cultura foi alimentada pela sebenta. "Assim vemos que a derivada da área é igual a f(x), dada, portanto a determinação da área de um trapezóide depende da resolução do seguinte problema: dada uma função f(x) procurar uma função F(x) tal que sua derivada seja a função dada" [Lassance, 19.?: 306]. Ou seja, a demonstração de que a área é uma tal primitiva não basta para dizer que a primitiva foi encontrada; ainda é preciso "procurá-la", isto é, achar uma "função" no sentido de Euler, uma fórmula. Enquanto essa função não é achada, é preciso acrescentar: "Admitiremos, no que se vai seguir, que toda função contínua tem integral indefinida" [Lassance, 19.?: 308]. É por isso, também, que a "integral definida é uma função de seus limites e, portanto, um número", ou seja, para cada valor dos limites tem-se um número, é uma função no sentido moderno, de Cantor. Porém "a integral indefinida, é função de x", ou seja, uma "expressão" na variável x, uma função no sentido de Euler.

Suponhamos que, decidido a descobrir por que a integral definida é a área, o aluno resolva olhar a demonstração do Swokowski [1983]. Ele acha óbvia a segunda parte do teorema. Pensa: Uma vez que as primitivas diferem por constante, qualquer primitiva vai me dar o mesmo resultado para F(b) - F(a). Mas... o que isso tem a ver com a área? Na demonstração da primeira parte o autor apenas declara que a integral é a área e não fala mais disso. O aluno volta, então, dois parágrafos atrás onde há várias figuras de áreas sob gráficos de funções, aproximações por retângulos mas, em vez de uma explicação de porque a integral definida é a área, ele encontra uma definição. "Definimos a integral definida como limite de uma soma (...)" [Swokowski, 1983: 343]. Definir a integral definida lhe parece uma redundância. Mas, como definições e axiomas não se discutem, ele aceita. Isso significa, pensa ele, que a integral definida que eu conheço como F(b) - F(a) pode ser descrita de maneira completa, sem deixar dúvidas, como limite dessas somas de áreas de retângulos. Mas, por que ela pode ser definida assim?

O autor não estava esperando esse comportamento do aluno. O aluno que o texto pressupõe não é o aluno real, é um aluno imaginário. O autor espera que, o aluno seja capaz de suspender a cultura em que vive e ler o livro linearmente, como se estivesse vazio de qualquer concepção e fosse aos poucos sendo preenchido pelo que é dito ali. Ele espera que o aluno diga: Seja lá o que for que eu tenha entendido sobre integral definida, é preciso que eu esqueça e me conforme a esta definição: a integral definida é apenas o número que resulta deste limite. É por puro capricho dos matemáticos que ela é anotada desse modo complicado. É preciso que eu entenda também que não se trata do limite de uma função usual, por isso o autor teve de escrever que "limite" aqui, "significa" esse jeito complicado de falar "dado épsilon existe delta..." Então a integral definida é a área e o teorema diz que a derivada da área é a própria função, ou seja, a área é uma primitiva. Como as variações de quaisquer primitivas coincidem, a variação da área pode ser calculada pela variação de qualquer primitiva. Por isso eu posso calcular a área sob a parábola pela variação da primitiva $x^3/3$.

Ora, um aluno capaz de suspender suas crenças anteriores, capaz de encarar as definições como estipulações e capaz de desenterrar a idéia suporte do teorema a partir do livro, já não é aluno, é professor. Então, cabe perguntar: para quem o livro foi escrito? Não foi para os alunos que o autor o escreveu: foi para o matemático-professor, aquele que vai recomendá-lo ao editor para que o livro seja vendido. A preocupação com o rigor weierstrassiano do autor torna o livro um instrumento à prova de aprendizagem. Está escrito para quem não precisa aprender com ele.

Há quase duzentos anos Hegel já denunciava essa manha da Matemática:

> *"Aliás, o defeito específico desse conhecimento se refere tanto ao próprio conhecimento quanto à sua matéria, em geral. — No que concerne ao conhecimento, nós não nos damos conta, de início, da necessidade da construção. Ela não resulta do conceito do teorema, mas ela lhe é imposta e devemos obedecer cegamente a receita de traçar estas linhas particulares, quando poderíamos traçar uma infinidade de outras, tudo isso com uma ignorância igual somente à crença que isto será adequado à produção da demonstração. Tal conformidade com a meta se manifesta mais tarde, mas ela é apenas exterior, porque na demonstração ela se mostra somente a posteriori. Assim, a demonstração segue uma via que começa em um ponto qualquer, sem que se saiba ainda a relação desse começo com o resultado que daí*

dever surgir. O decurso da demonstração comporta tais determinações e tais relações e afasta outras sem que possamos nos dar conta, imediatamente, segundo qual necessidade isso ocorre; uma finalidade exterior rege um tal movimento" [Hegel, 1941: 37].

