sobreentendido na representação conhecida, liberando-nos de suas particularidades e permitindo que nos aproximemos mais da essência dos conceitos.

Temos trabalhado com planejamento curricular deste tipo em vários temas. Um deles foi criar um micromundo que permite representar graficamente funções matemáticas em um par de eixos paralelos (PAR), em lugar dos eixos cartesianos ortogonais tradicionais. Observamos alunos e professores trabalhando com PAR em funções lineares e documentamos situações nas quais uma nova representação força o re-conhecimento e a re-aprendizagem de conceitos sabidos. Esses conceitos estão "confundidos" com as representações conhecidas, e até seus nomes levam o rótulo inconfundível da representação cartesiana: inclinação de uma reta, interseção com os eixos, etc... por isso, quando trabalhamos com uma nova representação surgem perguntas e observações que os enriquecem. Essas experiências estão descritas em Arcavi e Nachmias (1996).

Apresentaremos outro exemplo de uma atividade planejada com esse propósito. O problema (Arcavi 1987) consiste em decifrar e entender o modo empregado pelos antigos egípcios para operar com números inteiros na sua representação particular. O sistema de numeração egípcio consistia nos seguintes símbolos, cuja justaposição permite representar qualquer número inteiro.

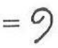
1 = |

1.000 = 

1.000.000 = 

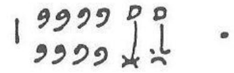
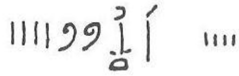
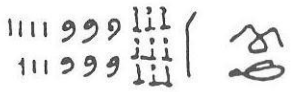
10 = 

10.000 = 

100 = 

100.000 = 

O problema que planejamos consistia em representar o texto hieroglífico fiel ao original do Papiro de Rhind (que é o documento matemático mais antigo que se tem conhecimento, data do século XVII ou XVIII a. C.) e pedir primeiro a tradução dos símbolos para nossa representação.

Versão hieroglífica	Versão decimal	
	1	2 801
	2	----
	4	----
	Total	19 607

Logo, o problema é descobrir e entender que operação foi realizada neste texto, por que a operação está correta e se é possível operar da mesma forma com quaisquer números. Os alunos descobrem, com esforço, que a operação realizada é uma soma de (1 + 2 + 4) vezes o número 2 801, isto é, uma multiplicação (7 x 2 801) para a qual somente necessitamos saber o dobro de um número dado e saber somar, o que é muito simples na representação egípcia e também na decimal. A pergunta sobre a generalização do método gera discussões muito interessantes.

Quarto Exemplo: O Fator de Correção

É muito comum afirmar que todo currículo em Matemática deve conter problemas realistas que permitam usar instrumentos matemáticos para resolver situações da vida diária. De fato, encontramos este tipo de problema em quase todos os livros-texto, porém na maioria das vezes uma observação crítica do mesmo revela que muitos deles são apenas disfarces para os alunos fazerem mais exercícios e sua conexão com o real é totalmente superficial. Desta maneira, a metamensagem desses problemas leva o aluno a perceber a atividade matemática como algo esotérico e artificial. O planejamento e elaboração de problemas realistas deveria estar inspirado em situações que aparecem na vida diária que têm o potencial de despertar o interesse do aluno e que a aplicação de ferramentas matemáticas faça com que o aluno compreenda melhor a complexidade da situação dada.

O problema a seguir surgiu quando minha filha adolescente voltou um dia da escola; neste dia as notas do exame de Matemática (sobre conceito de função e sua representação gráfica) foram baixas; e portanto, a professora decidiu adotar um fator de correção. O fator consistia em extrair a raiz quadrada da nota e multiplicar o resultado por dez. Por exemplo, se nota foi 8,1 o fator a corrigiria para 90 ($10 \times \sqrt{8,1}$). Lamentavelmente esta situação passou desapercebida e inexplorada. Nesta turma ela poderia ter sido usada para enriquecer precisamente o conceito de função. Por exemplo, poderia se investigar:

- Se o fator eleva a nota de todos os alunos.
- Que alunos são mais favorecidos com este fator de correção.
- Se existe algum caso de aluno cuja nota não é corrigida.
- Se existem outros fatores mais ou menos justos, etc...

