perspectiva de relembrarem os velhos tempos (de infância), propuseram-se a retirar as pedras da caixa percebendo logo, no entanto, que o conjunto estava incompleto. Aliás, bastante incompleto: só as pedras 0-1, 0-3, 0-6, 1-1, 1-2, 1-4, 2-3, 3-3, 3-4, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6 e 5-6 ainda lá permaneciam. Frustrados, mas criativos, e dispostos a fazerem passar o tempo de qualquer forma, resolveram criar um jogo de "desafios" com as pedras disponíveis. Marcus começou (Marcus sempre começava): "Vinicius, diga-me, sem tocar nas pedras, se é possível arrumá-las todas, seqüencialmente, de forma usual num jogo de dominó. Se possível, diga-me ainda que números, numa tal possível seqüência, poderão vir a ocupar as extremidades, após todo o jogo montado". Vinicius, que conhecia grafos, imediatamente pegou lápis e papel e, após alguns minutos, deu as respostas corretas. Como Vinicius raciocinou (em grafos) na resolução? Antes de qualquer outra análise, certifique-se de seu pleno entendimento da questão, visualizando bem que qualquer possível seqüência-resposta seria do tipo expresso na figura 7, não necessariamente na ordem em que estão vistas as pedras.

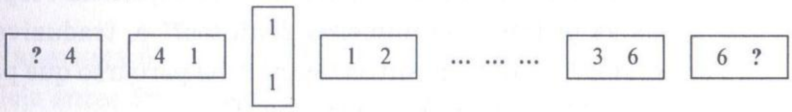

FIGURA 7

Estratégia geral:

Em princípio, desconsiderar pedras de números repetidos (1-1, 3-3 e 4-4). Uma vez achada uma seqüência-resposta com as outras pedras (caso exista), inserir as três pedras inicialmente retiradas em lugares adeqüados, como se vê feito, na figura 7, com a pedra 1-1. Assumindo tal estratégia, então, e já desconsiderando as pedras 1-1, 3-3 e 4-4, iniciemos a resolução promovendo a seguinte

Modelagem:

Vértices - 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

Arestas - 01, 03, 06, 12, 14, 23, 34, 36, 45, 46 e 56

Assim, obtém-se o grafo-modelo da figura 8, que se percebe ser o mesmo grafo dos Problemas 3 e 4, apenas com renomeação de seus vértices. De fato, os rótulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dos vértices do grafo comum (figura 5) aos dois problemas anteriores passaram a ser agora, respectivamente, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Apenas isso aconteceu!

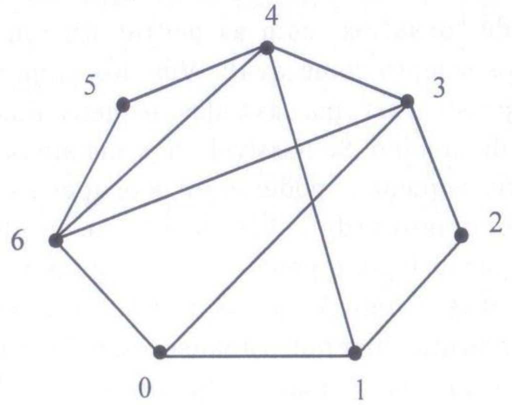

FIGURA 8

A essência da questão em grafos, antes colocada, novamente se repete; pois, para este problema, perguntar "existe uma tal seqüência-resposta que utilize todas as pedras com números distintos?" é, traduzível, à linguagem dos grafos, como "no grafo da figura 8, há percurso que passe por todas as arestas sem repetição de nenhuma?".

Assim, utilizando o mesmo resultado que já nos possibilitou resolver os problemas 3 e 4, chegamos às respostas finais, também de forma simples: é possível! De fato, o grafo da figura 8 possui, exatamente, dois vértices de grau ímpar (0 e 1) e, portanto, dessa forma análoga àquela com que se abordou o Problema 4, temos percurso-resposta 123456036410, que expressa seqüência 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-0, 0-3, 3-6, 6-4, 4-1 e 1-0. Tal seqüência, acrescida das pedras 1-1, 3-3 e 4-4 inicialmente retiradas (conforme já explicado), pode ser vista, como jogo montado, na figura 9.

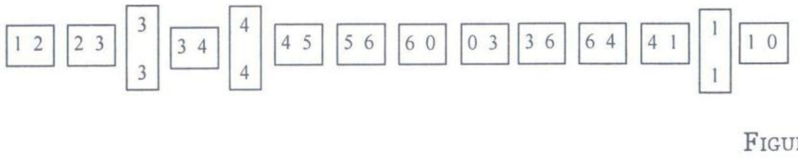

FIGURA 9

De fato, "o conceito de grafo é simples, porém fértil em aplicações e problemas atraentes" (Lima [1988]). Inquestionável! E gostaríamos de apresentar bom número de exemplos, também, nas diversificadas "áreas formais" do conhecimento humano. Há uma "infinidade"! Pelas naturais limitações de espaço aqui, escolhemos apenas um deles, que nos remete à Psicologia Social e que é nosso último problema proposto, muito interessante. Ainda ao final deste item, no entanto, listamos uma "síntese", realmente impressionante, dessa tamanha abrangência de aplicacões dos grafos. E, em nossa *Bibliografia Sugerida*, especificamente no que se refere a tais "áreas formais", o leitor poderá encontrá-las exploradas, principalmente, em Carneiro [1995], Chartrand [1977], La Penha [1983], Lima [1988], Ore [1990], Pitombeira [1987] e Wilson [1990]. Nos seis primeiros, de forma predominante, em contextos mais propriamente ligados a temas formais matemáticos mesmo; no último, ultrapassando tais fronteiras, também em aplicações de explícito teor em outras áreas: Biologia, Química, Geografia, Ciências Sociais, Lingüística...

