para o ano 2000, discutindo questões pertinentes sobre Qualidade em Educação e trazendo sugestões para amenizar questões sérias como o auto índice de reprovação.

Edição e Organização
Estela Kaufman Fainguelernt
Janete Bolite Frant
Franca Cohen Gottlieb
Rosana de Oliveira

CONTRIBUIÇÕES PARA UMA NOVA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

HELENA NORONHA CURY[1]

1. A ESCOLA DOS ANAIS E A NOVA HISTÓRIA

Ao sugerir possibilidades para uma *Nova História* da Matemática, vamos, primeiramente, rever as origens do movimento conhecido como *Escola dos Anais*, que se originou na França entre as duas grandes guerras. Os seguidores dessa Escola, ao renovarem os estudos históricos, propiciaram o surgimento da corrente conhecida como *Nova História*. Apoiados em textos de seus representantes, destacaremos as fases do movimento e suas características mais importantes.

Voltaire, no século XVIII, Chateaubriand e Michelet, no século XIX, já criticavam a historiografia preocupada apenas com alguns homens - os reis e suas cortes - e postulavam uma história total, global. No início deste século, o economista e sociólogo François Simiand atacava os "ídolos da tribo dos historiadores": o "ídolo político", ou seja, a preocupação exagerada com a história política; o "ídolo individual", isto é, a ênfase na história dos grandes homens; e o "ídolo cronológico", o hábito de datar os fatos e encadeá-los linearmente.

Combatendo essas idéias, Lucien Febvre e Marc Bloch fundaram, em 1929, a revista "Annales d'histoire économique e sociale", que se propunha a fazer uma história-problema, de todos os homens, das estruturas, das evoluções e transformações, uma história interdisciplinar.

A primeira fase do movimento dos Anais, que se inicia com a criação da revista, perdura até 1945, aproximadamente. Nesse período, houve uma abertura em relação à geografia, à economia e à sociologia. Os méritos de Febvre e Bloch como desencadeadores dessa nova postura dos historiadores são reconhecidos mesmo pelos seus críticos. Como diz FONTANA (1982),

> "o primeiro traço definidor do pensamento de Febvre é o rechaço da esterilidade do historicismo e de sua erudição fatual, e o protesto

> contra a intenção de estabelecer o 'fato histórico' como objetivo supremo, talvez único, do trabalho do historiador". (p.203).

A Segunda Guerra interrompeu o ímpeto inicial, pois os dois principais colaboradores da revista separaram-se. Bloch aliou-se à Resistência e acabou fuzilado em 1944. Febvre continuou a escrever e pesquisar e, após a guerra, foi convidado a reorganizar em Paris a *École Pratique des Hautes Études*. A revista mudou de nome várias vezes até que, em 1946, passou a ostentar o que tem até hoje: *Annales. Économies. Societés. Civilisations.*

Foi também durante a guerra que Fernand Braudel, prisioneiro em um campo perto de Lübeck, escreveu sua obra mais importante: *O Mediterrâneo e o mundo mediterrânico na época de Felipe II.* A publicação desse trabalho e a atuação de Braudel na *École* inauguram a segunda fase do movimento dos Anais, que vai, aproximadamente, de 1949 a 1969. É o período em que o grupo de historiadores que gravitam em torno da revista e de Braudel aproximam-se mais de uma "Escola" propriamente dita, pesquisando novos objetos, com novos métodos e novas abordagens.

A contribuição principal desse período (se não de todo o movimento) é a idéia dos diferentes tempos que convivem na história, enunciada por Braudel em "O Mediterrâneo" e re-explicada em entrevista:

> "...existe a história que é imutável; depois há a história lentamente ritmada (a conjuntura, o movimento da população, os Estados, a guerra); enfim, há a história dos indivíduos e dos fatos, muito rápida. Eu cheguei dessa maneira à decomposição do tempo. Pois o tempo da história não tem uma única vazão, ele se escoa em camadas. Portanto, é necessária uma história na vertical. Sartre compreendeu bem isso. O que se passa no alto vai em direção ao fundo, mas nem sempre chega lá; inversamente, o que produz muito lentamente sob solo nem sempre chega à superfície. Estamos em presença de histórias paralelas, com velocidades diferentes. Eu fiquei prisioneiro dessa divisão, dessa problemática... "(BRAUDEL, 1984,p.19).

Vários historiadores, ex-alunos e colaboradores de Braudel continuaram a aproximação com a economia, a geografia, a sociologia e a demografia. A possibilidade de trabalhar com a longa duração, de poder abandonar o ritmo rápido dos acontecimentos, fez com que utilizassem, também , a arqueologia e a etnologia, investigando o quotidiano e transformando em objeto da história o corpo, o alimento, o vestuário, os jogos e as mentalidades. Juntamente com a história quantitativa, essas são as tendências novas do período. Le Goff (apud PETERSEN, s.d), no entanto, insiste em que "o quotidiano só tem valor histórico e científico no seio de uma análise dos sistemas históricos, que contribuem para explicar o seu funcionamento"(p.55).

O interesse da Nova História por todos os homens, por tudo o que é humano na longa duração, fez com que os historiadores recorressem à estatística e à programação para quantificar os objetos estudados: produção agrícola, preços, número de nascimentos e de mortes, número de batizados e casamentos, etc. Dessa abordagem quantitativa partem os trabalhos classificados como "história demográfica" e "história serial".

No segundo período do movimento dos Anais, em torno da revista e da IV Seção da *École des Hautes Études*, trabalham historiadores que fazem da Nova História um sucesso editorial, como Jacques Le Goff e Georges Duby, entre outros.

A partir de 1968, mudanças administrativas na revista e na *École* evidenciam o que já vinha ocorrendo em nível intelectual: o surgimento de uma terceira fase do movimento dos Anais, mais difícil de caracterizar devido às diferenças entre os historiadores. As substituições administrativas trazem novas idéias e novos colaboradores, como François Furet, Philippe Ariès, Paul Veyne, Michel de Certeau, Marc Ferro. Pela primeira vez, é aceita a colaboração feminina, como Michelle Perrot, que organiza, com Duby, uma *História da Mulher*.

Nessa terceira fase, tem muito destaque a história quantitativa, a do quotidiano e a das mentalidades. Palavras, gestos, símbolos, costumes, sentimentos, sexualidade, uso do tempo, fazem parte do amplo leque de interesses demonstrados pelos historiadores. Em uma nova abordagem quantitativa, o estudo de séries de documentos, na longa duração, auxilia a compreender, por exemplo, as atitudes em relação à morte. Uma mudança em direção à antropologia cultural ou simbólica trouxe trabalhos interessantes sobre linguagem, escrita, ensino, lendas e mitos.

Nos últimos anos, em obras de grande porte, como a *História da França* organizada por Duby, ou em estudos menores, como o de Le Goff sobre Luís IX, temos a volta da história política, da história biográfica, da narração, em parte talvez devido ao fato de que, com a fragmentação dos objetos de estudo, a memória dos acontecimentos do passado esteja se perdendo. Le Goff (1990) apresenta três possíveis desdobramentos para o futuro: a) a promoção de uma nova erudição, com o estabelecimento de um novo conceito de documento, da noção do tempo e do aperfeiçoamento dos métodos de comparação; b) o progresso na direção de uma história total; c) a preocupação com as idéias e teorias. Quando LE GOFF (1986) diz que "um documento nunca é inocente" (p.86), devemos entender a necessidade de analisar as condições de produção do documento e de entendê-lo na visão da época em que foi produzido, ao invés do focalizá-lo sob a ótica do presente.

