gráfico de uma função y = f(x) definida em um intervalo [a, b]. Para que a célula infinitesimal *a*, situada na posição genérica P(x, y), percorra todas as células da partição da região $\mathcal{A}$, a variável x deve percorrer o intervalo de a até b e, para cada valor assumido por x, a variável y deve percorrer o segmento de 0 até f(x). Considerando um x qualquer, fixo, a soma dos elementos de área infinitesimais se estende a toda a coluna de largura infinitesimal dx e altura finita f(x). O resultado dessa soma é a área de um retângulo: altura x base = f(x) dx. Como um número finito f(x) vezes um infinitésimo dx é ainda um infinitésimo, f(x) dx é ainda infinitesimal. Por isso é denotado dA e também é chamado elemento de área. Porém, da = dx dy é um infinitésimo de segunda ordem e vai precisar de integração dupla para produzir a área finita A. Já o elemento de área dA é um infinitésimo de primeira ordem e vai precisar apenas de uma integração, (x variando de a até b), para produzir a área A. (Fig. 6)

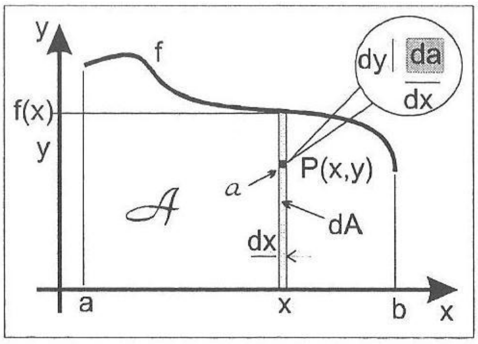

Fig. 6

$$A=\int_{\mathcal{A}}\int dx\,dy=\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=0}^{y=f(x)}dy\right)dx=\int_{x=a}^{x=b}(f(x)-0)dx=\int_{x=a}^{x=b}f(x)dx$$

Assim, para calcular a área de regiões determinadas em coordenadas cartesianas pelo eixo x e o gráfico de uma função y = f(x) definida em um intervalo [a, b] não é necessário usar integral dupla, basta escrever:

$$A=\int_{x=a}^{x=b}dA=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

Às vezes a região $\mathcal{A}$ é determinada pelo eixo y e o gráfico de uma função x = g(y) definida em um intervalo [c, d]. Nesse caso

$A=\int_{x=c}^{x=d} dA=\int_{c}^{d} g(y)dy.$

Exemplo 2

Suponhamos que se queira calcular a área de uma região $\mathcal{A}$ que, em coordenadas polares, fica descrita como a região entre o pólo O e o gráfico de uma função $r = f(\theta)$ definida em um intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ (fig. 5). Para que a célula infinitesimal *a*, situada na posição genérica $P(r, \theta)$, percorra todas as células da partição da região $\mathcal{A}$, a variável θ deve percorrer o intervalo de θ? até θ? e, para cada valor assumido por θ, a variável r deve percorrer o segmento de 0 até $r(\theta)$. Considerando um θ qualquer, fixo, a soma dos elementos de área infinitesimais se estende a todo triângulo de ângulo infinitesimal $d\theta$ e altura finita $r(\theta)$. O resultado dessa soma é a área de um triângulo

$$\frac{\text{altura x base}}{2} = \frac{r(\theta)\, r(\theta)\, d\theta}{2} = \frac{1}{2} r^2(\theta)d\theta$$

Como um número finito $r(\theta)$ vezes um infinitésimo $d\theta$ é ainda um infinitésimo, $r(\theta)\, d\theta$ é ainda infinitesimal. Por isso é denotado dA e também é chamado elemento de área. Porém, $da = r\, dr\, d\theta$ é um infinitésimo de segunda ordem e vai precisar de integração dupla para produzir a área finita A. Já o elemento de área dA é um infinitésimo de primeira ordem e vai precisar apenas de uma integração, (θ variando de θ_1 até θ_2), para produzir a área $\mathcal{A}$. (Fig. 7)

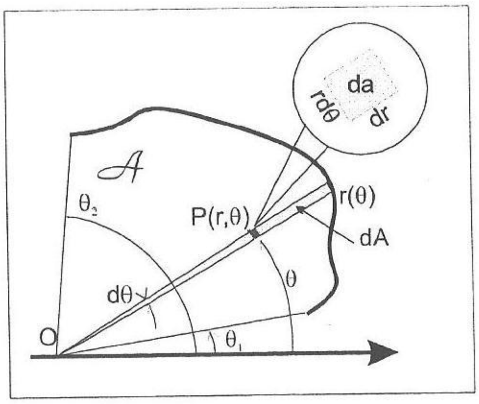

Fig. 7

$$A=\int_{\mathcal{A}}\int r\ dr\ d\theta=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\left(\int_{r=0}^{r=r(\theta)} r\ dr\right)d\theta=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{r(\theta)}d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

Assim, para calcular a área de regiões determinadas em coordenadas polares pelo pólo O e o gráfico de uma função $r = f(\theta)$ definida em um intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ não é necessário usar integral dupla, basta escrever:

$$A=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}dA=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

Muito raramente região $\mathcal{A}$ pode ser descrita em coordenadas polares como compreendida entre o eixo e o gráfico de uma função $\theta = \theta(r)$. Nesse caso, somando-se os elementos de área da correspondentes a um mesmo valor de r, tem-se a área de um segmento de coroa circular de espessura dr e comprimento r θ (r) (raio vezes ângulo medido em radianos). Esse será um novo elemento de área dA de ordem 1, enquanto da era de segunda ordem. A área total será obtida integrando dA desde $r = r_1$ até $r = r_2$. (Fig. 8)