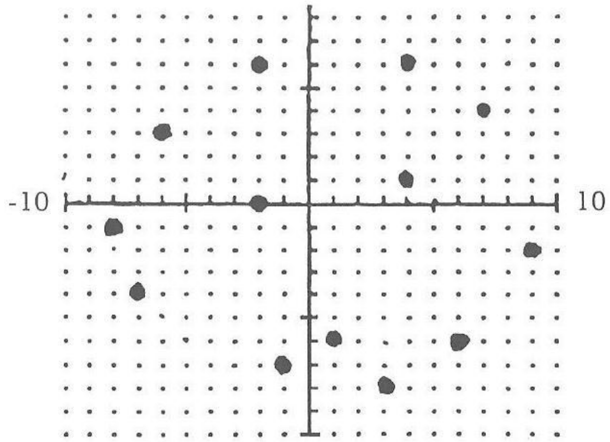
A atividade incluiria a justificação das respostas em forma numérica, gráfica e algébrica. Cabe notar que o conceito de função em suas diversas representações é crucial para entender a fundo esta situação e poder responder aos itens acima listados. Depois de utilizar este problema com alunos e professores e confirmar que promove oportunidades muito ricas de aprendizagem, incorporamo-lo ao nosso currículo.

Neste caso foi uma situação real, surgida na vida diária do aluno, e não uma elaboração artificial, que encontrou seu espaço no currículo. O interesse intrínseco deste problema (pode apresentar-se como um projeto de discussão, para que a turma eleja três ou quatro fatores de correção) e o uso das ferramentas matemáticas faz com que o estudo se converta em significativo, apropriado e motivante. Conceitos abstratos podem aparecer de imediato, como instrumentos para compreender situações concretas.

Alguns afirmam (por exemplo, Papert 1985) que o nosso mundo cotidiano é bastante pobre no que se refere a oportunidades matemáticas, comparado por exemplo a oportunidades de vivenciar fenômenos físicos com aplicações em engenharia simples. Entretanto, existem situações matemáticas, e se buscarmos as encontraremos. São essas situações que deveriam inspirar os problemas reais a serem incorporados no currículo.

Quinto Exemplo: As Bolas Verdes

Bolas Verdes (Green Globes – Dugdale e Kibbey, 1986) é um jogo matemático para microcomputador baseado numa idéia simples mas muito engenhosa. A tela do computador nos mostra um sistema de eixos cartesianos sobre a qual apareceram 13 bolas localizadas em posições aleatórias escolhidas pelo programa cada vez que inicia um novo jogo. O objetivo do jogo é explodir o maior número de bolas possível. A explosão consiste em produzir uma função cujo gráfico passa pelas bolas, pois ao passar por uma bola ela explode. Para se obter o gráfico deve-se introduzir a forma algébrica da função. A figura abaixo é uma cópia da tela no início do jogo.



Com esta disposição, poderíamos tentar uma função linear, uma quadrática, etc... O número de pontos que o aluno pode obter no jogo, cresce exponencialmente, de modo que com a primeira bola explodida obterá 1 ponto, 2 para a segunda, 4 para a terceira, 8 para a quarta e assim sucessivamente. Logo, o jogo instiga que o aluno destrua o maior número de bolas possíveis com uma mesma função.

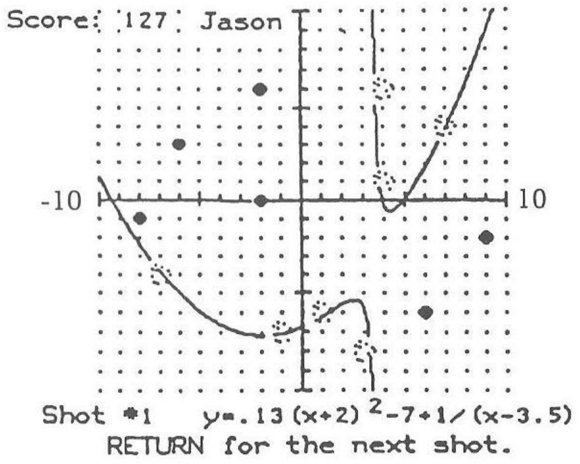
O Que Nos Mostra Este Jogo?

Primeiro, oferece uma possibilidade de fazer gráficos de função com muita facilidade, atenuando o peso da calculeira e do desenhar ponto a ponto, ambos tediosos. No computador, o gráfico é instantâneo, liberando nossas energias para pensar, analisar e argumentar em vez de gastá-las em operar tecnicamente.

Segundo, vejamos os contrastes no tipo de pensamento exigido por este jogo e aquele que é exigido, em geral, durante um curso de Análise Matemática. Tradicionalmente, o exercício mais comum consiste em aplicar algoritmo para estudar as características gráficas de uma função dada na sua forma algébrica, por exemplo, substituições e resolução de equações para descobrir os pontos de interseção com eixos, derivar e igualar a derivada a zero para estudar possíveis pontos extremos, usar o limite para investigar a existência de assíntotas, etc... Neste caso, tratamos do inverso, a construção de uma forma algébrica dadas as características de um certo gráfico construído. Alguém poderia pensar em estabelecer um sistema de equações para encontrar o valor dos parâmetros, mas, em geral, não é este tipo de atividade que este jogo gera. Os trabalhos de observação dos alunos com este jogo, nos mostram formas de pensar mais informais, empíricas, qualitativas e intuitivas nas quais se investiga o rol dos distintos parâmetros, e como eles influem na forma final do gráfico. Por exemplo, no caso da equação de uma reta, muitos alunos começam tratando de visualizar sua inclinação, desenvolvendo habilidades de estimar e, caso a função encontrada não seja a desejada, os alunos trabalham nas correções necessárias da expressão inicial. Este modo informal de pensar desenvolve a intuição e a compreensão de conceitos, que muitas vezes para os alunos são opacos ou estão escondidos por trás dos procedimentos formais.