A historiografia contra a qual se insurgiu a Escola dos Anais seguia o paradigma da Ciência Moderna. Ao fazer história do quotidiano, antropologia histórica ou micro-história, os responsáveis pela *Nova História* abordam alguns temas do pós-modernismo, focalizando o imaginário, o irracional, aquilo que não é dito e que foi subestimado pelo paradigma da modernidade. Porém, mesmo substituindo a história dos eventos pelo estudo das estruturas, das conjunturas e de suas tran sformações, o movimento não foge, pelo menos nas duas primeiras fases, do paradigma racionalista, pois a idéia de progresso não foi descartada.

Parece que os exageros de certos pensadores, responsáveis pelo que é chamado de "história em migalhas", está provocando uma crise dentro da historiografia, que já pede uma volta ao político e ao fatual, porém re-vestidos, sob uma perspectiva de história total, procurando recuperar sua ligação com a modernidade.

Talvez devamos ficar, ao fim das contas, com a curiosa frase do velho *patron* Braudel: "a história avança como as procissões espanholas: cada vez que se dá dois passos para frente, dá-se um ou dois para trás.

Cada progresso completado coloca novos problemas." (BRAUDEL,1984,p.24).

2. SUGESTÕES PARA NOVOS ESTUDOS EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A História da Matemática tem sido contemplada, nos últimos tempos, com um interesse muito grande, especialmente por parte dos educadores matemáticos, preocupados em aprofundar o estudo dos problemas do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina. Alguns livros de História da Matemática tradicionalmente utilizados em nossos cursos de Licenciatura fazem, em geral, uma história linear, na qual se destacam os principais matemáticos de cada época e seus trabalhos, em uma apresentação que se preocupa, apenas, em acumular fatos e datas, não mostrando as relações entre os conhecimentos matemáticos surgidos nas diversas épocas nem comparando os diferentes povos de uma mesma época em termos de conhecimento matemático.

Dispomos, no entanto, de obras um pouco diferentes, que deixam antever o advento de uma nova História da Matemática, como, por exemplo, a de Aaboe (1984). Ao tratar da origem do sistema de numeração babilônico, o autor apresenta uma visão muito interessante, pois se socorre de desenhos e fotos das tábuas de argila, traduz os símbolos utilizados pelos babilônicos e propõe hipóteses sobre o conteúdo dos textos gravados. Em vez de simplesmente afirmar que o texto apresenta, por exemplo, uma tabela de multiplicação, ele refaz o trabalho detetivesco dos matemáticos que auxiliaram nas pesquisas arqueológicas e, articulando todos os conhecimentos atuais sobre sistemas posicionais de numeração, mostra que a tábua em questão contem, efetivamente, uma tabela de multiplicação. Obviamente, essa abordagem é muito mais atrativa, especialmente com vistas ao ensino de Matemática.

Outro autor que também aborda a evolução dos conceitos matemáticos de uma forma original é Wilder, que apresenta o papel da Matemática e seu desenvolvimento no interior de uma dada cultura e suas variações de uma cultura para outra. Segundo ele,

> "o matemático que ignora as forças evolucionárias que modelaram o seu pensamento perde desse modo uma perspectiva valiosa. Saber a história não é suficiente; datas, material biográfico e tudo o mais são importantes, mas formam apenas parte da coleção de 'artefatos' para um estudo desta natureza."(WILDER, 1975, p.xiii).

Mais recentemente, vemos o surgimento da etnomatemática, abordagem que se situa em uma área de transição entre a antropologia cultural e a Matemática. D'AMBRÓSIO (1990) diz que:

> "etnomatemática é uma programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos." (p.7)

Os trabalhos citados fazem, assim, uma aproximação com a arqueologia, a antropologia, a etnologia, bem ao gosto da *Nova História*. Porém, a existência de pontos em comum não faz com que sejam, automaticamente, classificados como pertencentes ao movimento.

Aaboe, por exemplo, tendo escolhido quatro episódios da História da Matemática, apesar de inicialmente socorrer-se da arqueologia para o estudo da Matemática babilônica, volta à "história dos grandes homens" nos capítulos seguintes (Euclides, Arquimedes, Ptolomeu). Mesmo que o faça de uma forma muito atraente (do ponto de vista do ensino de Matemática), pois reconstrói, em linguagem moderna, os problemas trabalhados por esses grandes matemáticos, não está fazendo ainda uma história total, não examina esses problemas no decorrer do desenvolvimento da Matemática ocidental, não compara as soluções encontradas pelos matemáticos hindús, árabes ou chineses.

Se tomarmos as sugestões de Le Goff para desdobramentos da Nova História, poderemos aproveitá-las para sugerir possibilidades de novos estudos em História da Matemática. Le Goff cita o aperfeiçoamento dos métodos de comparação; acreditamos que os alunos de Lincenciatura, futuros professores de Matemática, têm necessidade de entender cada conceito de forma global, não só os aspectos técnicos mas a sua origem, desenvolvimento e aplicabilidade. E essa apreensão do todo não se faz apenas com uma visão (a ocidental, por exemplo) do que foi criado no passado, mas com a possibilidade de comparar as abordagens do conceito em todas as épocas e culturas. Nesse sentido é que vemos a possibilidade de uma nova História da Matemática, que escolha um objeto específico (a noção de número real, por exemplo) e a estude na longa duração, fazendo todas as comparações permitidas pelas fontes disponíveis.

Outra sugestão de Le Goff refere-se à preocupação com as idéias e teorias. Os livros de História da Matemática e os textos matemáticos em geral trazem imbuída uma certa concepção dessa ciência. Na maioria das vezes, a visão platônica é a predominante, aceitando a Matemática como o domínio das verdades absolutas. Em alguns casos, os autores são logicistas -acreditam que a Matemática pode ser reduzida à Lógica - ou formalistas - pensam na Matemática como um conjunto de regras, um jogo. Em outras poucas vezes, os matemáticos são intuicionistas, creem que só existe aquilo que se pode construir. Inspirados em Lakatos, alguns matemáticos pensam, ainda, que a Matemática é falível e corrigível, como qualquer conhecimento humano, e que só se desenvolve por críticas e correções. Todas essas concepções filosóficas, no entanto, não são explicitadas nos livros-texto.

Um historiador da Matemática que siga Hilbert, por exemplo, terá uma concepção do desenvolvimento dessa ciência bem diversa daquela apresentada pór um seguidor de Lakatos. O primeiro terá a preocupação de apresentar a história de um ramo da Matemática como um jogo de xadrez, em que cada descoberta vai somando pontos até o xeque-mate final, que seria a apresentação "asséptica", formal, polida, daquele corpo de axiomas e teoremas. Um seguidor de Lakatos partiria de uma conjetura e a desmontaria, indo às origens dos conhecimentos e voltando ao estágio atual, para mostrar os erros cometidos e as correções feitas, o ir-e-vir da construção do conhecimento.

Uma terceira sugestão de Le Goff para a *Nova História* é o estabelecimento de um novo conceito de documento. Suas considerações sobre o tema permitem vislumbrar caminhos muito amplos para a História da Matemática.

Os textos escritos pelos matemáticos, desde o papiro de Rhind até os artigos e livros publicados atualmente, têm sido a base do ensinamento da Matemática. Entre tais documentos, destaca-se a correspondência mantida entre os grandes matemáticos, através da qual se pode ver o desenvolvimento de uma determinada área. Parece-nos, no entanto, que os textos são aceitos como verdadeiros, sem que se faça um estudo da razão pela qual foram escritos, por quem foram encomendados, a que propósito se destinavam, etc.