A essência da abordagem[5] de nosso último problema consta, tanto de [Chartrand], como de [Wilson]. Ampliemos mais nossos horizontes através do

Problema 6

(leia antes *Sistemas balanceados*, logo após seu enunciado)

Determinado promotor de eventos tem que formar uma equipe para o trabalho de organização de certo número de espetáculos, que incluirá diversas iniciativas e levará tempo bem considerável. Assim, ele está se empenhando em formar uma equipe com boas chances de se manter unida até o final, trabalhar com harmonia e apresentar resultado final com sucesso.

A equipe deve ser constituída de 4 profissionais, a serem escolhidos dentre 6 disponíveis, todos igualmente competentes. Após certa análise,

[5] O problema 6, criado pelo primeiro autor deste artigo para apresentação no II EEMAT, Macaé, outubro/99, teve a colaboração (estudo da abordagem do tema e seu relato em seminário) de Ana Flávia Uzeda dos Santos, aluna do Curso de Graduação em Matemática da UFF e sua orientanda no projeto de extensão "Possibilidades de aplicação dos grafos ao Ensino Fundamental e Médio".

ele já decidiu que Vinicius (V), Marcus (M) e Luciana (L) farão parte da equipe, estando na dúvida, no entanto, quanto à quarta pessoa a ser escolhida: Chico (C), Elis (E) ou Fernando (F). Aconselhado a fazer tal escolha sob a ótica dos sistemas balanceados, resolveu adotá-la e, após obter as informações necessárias, compôs o quadro de relações que se segue.

(a) Relações positivas - VM, VC e MF.

(b) Relações negativas - VL, VE, VF, ML, ME e LC.

(c) Relações neutras - MC, LE e LF.

Qual(ais) desses 3 profissionais poderia(m) vir a ser o 4º membro da equipe?

Sistemas balanceados:

Para duas quaisquer pessoas, estabeleçamos três hipóteses exclusivas para a relação existente entre elas: *positiva* (se há boa afinidade entre elas, trabalham bem juntas, etc.); *negativa* (se ocorre exatamente o oposto do que na anterior); *neutra* ou *indiferente* (se nada de significativo lhe puder ser atribuído, no mesmo sentido).

Considere-se agora a denominação de *sistema social* para qualquer universo de pessoas, munido das relações entre elas, conforme as definimos. Um sistema social é dito *balanceado* se cada relação entre duas pessoas é positiva ou, então, quando se pode dividir esse universo de pessoas em dois grupos, de tal forma que toda relação positiva ocorra entre indivíduos de um mesmo grupo e toda relação negativa ocorra entre indivíduos de grupos diferentes. Nenhuma restrição adicional é imposta.

Alguns psicólogos sociais têm conjecturado que, num sistema não balanceado, há estresse excessivo. Assim, entenda-se (pelo menos, no sentido do enunciado do problema 6) que um tal sistema não tem bom equilíbrio, isto podendo afetar a coesão desse universo de pessoas, ou sua produtividade em grupo, de forma negativa.

Resolução do problema:

Na modelagem, vértices representam pessoas; arestas, relações positivas (+) ou negativas (-). Cada aresta deve ser munida do sinal que a define. Para cada relação neutra, não há aresta ligando os dois vértices correspondentes.

Separadamente, são analisados três grafos (figuras 10, 11 e 12). Nestas figuras, cada linha fechada pontilhada está definindo um grupo[6] de pessoas: as representadas pelos vértices que estão no interior da região delimitada por tal linha.

1ª hipótese (analisando a possibilidade de Chico vir a ser o 4º membro da equipe)

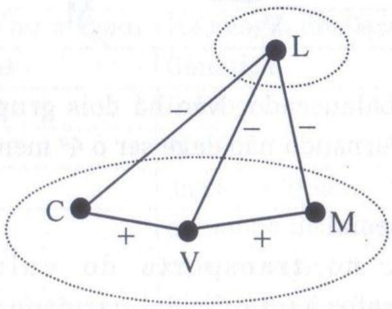

FIGURA 10

O sistema é balanceado. Chico pode ser o 4º membro.

2ª hipótese (analisando a possibilidade de Elis como 4º membro)

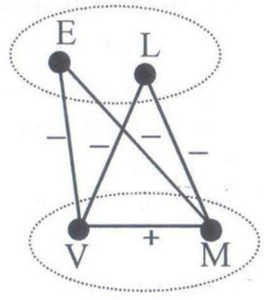

FIGURA 11

O sistema é balanceado. Elis pode ser o 4º membro.