Então, qual a saída? Quando estávamos, há 40 anos, rindo dos infinitésimos dos cursos de Cálculo, não sabíamos que um matemático, nascido na Alemanha mas exilado na Inglaterra, Israel e, depois, nos Estados Unidos, estava às voltas com uma teoria de modelos que terminou gerando, quase como subproduto, uma fundamentação rigorosa (no sentido de Weierstrass) dos infinitésimos. Resumidamente, é o seguinte. Na construção dos reais como classes de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais, identificam-se as seqüências de racionais que terão, depois, o mesmo limite nos reais. Para a construção dos hiper-reais, que conterão, além dos reais, números infinitos e infinitesimais, identificam-se seqüências de reais por um critério mais forte, de modo que as classes de eqüivalência ficam menores. Cada classe de eqüivalência será um número hiper-real. Por exemplo, as seqüências $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{2n}$ não serão identificadas e pertencerão a duas classes de eqüivalência distintas, que serão dois infinitésimos distintos. Nesse contexto, o aluno que diz que $0{,}999 < 1$ está rigorosamente certo. Mais ainda, o que diz que $0{,}\overline{9} < 0{,}\overline{99} < 1$ também está! Não há motivo, portanto, para evitar infinitésimos nos cursos de Cálculo. Os cursos de Análise que se desenvolvem depois é que terão a incumbência de fundamentá-los. Portanto, além dos cursos de Análise Real, as instituições devem oferecer cursos de análise não standard. Ver Hodgson [1994].

O que importa, em um curso de cálculo, é desenvolver o pensamento diferencial que pode ser conceituado nos seguintes termos: é a preferência por justificar a avaliação de grandezas através da integração de uma decomposição infinitesimal. É a idéia originada com Cavalieri e explorada sistematicamente por Leibniz, idéia que os físicos nunca abandonaram. No espaço deste artigo só será possível apresentar o pensamento diferencial aplicação ao caso do cálculo de áreas de superfícies planas. Um demonstração infinitesimal do teorema fundamental do cálculo poderá se encontrada em Baldino (1998).

Suponhamos que se queira estudar uma região plana $\mathcal{A}$ que é parte do "mundo físico". Primeiro adotam-se um sistema de coordenadas e uma métrica. Isso significa que:

1 - A cada ponto P da região ficam associados dois números, chamados as coordenadas de P;

2 - A cada dois pontos P e Q da região fica associado um número, chamado distância de P a Q.

Suponhamos que, as coordenadas de P são a e b e as coordenadas de Q são c e d. Então, se a distância entre P e Q, medida no terreno, coincide com o número calculado pela fórmula: $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$ dizemos que foi adotado um sistema de coordenadas cartesianas. Costuma-se usar duas retas, chamadas eixos, para representar o lugar geométrico dos pontos que têm uma das coordenadas nula. Também costuma-se anotar as coordenadas por x e y. (Fig. 1)

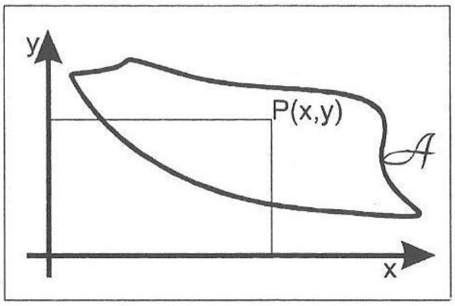


FIG. 1

Suponhamos que as coordenadas de P são a e b e as coordenadas de Q são c e d. Então, se a distância entre P e Q, medida no terreno, coincide com o número calculado pela fórmula $\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos (b- c)}$, dizemos que foi adotado um sistema de coordenadas polares. Costuma-se representar por uma reta (eixo) o lugar geométrico dos pontos que têm a segunda coordenada igual a zero ou P. O lugar geométrico dos pontos que têm a primeira coordenada nula é representado por um ponto do eixo, O (pólo). Os lugares geométricos dos pontos que têm a primeira coordenada constante, não nula, são representados por circunferências centradas em O. (Fig. 2)