Como exemplo, tomaremos as *Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne*. Em 1760, aproximadamente, Euler trabalhava para Frederiço II, rei da Prússia, e escreveu uma coletânea de cartas à jovem princesa D'Anhaltdessau, prima do soberano, com o objetivo de "iniciar nas altas concepções de assuntos tão diversos quanto teologia, lógica e filosofia, física, navegação, astronomia, magnetismo, ótica e tecnologia uma jovem de pouco mais de quinze anos de idade". (LA PENHA, 1984,p.1).

O sucesso dessas cartas foi muito grande, a ponto de, em 1849, já haver mais de quarenta edições. A correspondência entre os matemáticos dos séculos XVIII e XIX trazem as dúvidas, críticas e comentários feitos sobre as cartas de Euler. Podemos perguntar, então, se de fato os documentos foram escritos com o objetivo declarado. La Penha acredita que elas tenham sido dirigidas efetivamente àqueles que tinham condições de entendê-las, pois superam a instrução que teria uma adolescente daquela época. Como diz LE GOFF, é preciso analisar "as condições nas quais tal documento foi produzido e não só de que ambiente sai ou de que literalmente nos fala."(1986, p.86).

Se Euler usou esse caminho oblíquo para dirigir-se à comunidade científica da época, podemos supor que havia "feudos" de saber, que alguns cientistas ditavam as regras sobre o tipo de conhecimento que podia ser divulgado. E como esses problemas afetaram a produção do conhecimento? O que deixou de ser publicado e que poderia ter modificado os desenvolvimentos posteriores da Matemática? Todas essas são questões que interessam ao educador matemático, pois aquilo que não foi registrado em textos mas que talvez fosse conhecimento compartilhado por alguns pesquisadores, pode ser o elo que falta na compreensão dos saltos de uma etapa à outra em um conteúdo que o aluno tem dificuldade em entender.

Outro exemplo interessante de registro matemático são as anotações feitas por Fermat à margem de um livro. Estudando uma versão da *Aritmética* de Diofanto, Fermat escreveu sua célebre conjetura: se n é um inteiro maior que 2, não há valores inteiros positivos x, y, z tais que $x^n + y^n = z^n$. Após escrevê-la, Fermat acrescentou que havia encontrado a demonstração dessa proposição, mas que a margem do livro era pequena demais para contê-la.

Mas será verdade que Fermat havia feito a demonstração? Vem-nos à mente a frase de LE GOFF: "na maior parte dos casos quando se produz alguma coisa -quer se trate de uma palavra, de um objeto ou de um documento -isso se faz para mentir." (1986, p.87). Acreditamos que, se houvesse um estudo aprofundado das mentalidades dos cientistas daquele período, poderíamos entender melhor os textos de Fermat inseridos em tal contexto. O estudo proposto não é mero diletantismo, pois a compreensão dos erros cometidos pelos matemáticos no desenvolvimento de uma área tão importante quanto a teoria das equações pode ser muito proveitosa para entender as dificuldades evidenciadas pelos estudantes de Matemática.

Outra possibilidade de abordagem em uma nova História da Matemática é a pesquisa sobre seu ensino. Em compêndios de História da Educação, raramente são levantados aspectos referentes ao ensino da Matemática. Entre todas as possibilidades que se abrem nesse campo, poderíamos citar, como exemplo, o levantamento dos livros utilizados no ensino de Matemática no Brasil, desde os primeiros tempos em que houve ensino institucionalizado no País: quais os conteúdos apresentados, quem escrevia os livros, qual a filosofia da Matemática por trás de cada obra, quais as teorias de ensino que embasavam os trabalhos, quem podia ter livros e quem não podia, quais os interesses ocultos quando os livros eram indicados pelo poder público. Todas essas são questões pertinentes e extremamente atuais, visto que as aulas de Matemática são, muitas vezes, uma repetição do conteúdo apresentado no livro-texto adotado.

Tentativas de fazer uma História da Matemática que se socorra de outras ciências, história comparada, história quantitativa, preocupação com teorias, aprofundamento do conceito de documento matemático, são possibilidades que se abrem para os historiadores e matemáticos, em direção a uma nova História da Matemática. Acreditamos que, se algumas dessas tentativas tiverem êxito, a Educação Matemática sairá ganhando, pois poderemos ter subsídios para explicar vários problemas crônicos do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A . *Episódios da história antiga da matemática.* Rio de Janeiro:SBM,1984.
BRAUDEL, Fernand. Une vie pour l'histoire. *Magazine Littèraire,* n.212, p.18-24,nov.1984.
BURKE, Peter. *A revolução francesa da historiografia:* a escola dos Annales (1929-1989). São Paulo: Ed. Da UNESP, 1991.
D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática.* São Paulo: Ática, 1990
FONTANA,Josep. *Analisis del pasado y projecto social.* Barcelona: Grijalbo,1982
L. PENHA, G.M. Nas cartas a uma princesa da Alemanha, a lógica dedutiva como prólogo à filosofia de Euler. *Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática.* n .1, p.1-29, 1984.
LE GOFF, Jacques. *Reflexões sobre a história. Lisboa:* Edições 70, 1986.
LE GOFF, Jacques. A história nova. In:____.(org.) *A história nova.* São Paulo: Martins Fontes, 1990.
PETERSEN, Silvia. *O cotidiano no campo da nova história.* Porto Alegre, [s.d.]. Texto datilografado.
WILDER, R.L. *Evolution of mathematical concepts.* New York: Halsted Press, 1975.

[1] Doutora em Educação e professora do Instituto de matemática da PUCRS

ILUSTRANDO GRÁFICAMENTE ALGUMAS CONSEQÜÊNCIAS DE MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS

Cristiane de Lima Santos e Gilda de La Rocque Palis[1]

Para resolver determinadas equações são utilizados, freqüentemente, métodos envolvendo manipulações algébricas que podem fornecer "raízes estranhas" à equação ou, em outras palavras, valores numéricos que não satisfazem a equação original. Mas como essas "falsas" raízes aparecem? De que maneira podemos visualizar o porquê de seu surgimento?

Vejamos um exemplo. Suponhamos que se queira determinar as soluções da equação seguinte:

$$X = \sqrt{x + 12} \qquad (1.1)$$

Para resolver (1.1) podemos elevar ambos os membros ao quadrado para obter a equação

$$X^2 = X + 12 \qquad (1.2)$$

Subtraindo $(x+12)$ de cada termo da equação acima obtemos

$$X^2 - X - 12 = 0 \qquad (1.3)$$

cujas soluções são $X=4$ e $X=-3$.[2]

Podemos verificar, através da substituição dos valores encontrados na equação

1.1), que X=4 é de fato raiz de (1.1), mas que X=-3 não o é. Esse fato também oderia ser constatado através da observação de que X não poderia mesmo ssumir nenhum valor negativo, pois é a raiz quadrada de (X+12), logo um úmero positivo.[3]

odemos determinar onde e compreender o porquê da introdução desta falsa aiz analisando as operações algébricas realizadas no exemplo acima, como aremos a seguir.

