a calculadora; senão, ele não terá motivação para aprender tal algoritmo".

Na realidade, o exemplo aqui tratado mostra que nós, professores, temos é que exercer nossa criatividade para criar problemas desafiadores, que coloquem em cheque até mesmo a calculadora, deixando claras as suas limitações, ao invés de proibir o uso da calculadora, o que é uma atitude antipática, repressora, e totalmente contrária ao que um aluno espera de um professor de Matemática. De fato, para um leigo ou iniciante em Matemática, nada mais "matemático" do que uma calculadora, e ele espera que um professor vá iniciá-lo ou ajudá-lo com essa ferramenta, e não proibi-lo de usá-la.

Note-se também que, mesmo usando o algoritmo tradicional da divisão, como fizemos, a calculadora permanece útil para efetuar as multiplicações e subtrações envolvidas no processo, minorando as possibilidades de erro, e poupando trabalhos repetitivos e inúteis.

2 - O trabalho de divisão ficaria simplificado, se tivéssemos observado que o divisor 1485 tem o fator comum 5 com a base do sistema decimal (um detalhe nem sempre lembrado). Deste modo:

$$\frac{1292}{1485}=\frac{1292}{5x297}=\frac{1}{10}x\frac{2584}{297}=\frac{1}{10}x\left(8+\frac{208}{297}\right)=0{,}8+\frac{1}{10}x\frac{208}{297}$$

$$=0{,}8+0{,}0\overline{70336}=0{,}8\overline{700336}\text{, pois:}$$

$$\begin{array}{llllllll|l}
2 & 0 & 8 & 0 & & & & & 297 \\ \cline{9-9}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0{,}70336 \\
 & & & & 1 & 0 & 9 & 0 & \\
 & & & & & 1 & 9 & 9 & 0 \\
 & & & & & & 2 & 0 & 8
\end{array}$$

Os números envolvidos no algoritmo da divisão ficam menores.

3 - Existiria um outro método para encontrar uma representação decimal de $\frac{208}{297}$ (ou de $\frac{1292}{1485}$, mas já vimos que basta o primeiro), que não fosse o algoritmo tradicional da divisão? A resposta é sim.

Basta tomar as sucessivas potências de 10, a saber: 10, 100, etc., até que encontremos uma que deixe resto 1, quando dividida por 297. Não é difícil fazer isto, experimentando com a calculadora:

$10^3=3 \times 297+109$; $10^4=33 \times 297+199$;
$10^5=336 \times 297+208$ $10^6=3367 \times 297+1$

A partir daí, obtém-se: $\frac{1}{297}=3367 \times \frac{1}{10^6-1}$, e portanto:

$$\frac{208}{297}=208 \times 3367 \times \frac{1}{10^6-1}=700336 \times \frac{1/10^6}{1-1/10^6}=\frac{700336}{10^6}$$

$$\left(1+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{12}}+\cdots\right)=0{,}700336700336700336\ldots=0{,}\overline{700336},$$

onde a última passagem vem da propriedade das progressões geométricas infinitas:

$$1+q+q^2+\ldots=\frac{1}{1-q}, \text{ quando } -1<q<1.$$

Observe que o período da dízima tem comprimento 6, que é justamente o expoente da menor potência de 10 que deixa resto 1, quando dividida por 297.

4 - Pode-se perguntar: como temos certeza de que, ao testar as potências de 10, vamos acabar encontrando uma que deixe resto 1, quando dividida por 297? A resposta está em um famoso teorema de aritmética ("Teoria dos Números"), devido a Euler: "quando os inteiros a e n são primos entre si, então $a^{\varphi(n)}$ deixa resto 1, quando dividido por n". Aqui, $\varphi(n)$ representa o número de inteiros positivos menores que n e primos com n. No presente caso, 297 e 10 são primos entre si (para isto, foi importante antes retirar o fator 5), e $\varphi(297) = 180$. Portanto, pelo Teorema de Euler, 10^{180} deixa resto 1, quando dividido por 297.

