L34. PV — Calcular a área: dez mais dez mais dez [é interrompido por alguém do grupo]

L35. Q — É só tirar um só.

L36. A — Eu só não sei se é vinte ou se é dez

L37. Q — A área dele é isso vezes isso, vezes isso, vezes isso.

L38. F — Não. É isso vezes isso.

L39. A — Ah é. E isso aqui, e isso daqui é o perímetro.

L40. F — Não, é isso vezes isso, o perímetro é isso, mais isso, mais isso, mais isso.

L41. A — É mais, ele quer vezes.

F corrigiu Q (L-20) chamando-lhe a atenção por confundir área e perímetro. A concordou com F (L21) demonstrando estar acompanhando a discussão do grupo. No entanto, para PV a maior área a ser retirada continuava sendo 25. O grupo continuou a discussão e chamou a professora para ajudá-los. Após o relato do grupo, a professora observou o registro e interveio.

L42. Pª — Você não pode tirar 35 de 100?

L43. PV — Poder pode mas, não vai ficar tudo exato!!!

Os outros alunos contrapuseram o argumento de PV, usaram outros valores que poderiam ser retirados do quadrado e afirmaram ainda que aqueles valores deveriam estar entre zero e cem.

L45. A — Todos!

L46. T — De zero a 100.

L47. F — Tanto é que nós colocamos aqui. De zero a cem.

L48. A — Cem menos os valores possíveis de xis.

L49. Pª — Quais são os valores possíveis entre zero e cem?

L50. A — Vários! A gente pega e subtrai.

L51. F — Até 100 pode, até que a gente botou xis. Independentemente do valor que tem que subtrair!

L52. A — A gente botou 100 menos x. Xis é a área disso daqui tá? A área do quadrado, não importa, não importa se a área do quadrado for um, ou cinco ou vinte, entendeu?

Para o cálculo da área da figura que sobra chegaram a fórmula 100 - x.

É interessante observar que, para eles, quando não se sabe o que se tira, pode-se representar isto por uma incógnita. Partindo desta idéia, representaram o que sobrava como sendo 100 - x, onde $x = l^2$, percebendo também que este x não pode ser negativo porque não existe medida de área negativa.

L51. A — Menos xis!

L52. Q — Você não sabe quanto tirou!

L53. PV — Não?!

L54. F — Não. Você não sabe quanto você tirou.

L55. A — É pois é. Menos x.

L56. PV — A pouco podia tirar tudo, agora não pode tirar nada.

L57. A — É pode tirar tudo.

L58. F — Pode tirar nada.

L59. A — Pode tirar tudo, pode tirar nada.

L60. F — Determine a área do que sobra. 100 menos x, dez menos x, não 100 menos x, porque nós não sabemos o número, entendeu.

PV continuava preso a sua representação. A idéia de que o maior valor possível é 100 estava muito clara para o restante do grupo, porque não se podia tirar mais do que existia no quadrado, analogamente o menor valor era zero.

Apesar dos alunos afirmarem que a área a ser retirada pudesse ser um valor entre zero e cem, dois dos alunos do grupo usaram um exemplo particular para responder. Neste caso, usaram como exemplo 1 cm^2 e 25 cm^2, enquanto que F representou das duas formas, 100 - x e 99 cm^2.

Não conseguiram entender a diferença entre *qual a maior área que pode ser tirada* de *quais os valores que podem ser tirados*. O valor máximo do intervalo e o próprio intervalo se confundem.

L61. A — Eu não entendi essa. Diferenciar esta desta.

L62. F — Eu também não!

L63. PV — Eu vou apagar tudo, tá legal!?

A professora interviu pedindo que encontrassem vinte valores que satisfizessem a condição dada no problema. Os alunos montaram as seguintes tabelas:

AREA QUE TIRA	AREA QUE SOBRA
1	99
2	98
4	96
5	95
25	75
40	60
50	50
30	70
33	67
70	30
62	38
47	53
38	62
24	76
21	79
88	12
89	11
79	21
10	90
5	95

valor	A ser retirado	sobra
100 cm²	1 cm²	99 cm²
100 cm²	2 cm²	98 cm²
100 cm²	3 cm²	97 cm²
100 cm²	4 cm²	96 cm²
100 cm²	5 cm²	95 cm²
100 cm²	6 cm²	94 cm²
100 cm²	7 cm²	93 cm²
100 cm²	8 cm²	92 cm²
100 cm²	9 cm²	91 cm²
100 cm²	10 cm²	90 cm²
100 cm²	11 cm²	89 cm²
100 cm²	12 cm²	98 cm²
100 cm²	13 cm²	87 cm²
100 cm²	14 cm²	86 cm²
100 cm²	15 cm²	85 cm²
100 cm²	16 cm²	84 cm²
100 cm²	17 cm²	83 cm²
100 cm²	18 cm²	82 cm²