s equações (1.2) e (1.3) são equivalentes, ou seja, um número real satisfaz à quação (1.2) se, e somente se, também satisfaz à equação (1.3), o que pode er denotado por:

$$X^2 = X + 12 \iff X^2 - X - 12 = 0$$

á a equação (1.1) não é equivalente à equação (1.2), e portanto, também não é quivalente a (1.3). Embora um número real satisfazendo (1.2) também satisfaça 1.1), a recíproca deste fato não é válida, haja visto X= - 3 que é solução de 1.2) mas não é solução de (1.1). Ou seja:

$$X = \sqrt{x+12} \Longrightarrow X^2 = X + 12 \quad \text{mas} \quad X^2 = X + 12 \not\Longrightarrow X = \sqrt{x+12}$$

 que temos, na verdade, é

$$X^2 = X + 12 \iff X = \sqrt{x+12} \ \text{ ou } \ X = -\sqrt{x+12}$$

 na passagem de (1.1) para (1.2) começamos a trabalhar com duas equações imultaneamente:

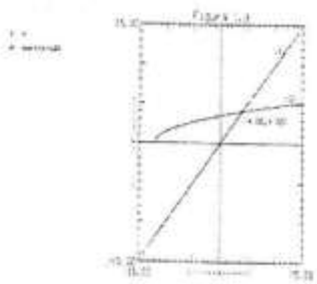
$$X = \sqrt{x+12} \quad (1.1) \quad \text{e} \quad X = -\sqrt{x+12} \quad (1.4)$$

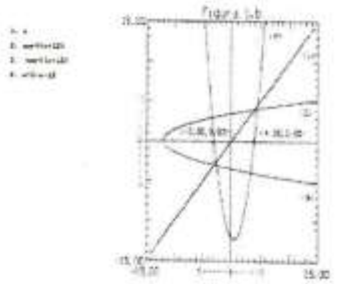
o que nos leva a encontrar as soluções dessas duas equações. No exemplo acima X=4 é raiz de (1.1) e X= - 3 é raiz de (1.4).[4]

Uma análise alternativa do processo de resolução pode ser feita através dos gráficos das funções cujas expressões são dadas pelos membros das equações envolvidas no processo.

> **Este procedimento pode tornar claro o significado de ações realizadas no contexto algébrico, expondo suas conseqüências no contexto gráfico.**

Assim, temos que as raízes de (1.1) são os valores de x para os quais as funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = \sqrt{x+12}$, assumem os mesmos valores, o que corresponde, graficamente, às coordenadas x dos pontos de interseção dos gráficos de f_1 e f_2. Na Figura 1.a estão os gráficos de f_1 e f_2, cuja única interseção ocorre no ponto (4,4). Analisando os gráficos de f_1 e f_2 conjuntamente com os gráficos de $f_3(x) = -\sqrt{x+12}$ e $f_4(x) = x^2 - x - 12$ (Figura 1.b), vemos que as coordenadas x das interseções de f_1 com f_2 e de f_1 com f_3 são os zeros de f_4[5]





Consideremos agora a resolução da equação:

$$\sqrt{2x-3} = X - 3 \qquad (2.1)$$

Seguindo as mesmas etapas do exemplo anterior encontramos:

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (X-3)^2 \qquad (2.2)$$

$$2X - 3 = X^2 - 6X + 9 \qquad (2.3)$$

$$X^2 - 8X + 12 = 0 \qquad (2.4)$$

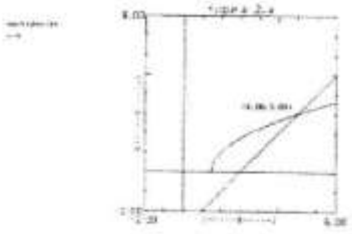
$$X = 6 \quad \text{ou} \quad X = 2$$

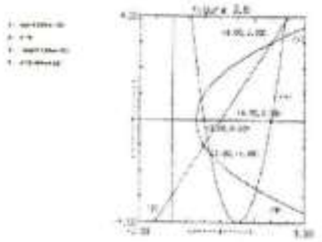
As equações (2.2), (2.3) e (2.4) são equivalentes, mas a equação (2.1) não é equivalente à equação (2.2) pois, o que temos realmente é:

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (X-3)^2 \iff (\sqrt{2x-3} = X - 3 \ \text{ e } \ -\sqrt{2x-3} = X - 3)$$

Quando passamos de (2.1) para (2.2) começamos a trabalhar simultaneamente com as equações ($\sqrt{2x-3} = X - 3$) e ($-\sqrt{2x-3} = X - 3$), ou seja, uma situação similar à do primeiro exemplo. Nesse caso, $X = 6$ é raiz de ($\sqrt{2x-3} = X - 3$) e $X = 2$ é raiz de ($-\sqrt{2x-3} = X - 3$).

Graficamente temos a interseção entre $f_1(x) = \sqrt{2x-3}$ e $f_2(x) = x - 3$ ocorrendo no ponto (6,3), visível na Figura 2.a. Já na Figura 2.b podemos analisar conjuntamente as funções $f_1(x) = \sqrt{2x-3}$, $f_2(x) = x - 3$, $f_3(x) = -\sqrt{2x-3}$ e $f_4(x) = x^2 - 8x + 12$, sendo que os zeros de f_4 coincidem com os valores de x para os quais f_1 intersecta f_2 e f_3 intersecta f_2.





"Raizes estranhas" não ocorrem somente ao resolvermos equações com radicais. Vejamos um exemplo no contexto de resolução de equações logarítmicas.

Consideremos a equação:

$$\log_{10} X + \log_{10}(X - 1) = 1 \qquad (3.1)$$

Utilizando as propriedades da função logarítmica temos

$$\log_{10}(X\ (X - 1)) = 1 \qquad (3.2)$$

Como $1 = \log_{10} 10$, podemos re-escrever (3.2) da seguinte forma:

$$\log_{10}(X\ (X - 1)) = \log_{10} 10 \qquad (3.3)$$

A função logarítmica é injetora, o que permite deduzir que

$$\log_{10}(X) = \log_{10}(Y) \iff X = Y$$

Sendo assim, a partir de (3.3), temos:

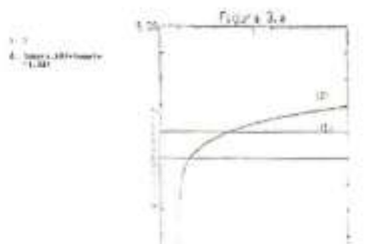
$$X\,(X - 1) = 10, \text{ ou seja, } X^2 - X - 10 = 0$$

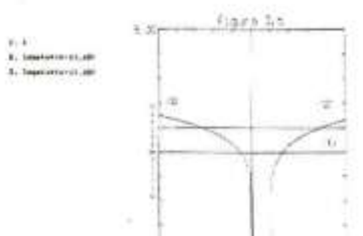
cujas soluções são:

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{41}}{2} \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$$

Podemos verificar que apenas X_1 é raiz de (3.1), pois X_2 não satisfaz essa equação. Esta segunda raiz é proveniente da passagem de (3.1) para (3.2). Analisando o problema no contexto de funções veremos que aí modificamos as funções em estudo.

Resolver (3.1) significa procurar valores de x para os quais a função $f_1(x) = \log_{10}(x) + \log_{10}(x-1)$ assume o valor 1. E resolver (3.2) significa achar os valores de x para os quais o valor da função $f_2\,(x) = \log_{10}\,(x\,(x-1))$ é 1. Observe que f_1 está definida para todo $x > 1$, x real, enquanto que f_2 está definida para $x < 0$ ou $x > 1$, x real, ou seja f_1 e f_2 são funções diferentes. Nas Figuras 3.a e 3.b podemos ver os pontos de interseção correspondentes às soluções de (3.1) e de (3.2), respectivamente.