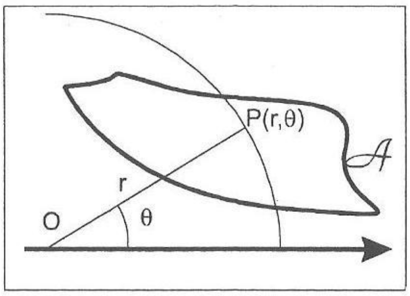


FIG. 2

Para calcular a área A da região $\mathcal{A}$, imagina-se a região dividida em células infinitesimais a de área da. As áreas infinitesimais da chamam-se elementos de área. Imagina-se que área A da região é o resultado da soma de infinitas parcelas infinitesimais da. Para representar a soma infinita usa-se o símbolo $\int$, uma letra s (esse) alongada que se lê "integral". Então A = $\int_{\mathcal{A}}^{da}$ (leia: área igual a integral de da estendida a $\mathcal{A}$) (Fig. 3) .

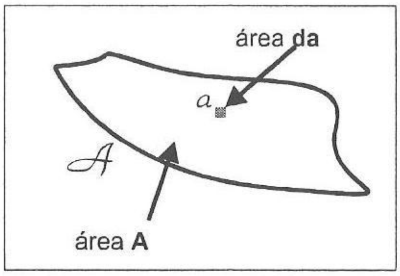
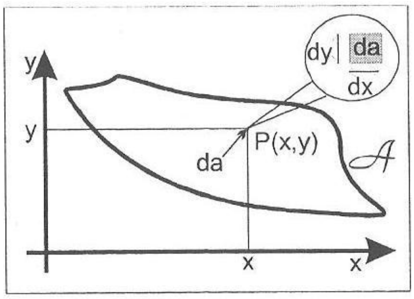


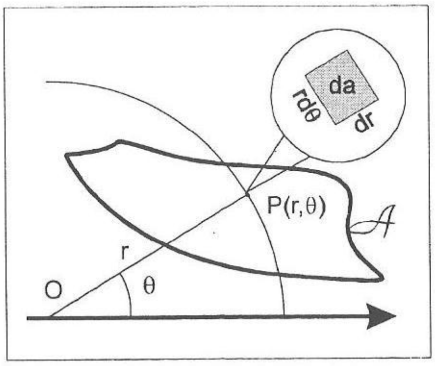
FIG. 3

Suponhamos que tenha sido adotado um sistema de coordenadas cartesianas. A partição da região $\mathcal{A}$ em células infinitesimais é obtida a partir de partições infinitesimais dos domínios das coordenadas x e y. Cada célula infinitesimal fica caracterizada pelas coordenadas x, y do ponto P ao redor do qual ela se situa. Ampliando a célula com um microscópio de poder infinito (parte superior direita da figura) vê-se que a célula tem a forma de um retângulo infinitesimal de lados dx e dy. Portanto: em coordenadas cartesianas, o elemento de área é da = dx dy. A área total da região $\mathcal{A}$ fica sendo então A= $\int_{\mathcal{A}}\int$ dx dy onde o sinal de integral é duplicado para lembrar que se deve descrever a região $\mathcal{A}$ especificando os domínios das variáveis x e y. (Fig. 4)



Fɪɢ. 4

Suponhamos que tenha sido adotado um sistema de coordenadas polares. A partição da região $\mathcal{A}$ em células infinitesimais é obtida a partir de partições infinitesimais dos domínios das coordenadas r e θ. Cada célula infinitesimal fica caracterizada pelas coordenadas r, θ do ponto P ao redor do qual ela se situa Ampliando a célula com um microscópio de poder infinito (parte superior direita da figura) vê-se que a célula tem a forma de um retângulo infinitesimal de lados dr e r dθ. Portanto: em coordenadas polares o elemento de área é $da = r\,dr\,d\theta$ (Lembre que o comprimento de um arco de circunferência vale o raio vezes o ângulo medido em radianos: $ds = r\,d\theta$.) A área total da região $\mathcal{A}$ fica sendo então $A = \iint_{\mathcal{A}} r\,dr\,d\theta$ onde o sinal de integral é duplicado para lembrar que se deve descrever a região $\mathcal{A}$ especificando os domínios das variáveis r e θ. (Fig. 5)



Fɪɢ. 5

Exemplo 1

Suponhamos que se queira calcular a área de uma região $\mathcal{A}$ que, em coordenadas cartesianas, fica descrita como a região entre o eixo x e o