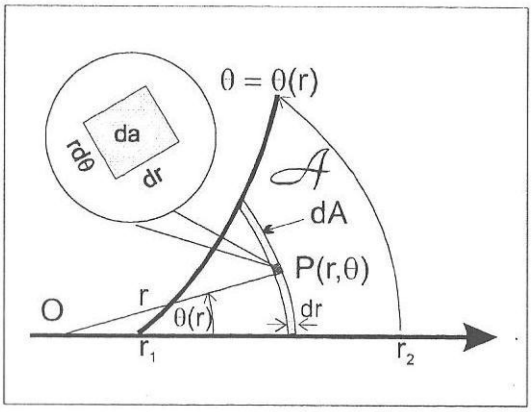

FIG. 8

Assim:

$$A=\int_{\mathcal{A}}\int r\ dr\ d\theta=\int_{r=r}^{r=r}\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\theta(r)}d(\theta)\right)r\ dr=\int_{r=r}^{r=r}\theta(r)\ r\ dr=\int_{r=r}^{r=r}dA$$

Minha experiência mostra que os alunos tendem a preferir esse método infinitesimal para justificar os cálculos sobre "aplicações da integral definida" que faz parte dos livros textos e que vão, além do cálculo de áreas planas, ao cálculo de áreas de superfícies de revolução, de trabalho mecânico, de pressão hidrostática, etc. Diante do método infinitesimal as somas de Riemann parecem desajeitados e desnecessariamente complicadas.

É engraçado que alguma vez se tenha rido disso.

Bibliografia

BALDINO, R. R. *Desenvolvimento de Essências de Cálculo infinitesimal.* Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1998.

HARTHONG, J. *L'analyse non-standard. La Recherche*, 1983, No 148, p. 1194-1201.

HODGSON, B. *Le calcul infinitésimal.* Selected Lectures 7th ICME, Robitaille et al (Eds.) Québec: Université Laval, 1994, p. 157-170.

LASSANCE, E. de M. M. *Curso de Cálculo.* Porto Alegre: UFRGS, Centro dos Estudantes Universitários de Engenharia (C.E.U.E.).

HEGEL, G.W.F. *La Phénoménologie de l'Esprit.* Paris: Aubier. V.I, 1941.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com Geometria Analítica.* McGraw-Hill do Brasil, 1983.

...E em Matemática, Nós Que Ensinamos, o Que Construímos?

Abraham Arcavi
Tradução / **Janete Bolite Frant**

Resumo

Propomos uma perspectiva construtivista para o planejamento do ensino de Matemática. Sugerimos alguns princípios básicos para este planejamento que levem em conta a capacidade dos alunos de dar sentido e procurarem um entendimento significativo em lugar de sugerir a decomposição de habilidades básicas para a graduação dos conteúdos, e do planejamento de problemas e atividades que visam um desempenho competente. Propomos, ainda, que baseado numa perspectiva construtivista, a engenharia curricular se comprometa seriamente com a prática em sala de aula, para poder planejar os apoios necessários para uma construção significativa da aprendizagem.

Neste artigo descrevo alguns princípios de planejamento curricular segundo uma perspectiva construtivista e um campo específico do conhecimento.

Delimitação a um Campo do Conhecimento: Matemática

Minha profissão é a Educação Matemática, que é a disciplina (ou talvez a interdisciplina) que se ocupa de entender os processos de aprendizagem e ensino de Matemática e também o processo de planejamento de materiais curriculares. Acredito que a Matemática, como todo o campo de conhecimento humano, tem certas especificidades que merecem um tratamento em separado. Talvez o que expomos neste artigo possa ser transferido de forma geral a outros campos do conhecimento, mas sem dúvida alguma deveremos ter cuidado com as características próprias desses campos.

Escolha Teórica: Construtivismo

Hoje em dia todos (ou quase todos) somos construtivistas. O problema é que cada um de nós constrói esta postura de maneiras muito distintas. E essa Babel de teorias, crenças ou ideologias que se refugiam sob um mesmo vocábulo, vai além da clássica distinção entre construtivismo "brando" *versus* construtivismo "radical" (Kilpatrick 1987, Schoenfeld 1992a). Um sem fim de matizes, nem sempre visíveis "a olho nu", fazem com que haja tantos construtivismos quanto construtivistas declarados. Através de exemplos e episódios no restante deste artigo, estes pontos ficarão mais claros. Quero acrescentar somente que minha perspectiva se fortalece da observação sistemática das atitudes dos alunos durante a resolução de situações que atestam, ao meu ver, mudanças nas suas estruturas cognitivas mostrando um processo riquíssimo de construção e reconstrução progressiva de idéias e concepções (veja por exemplo, Schoenfeld, Smith e Arcavi 1993).

Reinvidicação e Revisão da Prática Curricular e Docente

Acredito firmemente que o conhecimento acumulado em experiências de campo (ensino na sala de aula, preparação de textos de estudo), acompanhado de um processo de reflexão e análise guia, ou deveria guiar, os trabalhos de investigação e as elaborações teóricas. Esta é a filosofia de trabalho do grupo de Matemática do Departamento de Ensino de Ciências do Instituto Weizmann, do qual sou membro e de onde sou formado. Este grupo vem trabalhando com planejamento curricular, formação de docentes em serviço, e investigação pedagógica-cognitiva há mais de 25 anos. O trabalho se baseia na integração desses três componentes de tal modo que o resultado de um enriquece e nutre os outros dois num ciclo de refinação e realimentação (Dreyfus, Hershkowitz e Bruckheimer 1987). Parte do que apresentarei aqui foi sendo gerado, prática e intelectualmente durante 15 anos de trabalho neste grupo.

Em resumo, a perspectiva de Educação Matemática segundo a qual escrevo, integra a experiência de campo com a reflexão e a observação sistemática que caracteriza a pesquisa cognitiva.