Vejamos um outro exemplo. Suponhamos que se queira resolver a equação:

$$\log_{10} X + \log_{10}(1 - X) = -1 \qquad (4.1)$$

Pelas propriedades da função logarítmica :

$$\log_{10}(X\ (1 - X)) = -1 \qquad (4.2)$$

como $(-1) = \log_{10}(1/10)$ podemos re-escrever (4.2) como:

$$\log_{10}(X(1 - X)) = \log_{10} \frac{1}{10} \qquad (4.3)$$

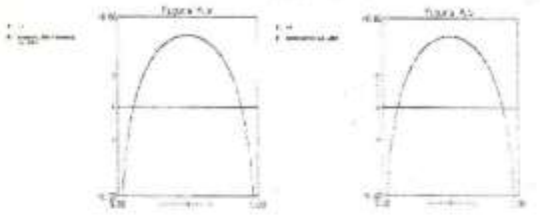
Pela injetividade da função logarítmica, temos:

$$X(1 - X) = \frac{1}{10}\ , \text{ ou seja, } \ X^2 - X + \frac{1}{10} = 0$$

cujas soluções são:

$$X_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}) \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{3}{5}})$$

Neste caso, tanto X_1 como X_2 são raízes de (4.1), pois as expressões (4.1) e (4.2) são fórmulas algébricas "distintas" de uma mesma função, ou seja, a passagem de (4.1) para (4.2) não alterou a função estudada. (vide Figuras 4.a e 4.b)



A utilização de gráficos de funções, nas análises feitas acima, permite uma interação entre o método algébrico de resolução de uma equação e a sua visualização geométrica, facilitando a compreensão do método e das noções envolvidas. O emprego de distintas abordagens de um mesmo problema, cuidadosamente apresentadas, incrementa a redundância, podendo facilitar a aquisição dos conceitos envolvidos.

Gráficos de funções da forma $f(x) = \sqrt{x+a}$ ou $f(x) = \log_{10}(x+a)$, por exemplo, podem ser obtidos com lápis e papel por procedimentos ilustrados em Gravina(1990). No entanto, a construção de gráficos de funções nem sempre pode ser realizada com facilidade. E uma alternativa interessante é o uso de calculadoras gráficas e/ou programas gráficos computacionais que permitam a rápida obtenção de gráficos de funções, facilitando a abordagem geométrica de questões algébricas como exemplificado nas questões expostas acima.

Referências Bibliográficas:

-Gravina, Maria Alice. "O Quanto Precisamos de Tabelas na Construção de Gráficos de Funções?". Revista do Professor de Matemática 17, SBM, 1990

- Palis, Gilda de La Rocque. "Tecnologia, gráficos e equações". Revista do Professor de Matemática 26, SBM, 1994.

- Possani, Claudio. "Uma equação interessante". Revista do professor de Matemática 19, SBM, 1991.

- Roberti, Joseph V. "Reader Reflections: Radical Solutions" , Mathematics Teacher 77, março de 1984.

[1] Gilda de La Rocque Palis é professora do Departamento de Matemática da PUC-RIO e Cristiane de Lima Santos é aluna de Mestrado do Departamento de Matemática da PUC-RIO.

[2] Uma forma alternativa de resolução de equações com radicais pode ser encontrada em Roberti(1984).

[3] Por definição $\sqrt{y}$, quando y é um número real não negativo, é um número real não negativo x tal que $x^2=y$

.[4] Em Possani(1991) são analisados *algebricamente* alguns exemplos de resolução de equações, explicitando a ligação entre o surgimento de falsas raízes e o procedimento de resolução adotado em cada exemplo.

[5] Os gráficos deste artigo foram construídos com o programa MPP (Mathematics Plotting Program) citado em Palis (1994).

REVISITANDO A RAIZ QUADRADA

Vera Lúcia Fazoli da Cunha Freitas Viana[1]

Vários métodos estão disponíveis para calcular a raiz quadrada de um número positivo, desde pressionar uma tecla da calculadora até o uso do algoritmo tradicional que vem sendo ensinado, embora sua razão seja desconhecida pelos professores e pareça magia para os estudantes de 6ª e 7ª séries do primeiro grau. Menos empregados são os processos iterativos, muito eficientes, conhecidos pelos Babilônios há milhares de anos - também encontrados em Heron e reestruturados por Newton - bem como o método instrutivo que usa frações contínuas. Os professores tendem a pensar - embora questionavelmente - que estes métodos estão além do nível dos alunos do 1° grau.

A atividade proposta a seguir foi aplicada a alunos da 6ª série do 1° grau como parte da pesquisa para minha dissertação de mestrado. Como veremos, através de um quebra-cabeças foi possível trabalhar as médias geométrica e aritmética, um conteúdo que dificilmente é abordado neste nível.

Se a e b são números naturais tais que a ^{1} b, temos, por exemplo:

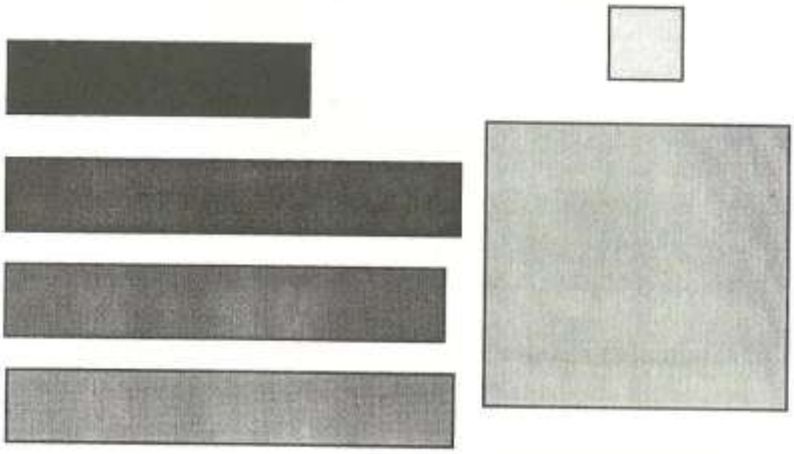
Média geométrica	Média aritmética
$\sqrt{a \times b}$	$\frac{a+b}{2}$
$\sqrt{1 \times 9} = \sqrt{9} = 3$	$\frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$\sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$	$\frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\sqrt{50\times 2}=\sqrt{100}=10$ $\frac{50+2}{2}=\frac{52}{2}=26$

Os números da coluna da esquerda são menores do que os números da coluna da direita. Será que isto ocorrerá sempre ?

Vamos mostrar que isto é sempre verdadeiro através do seguinte quebra-cabeças:

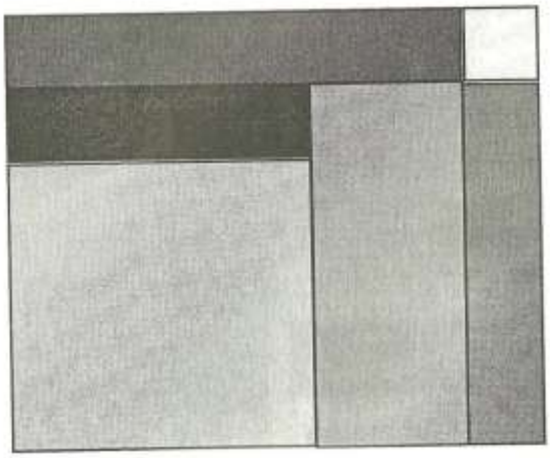
Foi pedido que montassem um quadrado utilizando todas as peças do quebra-cabeças.