1 -> 1	99
2 -> 2	98
3 -> 3	97
4 -> 4	96
5 -> 5	95
6 -> 6	94
7 -> 7	93
8 -> 8	92
9 -> 9	91
10 -> 10	90
1 -> 11	89
2 -> 12	88
13 -> 13	87
14 -> 14	86
15 -> 15	85
16 -> 16	84
17 -> 17	83
18 -> 18	82
19 -> 19	21
20 -> 20	80

100

1x1=1	99
2x2=4	96
4x4=16	82
5x5=25	75
6x6=36	64
7x7=49	51
8x8=64	36
9x9=81	19
1,5x1,5=2,25	97,75
2,5x2,5=6,25	

LADO | ÁREA QUE SOBRA

1) 0 - 100
2) 1 - 99
3) 2 - 96
4) 2,5 - 95
5) 3 - 94
6) 3.5 - 93
7) 4 - 92
8) 4,5 - 91
9) [illegible]

As tabelas dos alunos envolveram duas ou três colunas, evidenciando o modo como pensavam resolver este problema.

Duas Colunas	- Área que tira e Área que sobra: f(x) = 100 - X. - Lado do quadrado a ser retirado e Área que sobra.
Três Colunas	- Lado; Área que tira e Área que sobra. - Valor máximo da área, valor máximo da área a ser retirada e valor do que sobra, calculado por (1ª coluna - a 2ª coluna)

Num dos grupos houve a discussão sobre o que deveria ser registrado na tabela, se a área ou o lado do quadrado a ser retirado. Nesse momento surgiu a necessidade de se fazer um cabeçalho para a tabela, a fim de esclarecer o que estava sendo informado, evitando assim confusões de leituras.

Quando se perguntou aos alunos quantos números existiam entre dois números inteiros quaisquer era comum obter como resposta "são infinitos". A professora observou que nas tabelas os alunos usavam apenas números inteiros apesar de afirmarem que existiam infinitos números entre dois inteiros quaisquer. Vimos que o paradigma do número natural pode ser "transferido" mais facilmente para os números inteiros do que para os racionais. A intervenção da professora foi a de incluir nesta atividade o pedido de vinte valores intermediários no mesmo intervalo para forçar os alunos a pensar nos racionais.

No entanto, os alunos optaram em trabalhar com o intervalo [0, 100] referente a área do quadrado no lugar do intervalo [0,10] dos lados, o que permitiu que continuassem trabalhando com os números naturais.

Isto levou a elaboração de outras situações que provocassem o aparecimento de números racionais entre dois números inteiros.

Atividade (Ativ-5)

1) Complete as seqüências abaixo com os números que faltam.

a) $\boxed{2} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{5}$

b) $\boxed{2} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{5}$

c) $\boxed{2} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{5}$

d) $\boxed{2} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{5}$

e) $\boxed{2} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{5}$

Explique como fez o item "c"?

Repare que a atividade foi elaborada a partir da idéia usada pelos alunos de que entre dois naturais quaisquer é possível determinar um número finito de naturais.

Conclusões

Intuições e Discussões dos Alunos

Estas atividades apontam para algumas idéias que os alunos discutiram sobre:

- Valor máximo / mínimo

Era mais fácil visualizar e retirar um quadrado de lado 10 do que um quadrado de lado zero. O zero na história da Matemática também não apareceu com facilidade.

- Intervalos

Os alunos falaram sobre interpolação, aberto, fechado. Chamamos a atenção que estes conceitos de modo geral não são discutidos nestas séries e no entanto são fundamentais na construção da idéia sobre densidade no conjunto dos números racionas.

Contrato Didático, Papel de Cada um na Sala de Aula

O contrato didático estava claro para todos:

- O papel do aluno era trabalhar nas atividades em pequeno grupo, discutir e sintetizar, levar idéias para o grupão.

- O papel da professora era elaborar atividades, atuar como dinamizadora das discussões. Por exemplo, quando a professora observou que os alunos não haviam usado valores decimais, propôs então que encontrassem vinte (20) valores possíveis de variação para a medida do lado do quadrado que poderia ser retirado. Desta forma, forçava os alunos a falarem sobre "o que estava entre".

Sugestões

Sugerimos que o trabalho com os conjuntos numéricos não se restrinja a visão utilitária anteriormente citada (das impossibilidades). Mas que sejam estudadas as propriedades características de cada conjunto e propriedades que sejam semelhantes aos conjuntos já estudados. E que o estudo dos números racionais recebam maior atenção.

Bibliografia

BIGODE, Antônio J.L. *Matemática atual*, São Paulo: Edit. Atual, 1994. Vol:5,6,7e 8.