Mas isto não quer dizer que 180 seja o menor expoente para o qual isto acontece. De fato, como vimos, isto já ocorre para 6, que é um divisor de 180. De um modo geral, bastaria experimentar como expoentes os divisores de 180. Por que tem que ser um divisor de 180? Porque se m for o menor inteiro positivo tal que 10^m deixa resto 1, quando dividido por 297, então, dividindo 180 por m, obtém-se: $180=qm+r$, onde

$0 \leq r < m$. Mas então: $10^{180} = (10^m)^q \times 10^r$, o que acarretaria que 10^r também deixaria resto 1, quando dividido por 297, o que só é possível se $r = 0$, pela definição de m.

E como se sabe que $\varphi(297) = 180$? Bom, pode-se contar um a um os inteiros positivos menores que 297 e primos com 297, a saber: 1, 2, 4, 5, 7, etc., até 296, e verificar que são 180. Mas é claro que Euler não concordaria com isto. É um exercício não trivial de Aritmética mostrar que, quando o natural n se decompõe em fatores primos na forma $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, então: $\varphi(n) = p_1^{n_1-1}(p_1-1)\, p_2^{n_2-1}(p_2-1) \ldots p_k^{n_k-1}(p_k-1)$. No nosso caso: $\varphi(297) = \varphi(3^3 \times 11) = 3^2(3-1) \times 11^0(11-1) = 180$.

Os fatos citados nesta última seção estão entre os mais curiosos da Teoria dos Números, e podem ser encontrados em qualquer compêndio sobre o assunto. Teremos atingido nosso objetivo, se tivermos conseguido aguçar a curiosidade do leitor para saber porque funcionam estas propriedades, e para conhecer suas inesperadas aplicações, como, por exemplo, à Criptografia, muito em voga atualmente devido à necessidade de segurança em senhas bancárias e da Internet (veja S.C.Coutinho, Números Inteiros e Criptografia RSA, IMPA-SBM, Série de Computação e Matemática, 1997).

Infinitésimos: Quem Ri Por Último?[1]

Roberto Ribeiro Baldino

Quando ingressei na Escola de Engenharia da UFRGS (então URGS) em 1956, ainda não haviam inventado o xerox. As apostilas eram tratadas com carinho e passadas todos os anos de veteranos a calouros. Ficavam amareladas e eram chamadas sebentas. "Herdei" a sebenta de cálculo de meu irmão que fizera o curso alguns anos antes. Ali encontrava frases que não entendia: "(...) uma integral definida é uma função de seus limites e, portanto, um número, enquanto que a indefinida, como vimos, é função de x." [Lassance, 19.?: 404]. Derivadas apareciam no capítulo IV que era precedido por um parágrafo sobre ordens de grandeza de "infinitésimos e infinitos". Na sebenta, infinitésimos eram definidos como funções com limite zero, mas nas aulas práticas este conceito era reforçado com explicações assim: "Um infinitésimo é uma variável que tende a zero, porém, tomada no momento em que se anula". Essas explicações me deixavam confuso. Muitos colegas desistiam de entender e partiam para decorar tudo. Eu procurava meu caminho construindo um matagal de modelos locais, com fraco relacionamento entre si.

Em 1958 o Presidente Juscelino criou institutos básicos associados às universidades e em 1959-60 tivemos uma turma de bolsistas fazendo um curso de Análise Matemática com o Professor Ernesto Bruno Cossi. A referência básica era o livro de Análise de Apostol, recém editado. As primeiras palavras do Professor Cossi foram: "Suporemos conhecidas as propriedades dos números racionais". Em seguida escreveu: "Definição: Um corte de Dedekind é...". Na terceira ou quarta aula, ele disse algo assim: "Sejam números racionais os cortes racionais". Aquilo me deixou espantado. Como pode um corte ser um número? Porém,

[1] Artigo apresentado em Palestra no VI ENEM, 21-24 de julho de 1998, São Leopoldo, RS, UNISINOS.

durante as férias de julho decidi estudar tudo com muito cuidado. Lembro-me do momento em que me dei conta de que havia um único princípio lógico regendo as relações entre os modelos locais que eu armara. As definições perderam o caráter de descrições e adquiriram o caráter de estipulações; a Matemática passou a fazer sentido. Daí em diante, tudo tinha de ser rigorosamente definido e demonstrado.