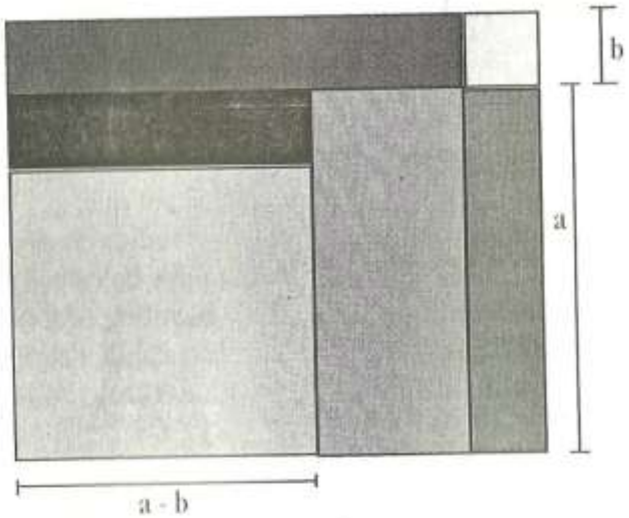
Sobrepondo as figuras os alunos concluíram que:

O lado do quadrado maior tem a mesma medida de um dos lados do retângulo menor; o retângulo maior tem um dos lados com a mesma medida do lado do quadrado menor e que , se eu sobrepuser o retângulo e o quadrado menores no retângulo maior eles se encaixam perfeitamente, isto é, a área do retângulo maior é igual à soma das áreas do retângulo e do quadrado menores.

A figura ficou assim:



Foram atribuídas as seguintes medidas:



Sendo assim:

O quadrado formado pelas seis figuras tem área $(a+b)^2$.

Como a figura é formada por um quadrado de área $(a-b)^2$ e quatro retângulos de área ab (pois, como vimos, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas do retângulo e do quadrado menores), podemos escrever , desde que a b , que:

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

Ora, se $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ então $(a+b)^2 > (a-b)^2$ e $(a+b)^2 > 4ab$.

$$4ab < (a+b)^2$$

$$ab < \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\sqrt{ab} < \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

Vamos calcular a raiz quadrada de 120 usando esta desigualdade.

Podemos escrever 120 como um dos seguintes produtos :

120 = 1 . 120

120 = 2 . 60

120 = 3 . 40

120 = 6 . 20

120 = 10 . 12

$$\sqrt{120}=\sqrt{1\times 120}<\frac{1+120}{2}=\frac{121}{2}=60,5.$$

$$\sqrt{120}=\sqrt{3\times 40}<\frac{3+40}{2}=\frac{43}{2}=21,5.$$

$$\sqrt{120}=\sqrt{6\times 20}<\frac{6+20}{2}=\frac{26}{2}=13.$$

$$\sqrt{120}=\sqrt{10\times 12}<\frac{10+12}{2}=\frac{22}{2}=11.$$

Porém , como não temos mais fatores inteiros e como nada nos obriga a considerar só fatores inteiros , podemos ainda escrever :

$$\sqrt{120}=\sqrt{\frac{120}{11}\times 11}<\frac{\frac{120}{11}+11}{2}=\frac{\frac{241}{11}}{2}=\frac{241}{22}\cong 10,95\cdot$$

Repetindo o processo , temos :

$$\sqrt{120}=\sqrt{\frac{120}{10,95}\times 10,95}<\frac{\frac{120}{10,95}+10,95}{2}\cong 10,95\cdot$$

Como o resultado não variou , podemos concluir que :

$$\sqrt{120}\cong 10,95\cdot$$

Não precisaríamos fazer tantos cálculos se tivéssemos começado pelos fatores inteiros cuja diferença é a menor possível (no caso 10 e 12).

Agora vamos calcular a raiz quadrada de 51 , usando o mesmo processo:

$$\sqrt{51} = \sqrt{3 \times 17} < \frac{3+17}{2} = 10.$$

$$\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{10} \times 10} < \frac{\frac{51}{10} + 10}{2} = 7{,}55\cdot$$

$$\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{7{,}55} \times 7{,}55} < \frac{\frac{51}{7{,}55} + 7{,}55}{2} \cong 7{,}15\cdot$$

$$\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{7{,}15} \times 7{,}15} < \frac{\frac{51}{7{,}15} + 7{,}15}{2} \cong 7{,}14\cdot.$$

$$\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{7{,}14} \times 7{,}14} < \frac{\frac{51}{7{,}14} + 7{,}14}{2} \cong 7{,}14\cdot$$

Sendo assim $\sqrt{51} \cong 7{,}14\cdot$

Para os alunos da 6ª série do 1° grau esta foi uma atividade prazerosa que mais parecia um jogo. Além disso, havia a novidade no uso da calculadora(sem utilizar a tecla da raiz quadrada) e nos trabalhos de grupo.

Os alunos conseguem realizar muito mais do que eles próprios se julgam capazes e muito mais do que nós imaginamos. Dar a cada aluno a chance de sentir prazer em aprender matemática está a grande diferença entre uma aprendizagem mecanizada e pragmatista e uma aprendizagem humanista, exploratória e construtivista.

Bibliografia

Carneiro, José Paulo Q., Cálculo numérico da raiz quadrada. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, nº 27, 2º semestre de 1990

_______, Um processo finito para e raiz quadrada. Revista do Professor de Matemática,São Paulo , nº 34, 2º quadrimestre de 1997

Barone Jr. , Mário, O algoritmo da raiz quadrada. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº 2, 1º semestre de 1983

Tunala, Nelson , Calculo aproximado da raiz quadrada. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº 21, 2º quadrimestre de 1992.

[1] Vera Lucia Fazoli da Cunha Freitas Viana é Mestre em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula e professora de Matemática do 1º, 2º e 3º graus da cidade de Campos dos Goytacazes no estado do Rio de Janeiro.

SEMELHANÇA NA 7ª SÉRIE: ALGUMAS DIFICULDADES

Marcelo Almeida Bairral[1]

1. Introdução

Pretende-se aqui apresentar uma pesquisa realizada durante dois anos numa escola particular de Niterói-RJ, cujo objetivo foi identificar dificuldades apresentadas por alunos de 7ª série (28 alunos com idade entre 12-13 anos), no processo de construção do conceito de semelhança e, a partir desta análise, propor uma intervenção no processo ensino-aprendizagem de matemática.

A importância de se estudar o conceito de semelhança justifica-se pelo fato deste estar relacionado ao cotidiano do aluno através da ampliação e redução de fotos, na construção de maquetes e plantas baixas, em alguns modelos para o conceito de números racionais, etc. As idéias de semelhança estão incluídas em várias partes do currículo escolar e este tópico não pode mais ser trabalhado apenas na 8ª série, nem ficar reduzido apenas ao estudo de triângulos. Tal ensino deve explorar e aprofundar os saberes matemáticos envolvidos (por exemplo, o de proporcionalidade), estabelecer relações com outros saberes e também levar em consideração o desenvolvimento da linguagem do aluno.

Serão apresentadas neste artigo, algumas atividades com as respostas dos alunos/grupos, seguidas da análise das mesmas. Finalizando, destaca-se que a dificuldade dos alunos estava relacionada ao trabalho com as estruturas multiplicativas e, para o professor ressalta-se a importância de refletir constantemente sobre sua prática pedagógica num processo contínuo de ação-reflexão-ação, estabelecendo efetivamente uma relação dialética com o(s) seu(s) alunos(s).