A situação, a seguir, foi registrada na literatura (Dugda, 1993) como um exemplo do tipo de atividade cognitiva que esse jogo pode promover.

Um aluno, envolvido pelo jogo, se propôs a bater recordes de pontos, tendo obtido uma distribuição de bolas como a indicada na figura anterior, o aluno visualizou uma parábola cuja equação podia criar ($y = 0{,}13\,(x + 2)^2 - 7$). Mas esta parábola só explodiria quatro bolas, aquelas cujos centros estão em (-7,-4), (-1,-7), (1,-6) e (7,4). Seu raciocínio foi o seguinte: "se quiser pegar mais três bolas que estão na posição vertical próximas a reta $x = 3{,}5$, seria necessário que a função continuasse sendo uma parábola em quase todo seu domínio (para poder pegar as quatro bolas anteriores) mas que nas imediações de $x = 3{,}5$ se comportasse como uma vertical, ou quase como uma vertical". Depois de muito investigar, começou a traduzir as características desejadas para o planejamento de uma equação cujo gráfico se comportasse dessa maneira. Ele o fez mediante a adição de um termo racional, que afastado de x = 3,5 não afeta seriamente os valores da função inicial mas nas imediações de x = 3,5 se comporta quase como uma vertical.



Em resumo, este jogo oferece oportunidades de aprendizagem, ao permitir formas de pensamento, que além de não fazerem parte do currículo tradicional, são muito difíceis de surgir em outro contexto. A aprendizagem que resulta neste caso tem a ver com uma conexão entre o formal, o gráfico e o intuitivo. Neste caso, o planejamento da instrução consistiu em criar um microambiente suficientemente amplo e interessante, para possibilitar que os alunos, atuando nesse ambiente, definam e elaborem os problemas em que querem trabalhar. É o aluno quem elege o problema que vai resolver, e é ele que elege o tipo de função que vai utilizar, e quantas bolas ele quer explodir. Se é o aluno que define o problema, o problema lhe pertence, e portanto é provável que a motivação, a inversão de tempo, esforço e recursos a sua disposição tenderá a ser maior, do que com um problema alheio ou definido por um docente. Cabe ressaltar que esta decisão se faz dentro de um marco pre-estruturado e pré-elaborado, que neste caso era o próprio jogo.

Planejamento de Atividades e Problemas: Alguns Princípios

Os anteriores são apenas alguns exemplos que ilustram de que maneira o espírito do construtivismo pode orientar o planejamento de atividades e problemas em Matemática. A lista a seguir, ainda que parcial, é uma tentativa de resumir os princípios básicos para o planejamento que emergem destes exemplos.

Um primeiro princípio para eleição de problemas apropriados descartaria a mera análise lógica, que focaliza o tipo e o número de operações a aplicar na resolução de um problema. A partir desse ponto de vista, muitos problemas podem ser similares, e sem dúvida seu potencial educativo é radicalmente diferente. A eleição de um problema, deveria levar em conta:

- que o aluno possa usar sua experiência prévia, e que haja um convite implícito para aplicar o senso comum
- que seja possível resolver o problema de mais de uma maneira para gerar um diálogo, que conduza a conectar formas diferentes de pensar
- que se chegue à resposta, não apenas através de aplicações mecânicas de algum procedimento de cálculo
- que o problema leve a elaboração de novas perguntas, isto é, que a solução do mesmo desperte a curiosidade e o aluno, por si próprio, em grupo ou com a ajuda do professor, abra a possibilidade de seguir explorando a situação
- que nem sempre haja uma única resposta ao problema
- que a resposta não seja sempre o resultado de uma operação, mas seja a formulação de uma argumentação, uma comparação, uma idéia, uma conexão entre conceitos, uma tradução entre diferentes representações
- que o problema convide o aluno a rever uma idéia, um conceito ou uma operação numa nova representação, para tratar de isolar, na medida do possível, o conceito e separá-lo de suas representações típicas ou usuais
- que haja problemas da vida real, para os quais o uso de ferramentas matemáticas ajude a compreender melhor os fenômenos que nos rodeiam
- que haja micro-mundos planejados por experts para que o aluno que trabalhe nele seja quem decida e reformule que tipo de problema irá resolver.