Ente os bolsistas comentávamos com malícia e, às vezes, com maldade, sobre o curso de Cálculo que tínhamos tido alguns anos antes. Infinitésimos? Ha ha ha... Isso não existe. Entre o zero e os positivos nada há. A linha reta é feita de números reais. Infinitésimos são coisas do passado, incoerentes, não têm sentido. Uma integral não é uma soma de infinitas parcelas infinitesimais. É heresia perscrutar o símbolo $\int_a^b f(x)dx$. O dx é apenas um artifício gráfico para facilitar a troca de variáveis; tem o mesmo estatuto da chave que se coloca sob o divisor nas contas de dividir. A teoria de Weierstrass tinha se tornado nosso modo de pensar. Tudo tinha de ser expresso em termos dela.

Entretanto, nos livros de Física, especialmente nos de Mecânica do Contínuo, lá estavam os deslocamentos dr, infinitamente pequenos, os elementos infinitesimais de tempo, área e volume. Não pode, pensava eu. Isso tem de ser entendido de outro jeito. No IMPA aprendi que o dx era uma forma diferencial. Debruçava-me sobre livros matemáticos que desenvolvem construções "rigorosas" para a mecânica analítica e mecânica do contínuo. Lá o d denota a diferencial de uma função entre variedades. Mas dr? Diferencial de quê? Custei muito a descobrir que o infinitésimo dr é a diferencial de uma carta de uma variedade riemaniana. Os autores de Física e de Matemática não reconhecem, um, a problemática do outro.

"É assim que, desde há um século e de maneira ainda mais flagrante, desde há quarenta anos o divórcio se consumou: de um lado os matemáticos puros que perseguem seus próprios problemas pelas nuvens e, de outro, os físicos que, ignorando d'Alembert e sobretudo Weierstrass, continuam a praticar o cálculo dos infinitamente pequenos, troçando desse rigor matemático, a seus olhos puramente ideológico" [Harthong, 1983: 1194].

Como esse divórcio se reflete na Educação Matemática? Como se pode atenuar seus efeitos?

Os alunos continuam a pensar como os físicos. Acham que 0,999... é menor que um e, quando descrevem o que pensam, embora sem usarem o termo, indicam que vêem ali uma diferença infinitesimal. Outra aluna me disse que o limite de 1/n quando n tende ao infinito é muito pequeno, mas não e zero; "é zero vírgula zero, zero, zero..., infinitos zeros, depois, 1". Os alunos vivem imersos em uma cultura infinitesimal. Para eles os livros textos escritos segundo o rigor da teoria weierstrassiana são literalmente indecifráveis. O seguinte relato hipotético mostra porque.

Pergunta-se a um aluno de cálculo qual a área sob o gráfico da parábola $y = x^2$ entre $x = 2$ e $x = 5$. Ele logo calcula. Pergunta-se por que faz assim. Ele fica atrapalhado. Um colega dele sugere que é pelo teorema fundamental do cálculo. Ele concorda, meio sem jeito. A cena se desmancha. Porém, como o aluno tem brio, à noite, em casa, ele pega o livro para tirar a limpo o que, afinal, lhe escapara nesse assunto. Por que a área se calcula assim? Pelo teorema fundamental do cálculo? Onde está ele? Ele toma por exemplo Swokowski [1983]. O índice remissivo lhe indica a página 356. Ele vai lá e encontra:

Suponhamos f contínua em um intervalo fechado [a, b].

Parte I: Se a função G é definida por $G(x)=\int_a^x f(x)dx$ para todo x em [a, b], então G é uma antiderivada de f em [a, b].

Parte II: Se F é qualquer antiderivada de f em [a, b], então $\int_a^b f(x)dx=F(b) - F(a)$.

Que a integral definida é F(b) - F(a) eu já sei, desde antes do vestibular. Todos os meus colegas sabem isso, não há porque duvidar. O que eu quero saber é por que a integral definida me dá a área.

Ou seja, em vez de entender a integral definida como área e se perguntar por que a área se calcula pela variação de uma primitiva, o aluno entende a integral definida como variação de uma primitiva e se pergunta por que ela lhe dá a área. Isso se deve à predominância, na cultura em que ele vive, do conceito de função do século XVIII, usado por exemplo por Euler: função é uma fórmula ou expressão analítica. Ora, a área não é uma tal fórmula. Dizer que a área é uma primitiva não é dizer muito, não é dizer como se acha a "expressão" da área. Essa