2. O Método

A metodologia escolhida foi a qualitativa e o pesquisador foi o próprio professor da turma. Os alunos trabalharam individualmente, em pequenos grupos e as discussões eram feitas com a turma toda em vários momentos.

Para a análise dos dados obtidos, embasou-se nos recentes resultados de pesquisas em geometria que se referem especificamete ao processo ensino-aprendizagem de semelhança e na perspectiva construtivista de Vygotsky, ao reconhecer a importância da interação entre os sujeitos no processo de construção do conhecimento e, Vergnaud no seu enfoque sobre o trabalho com as estruturas multiplicativas.

Os materiais utilizados foram o TANGRAM, o geoplano, a calculadora e o pantógrafo, uma vez que cada um deles pôde abordar aspectos relevantes da semelhança de figuras. Cada atividade foi organizada e classificada de acordo com o modelo de Schwartz (1989).

Tal classificação engloba: ***objetivos cognitivos*** (abrangem os conceitos envolvidos no desenvolvimento da atividade), ***objetivos técnicos*** (se preocupam com a utilização operacional desses conceitos), ***ferramentas*** (material utlizado como apoio para o melhor desenvolvimento das atividades propostas). O ***tipo***, resulta da classificação em função do fim a que se propõe: atividade de fixação, aprendizagem de conceitos, atividade aberta ou de avaliação. Procurou-se também especificar se a atividade contém questões trabalhando a medida de forma contínua ou discreta. O ***caráter*** nos diz se a atividade desenvolvida foi realizada em aula (individual ou grupo) ou em casa (individual ou grupo).

Os dados foram coletados através de: entrevistas (semi-estruturadas) gravadas com a professora de artes e com os alunos, atividades elaboradas pelo professor ou pelos próprios alunos (individualmente ou em seu grupo), questões seguidas de justificativas por escrito e do "diário de bordo". O "diário de bordo" era o lugar onde o pesquisador fazia as transcrições, observações, etc. De acordo com Powell (1995), para o pesquisador-professor o material escrito pelo aluno como justificação - explicitação do seu processo de pensamento - é fundamental para a retroalimentação. A partir destas informações, o pesquisador-professor pode, então, reelaborar as atividades e reorientar sua prática pedagógica.

Cada conjunto de atividades com o mesmo objetivo chamou-se ***Episódio***, que para facilitar a coleta e a análise dos dados, subdividiu-se em ***Protocolos***. Os Episódios foram: Plantas Baixas, Atividades Complementares: Estrutura Aditiva x Multiplicativa, Circuito de geometria, Figuras Semelhantes, Avaliação do Professor e Auto-avaliações dos Alunos. Para não estender muito o relato, omitiremos as perguntas e respostas feitas individualmente aos alunos na entrevista.

3. Apresentando e comentando algumas atividades

Diversas atividades foram propostas aonde os alunos puderam manipular, discutir, criar e verificar a semelhança de figuras planas, pois através de uma multiplicidade de situações um conceito é melhor aprendido, uma vez que cada uma delas permite a abordagem de aspectos relevantes do conceito.

3.1 plantas baixas

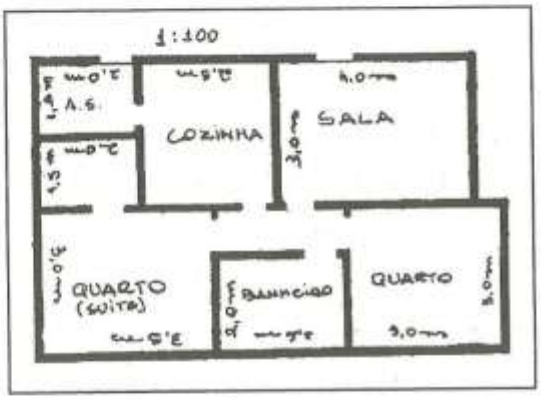


Figura 1

Esta primeira ficha de atividades foi relativa a planta baixa. A idéia foi do professor de matemática, que também era o pesquisador e autor da pesquisa, no sentido de desenvolver junto com a professora de artes um trabalho que explorasse concretamente o conceito de escala. As plantas baixas aparecem diariamente em revistas e jornais diversos, sua utilização também pode permitir a exploração e construção de vários conceitos matemáticos, dentre eles: figuras planas, áreas e perímetros, proporções, sistema métrico decimal e escala.

Na maioria dos livros de matemática do Brasil, o conceito de escala é conteúdo da 6ª série na unidade de razão e proporção, a escala também é um conceito muito utilizado nas aulas de geografia para construção e análise de mapas e, segundo os professores de geografia, os alunos apresentam muita dificuldade em compreender e aplicar tal conceito.

Sendo assim, preferiu-se utilizar a planta baixa como um dos recursos, uma vez que para desenhar uma planta baixa em escalas diferentes de 1:100, o aluno deve perceber que existe uma relação de proporcionalidade entre os segmentos homólogos e a não alteração (congruência) nos ângulos correspondentes; que são os atributos relevantes do conceito de semelhança de figuras planas.

Após o planejamento desta atividade, juntamente com a professora de artes, propôs-se aos alunos que desenhassem uma planta baixa de sua moradia ou de alguma moradia imaginária, utilizando uma escala de 1:100. Desta forma a interação das aulas de Artes e Matemática começava de fato a acontecer. A classificação da atividade foi a seguinte:

Objetivo cognitivo: noções de: escala, redução, unidade de medida de comprimento.

Objetivo técnico: representação gráfica de uma figura através de uma escala.

Ferramentas: material de desenho e calculadora.

Tipo: aprendizagem (construção) de conceitos e trabalhando a medida de forma contínua.

Caráter: sala de aula (individual) e casa (individual).

Tempo: 06 aulas

Primeiramente os alunos fizeram o esboço (rascunho) em papel comum e, logo após, o entregaram 'a professora de artes para fazer as devidas observações (ou correções); em seguida os alunos fizeram o desenho definitivo em papel vegetal.

Como era esperado, o desenho das plantas baixas na escala 1:100 não apresentou dificuldades, pois o que é *metro* no real se transforma em *centímetro* no desenho. O próximo passo agora era desenhar a planta em escalas diferentes (1:50, 1:75, 1:200). Aqui os alunos (7ª série, 1995) apresentaram dificuldades para entender a mudança de escala. Com isso, preferiu-se interromper o trabalho e buscou-se levantar, através de outras atividades, que dificuldades os alunos apresentavam nesse processo de mudança de escalas, conforme veremos a seguir.

3.2 atividade das malas

Esta atividade foi assim classificada.

Objetivo cognitivo: noções de: ampliação e redução, frações e escala.
Ferramentas: cópia da atividade elaborada.
Tipo: aprendizagem de conceitos, abordando a medida de forma contínua
Caráter: sala de aula (grupo).
Tempo: 03 aulas.

Questão: Ampliação e Redução.

Você já deve ter ouvido falar de ampliar e reduzir uma foto. O que acontece com uma figura quando a ampliamos? E quando a reduzimos? O que que muda e o que que fica o mesmo quando ampliamos uma figura?

Figura 2

Algumas respostas dos grupos:

- Quando ampliamos, os detalhes aparecem. Quando reduzimos, não são muito visíveis.

- O tamanho muda mas a forma continua a mesma.
- Quando a ampliamos ela fica maior que o seu tamanho original, e quando a reduzimos ela fica menor que o seu tamanho original. Mas ambas "guardam" suas características originais.
- Ela cresce. Diminui. A forma continua a mesma e o tamanho fica diferente.
- Ela aumenta. Ela diminui. Muda o tamanho, mas a figura é a mesma.
- Ampliamos ⇒ a foto aumenta; Reduzimos ⇒ a foto diminui. O tamanho muda e a forma continua a mesma.