COLL, César. *Psicologia e Currículo: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar.* 2ª ed. São Paulo: Ática, 1987. Série Fundamentos, 190 p.

GIMENEZ, Joaquin R. *Inonovacion Metodologica de la Didactica Especial del Numero Racional Positivo: Evaluacion. "Background" del Alumnado"*. Universidad Autonoma de Barcelona, 1991. Cap. III, p. 196 – 455.

____________, 1991. *Inonovacion Metodologica de la Didactica Especial del Numero Racional Positivo: Una Propuesta Curricular para la Ensenanza - Aprendizaje de las Fraciciones en la Formacion Basica* Universidad Autonoma de Barcelona, Cap. IV, p. 349 – 455.

IEZZI, Gelson e Machado, O. D. *Matemática e Realidade*. São Paulo: Atual Ed., 1991 e 1996. vol: 5,6,7e 8.

IMENES, L. M. e Lellis, Marcelo. *Matemática*. São Paulo: Edit. Scipione, 1997. vol: 5,6,7e 8

LINS, Rômulo C., Joaquim Gimenez. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus/SBEM, 1997. Coleção Perspectivas em Educação Matemática, 170 p.

KINDEL, Dora Soraia. *Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade*. Rio de Janeiro, 1998, 214 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Educação Matemática - Universidade Santa Úrsula.

HERSHKOWITZ, Rina , Arcavi, A . *Geometrical Adventures in Functionland, Mathematics Teacher. 1993.* p 346- 352.

KIEREN, Thomas E. *Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and formal Developmen.* NCTM, New York. P.162 - 181

Dízimas Periódicas e Uso da Calculadora

José Paulo Q. Carneiro

Em uma prova de concurso realizada recentemente, destinado principalmente a professores de Matemática, figurava a seguinte questão:

Os números racionais a e b são representados, no sistema decimal, pelas dízimas periódicas $a = 3{,}0181818... = 3{,}0\overline{18}$ e $b = 1{,}148148... = 1{,}\overline{148}$. Encontre, justificando, uma representação decimal de a-b.

Como a e b são racionais, também o é a-b e, portanto, sua representação decimal é periódica. Na prova, era permitido o uso de calculadora. Mas por meio da calculadora jamais se descobrirá o período, pelo menos com a certeza exigida pelo "justifique". Além disto, a calculadora não conseguirá nem mesmo dar uma idéia do período, se ele for muito longo. De fato, o período pode ter um comprimento maior do que o número de dígitos que a calculadora exibe no visor.

Um primeiro expediente que poderia ocorrer seria fazer a subtração por meio do esquema usado habitualmente para decimais finitos. Isto funcionaria bem em casos mais simples. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 0{,}444... \\ -\ \underline{0{,}333...} \\ 0{,}111... \end{array}$$

o que estaria correto, pois $\frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$.

Mas no caso em questão, o desencontro entre os períodos das duas dízimas apresentadas dificulta o emprego desta estratégia (a qual, aliás, precisaria ser discutida em termos conceituais). Vejamos:

$$
\begin{array}{r}
3{,}018181818\ldots \\
-\ 1{,}148148148\ldots \\
\hline
??
\end{array}
$$

Como a subtração usual é feita da direita para a esquerda, não se sabe bem por onde começar, antes de descobrir o período.

Por conseguinte, o caminho natural é calcular as geratrizes de a e b, subtrair as frações correspondentes, e então encontrar uma representação decimal para essa fração.

Utilizando este procedimento, encontra-se:

$$a - b = 3 + \frac{18}{990} - \left(1 + \frac{148}{999}\right) = 1 + \frac{1292}{1485} = \frac{2777}{1485}$$

Neste ponto, o método mais usado por todo mundo é dividir 2777 por 1485 (ou 1292 por 1485, ganhando uma etapa) pelo algoritmo tradicional, e aguardar o primeiro resto que repete. Deste modo, obtém-se:

```
1 2 9 2 0                        |1485
  1 0 4 0 0                       0,0700336
            5 0 0 0
              5 4 5 0
                9 9 5 0
                  1 0 4 0
```

Como repetiu o resto 1040, a partir daí, os algarismos 7, 0, 0, 3, 3, 6 irão se repetir. Logo: $a - b = 1{,}8\overline{700336}$.

Vamos agora fazer alguns comentários:

1 - Algumas pessoas envolvidas no processo de aprendizagem da Matemática (alunos, professores, pais, etc.) expressam às vezes a crença de que, com o advento da calculadora, nunca mais haverá ocasião de usar o algoritmo tradicional da divisão. Alguns até usam isto como um argumento para proibir o uso da calculadora em certas fases iniciais da aprendizagem: "é necessário primeiro que o aluno aprenda o algoritmo tradicional, e só depois lhe será permitido usar