Como pode ser confirmado nas respostas acima, percebeu-se, através desta questão, que de um modo geral os alunos possuiam - ainda que intuitivamente - o conceito de semelhança. Surge, neste contexto, uma das funções primordiais da escola: desenvolver os conceitos que a criança traz consigo, que foram construídos no decorrer de sua vida prática ou nas suas interações sociais. Nesta visão o professor, a partir dos conceitos intuitivos dos alunos, procura estendê-los e formalizá-los através de situações mais complexas. O uso da linguagem natural também é importante para explicitar os *teoremas em ação* (idéias implícitas por trás da solução de um problema) envolvidos no raciocínio do aluno e, também, como instrumento para descrever e analisar o conhecimento intuitivo do aluno.

A próxima pergunta agora era: No exemplo acima, não sabemos de quanto a mala foi reduzida, nem de quanto foi ampliada. Você poderia achar um modo de sabermos isso? Qual?

Algumas respostas dos grupos:

- Sim. A mala foi ampliada 1,6 a mais que a original e foi reduzida 0,5mm a menos que a original.
- Sim. Vendo a diferença de tamanho entre as duas malas com a original.
- Nós temos que multiplicar o que ela cresceu (ou diminuiu) na vertical pelo que ela cresceu (ou diminuiu) na horizontal.
- Sim, medindo-a e fazendo uma escala.

Estas respostas forneceram uma pista do tipo de estrutura de pensamento que estava sendo utilizada pelos alunos, e então levantou-se a hipótese de que eles estariam utilizando as estruturas aditivas (vide as duas respostas iniciais). Os alunos não pareciam pensar, por exemplo, em "quantas vezes" a mala pequena cabe na mala grande e vice-versa. Vergnaud (1983), salienta que as estruturas multiplicativas, embora tenham elementos comuns com as aditivas, diferem delas o suficiente para serem tratadas como um novo campo conceitual, pois, numa estrutura multiplicativa, está pressuposta uma relação de proporcionalidade entre os pares de números correspondentes. Apesar de suas relações com as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas têm peculiaridades e não são redutíveis `as estruturas aditivas.

Nessa questão se o aluno, para saber de quanto a mala foi ampliada (ou reduzida), pensou que é só considerar o seu tamanho original e somá-lo a um certo número ($Tf = Ti + \alpha$), diz-se que ele utilizou a ***estrutura aditiva*** , enquanto que se ele, ao considerar o tamanho inicial verificar que existe um número - coeficiente de semelhança - que expressa "a quantidade de vezes" que a figura foi ampliada ou reduzida ($Tf = \alpha Ti$), diz-se que ele utilizou a ***estrutura multiplicativa***.

Como esta atividade não foi suficiente confirmar esta primeira pista - de que os alunos estavam utilizando a estrutura aditiva - elaborou-se a questão seguinte visando o trabalho com as estruturas multiplicativas, que constou de três segmentos: um original, sua ampliação (em dobro) e redução (na metade), como abaixo.

3.3 Segmentos Proporcionais

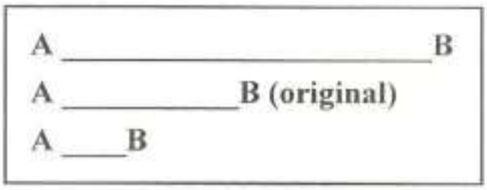


Figura 3

Nesta questão com segmentos proporcionais em "dobro" e "metade", as respostas dos alunos "mais dois centímetros, mais um centímetro" também funcionavam e sendo assim, continua-se a não poder concluir se os alunos utilizavam as estruturas aditivas ou as multiplicativas. Pela resposta dos grupos tudo indicava que eles pensavam utilizando as estruturas aditivas, mas ainda não se podia ter certeza.

Como o conceito de semelhança envolve uma relação proporcional, não fazia sentido trabalhar a sua construção (que os alunos possuíam intuitivamente) sem que os alunos fizessem uso das estruturas multiplicativas, sendo assim elaborou-se "atividades complementares" visando a desenvolver tais estruturas.

Segundo Vergnaud (1989), as atividades para estudar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas nos alunos classificam-se em: **atividades de comparação** (que envolvem estimativas e não se preocupam com a quantificação das razões, apenas com comparações do tipo *"maior que"*, *"menor que"*, *"igual a"*) e **atividades de completar com números que estão faltando** (que envolvem proporções simples e proporções múltiplas). Atividades destes dois tipos foram elaboradas e constituíram o *Episódio 2* de nossa pesquisa. Eis alguns exemplos:

3.4 Ampliando e reduzindo em apenas uma dimensão

Esta atividade objetivou trabalhar mais um aspecto do conceito de escala, entretanto, ampliando e reduzindo um segmento (largura da sala de aula da própria turma), trabalhando assim em apenas uma dimensão.

De acordo com Schliemann(1995, p.160), o desenho em escala talvez constitua uma situação que favorece a compreensão de dois aspectos importantes do modelo matemático em questão: a idéia da existência de uma relação constante entre dois pares de números (ao invés de uma diferença constante, como no caso das estruturas aditivas) e a proporcionalidade entre a dimensão do que é representado e sua representação".

Foram distribuídas folhas de papel milimetrado para cada aluno e se pediu que representassem a largura da sala (5m, aproximadamente) nas seguintes escalas: 1:50, 1:100 e 1:200 (conforme a figura 4 abaixo), indicando todos os cálculos. Após o exercício individual colou-se as respostas de um mesmo grupo numa única folha e pedimos que cada grupo fizesse a(s) devida(s) correção(ões) e observasse as relações entre as diferentes representações.

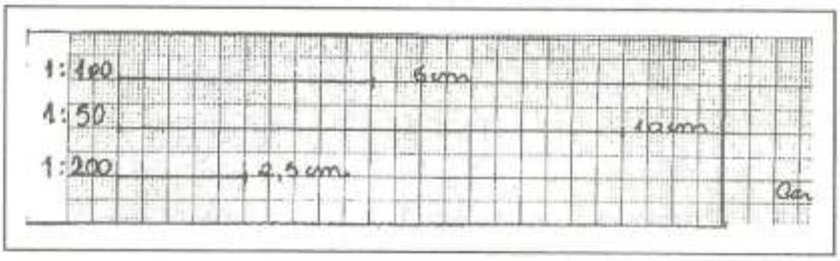


Figura 4

Classificamos esta atividade da seguinte maneira:

Objetivos cognitivos: noções de escalas e frações.

Objetivo técnico: representar um segmento em escalas diferentes.

Ferramentas: papel milimetrado.

Tipo: aprendizagem de conceitos, trabalhando a medida de forma contínua

Caráter: casa (individual) e sala de aula(grupo).

Tempo: 02 aulas.

No primeiro instante os alunos não sabiam como fazer. Percebeu-se mais uma vez que o questionar era uma inovação na sala de aula e resolveu-se, portanto, sugerir alguns caminhos, tais como: *Os cálculos, as indicações e o traçado de cada segmento estão corretos ? Como você pode comparar o tamanho de cada segmento ? Que relação existe entre o tamanho do segmento e a escala utilizada para representá-lo ?*

A dificuldade que os alunos apresentaram também estava ligada 'a dificuldade em escrever suas observações, que revelou dados os quais