---

[6] O termo *grupo* deve ser entendido no sentido em que aparece na definição de *sistema balanceado*.

3ª hipótese (analisando a possibilidade de Fernando como 4º membro)

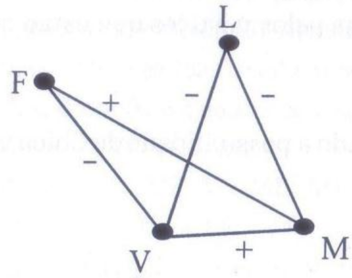

FIGURA 12

O sistema não é balanceado. Não há dois grupos satisfazendo à definição. Portanto, Fernando não deve ser o 4º membro.

Um destaque especial:

Evidentemente, no transporte do universo usual de aplicabilidade dos grafos à interdisciplinaridade e ao cotidiano dos estudantes dos diversos níveis de ensino, surgem questões às quais se deve dedicar especial atenção. Dentre estas, sem dúvida, destacam-se as que se referem ao uso do computador. Tal uso é, relativamente ao que já está consagrado em *grafos e suas aplicações*, inevitável, contínuo, sistemático. Transportando-nos ao Ensino Fundamental e Médio, no entanto, a situação irá se constituir bem diferente, exigindo redirecionamento de objetivos e metodologia (quanto a abordagens com grafos), adequada contextualização por série ou ciclo e, em particular, sensata definição de limites conscientes para a associação dos *grafos e suas aplicações* à máquina: *quando, para quê e como?*

Na verdade, acabará cabendo ao professor, em última análise (mesmo que direcionado por possível planejamento maior em termos de currículo formal), em função das circunstâncias locais, suas próprias habilidades ou limitações, recursos disponíveis, e outras possibilidades da escola ou de seus alunos, sentir a *medida certa* ("do nada ao muito"; e suas dosagens intermediárias) da abordagem computacional no processo educacional em que se envolva. Com sensibilidade, sensatez e criatividade!

Agora, como já adiantado, buscando estimular mais ainda o leitor a consultas em nossa *Bibliografia Sugerida*, listamos diversificados contextos em que se podem encontrar situações-problema modeláveis em grafos. Conscientemente, não adotamos qualquer critério específico de ordenação na lista do quadro que se segue. Para efeito de possível abordagem dos grafos no Ensino Fundamental e Médio, não faria sentido aqui priorizarmos áreas de conhecimento ou ordená-las segundo referenciais *a priori*.

roteiros de passeio ou viagem	Psicologia do Desenvolvimento
moléculas químicas	Genética
plantas de imóveis	Ecologia
redes elétricas	Música
Ciências Sociais	jogos de "quebra-cabeça"
árvore da vida	demanda de energia elétrica
organogramas	minimização de caminhos
árvore de procedimentos ou alocações computacionais	distribuição de serviços: água, luz, gás...
telecomunicações (alocação de freqüências, em geral)	circuitos impressos (componentes eletrônicos)
Lingüística	análise de mapas
"árvores" de decisão, escolha...	coloração de mapas (*)
estruturas rígidas (Engenharia Civil)	jogo de dominó
Arqueologia	saídas de labirintos
códigos	jogo de xadrez
"jogo da velha"	organização de campeonatos
administração de trajetos *ótimos*: vendedor, carteiro, caminhão de lixo...	instalações diversas: elétricas, a cabo...
alocação de horários, atividades...	análise combinatória / probabilidades
sistemas mecânicos, hidráulicos...	poliedros
organização de tráfego	matrizes

(*) Ao registrarmos *coloração de mapas* (tópico em grafos de freqüente recorrência, principalmente, pelo famoso teorema das 4 cores: *todo mapa plano pode ser colorido com, no máximo, quatro cores, de forma que regiões que façam fronteira entre si ganhem cores distintas*), ocorre-nos, inclusive, citarmos Carneiro [1995]:

"A coloração de mapas é apenas um, dentre muitos problemas que podem ser explorados nessa área. A visita aos grafos merece ser feita na era dos computadores, das redes de comunicação e de transportes, e dos intrincados processos decisórios. Há diversas aplicações simples, porém muito interessantes, envolvendo grafos" (Vera Carneiro refere-se ao Ensino Médio).

Conclusão

Em função de tudo que detalhamos ou apenas comentamos, e à luz de nossos três pressupostos, podemos discriminar, distinguindo-os como realmente consistentes, os itens centrais de um forte roteiro de defesa da oportunidade e viabilidade dos *grafos e suas aplicações* para o Ensino Fundamental e Médio [Bria, 1998]:

- a enorme abrangência de possibilidades de aplicação dos grafos em muito diversificadas áreas do conhecimento.

- a extrema facilidade com que inúmeras situações de nosso cotidiano podem ser tratadas através dos grafos de forma bastante acessível aos estudantes desses níveis.

- o inegável *potencial de competência* dessas aplicações para aumentarem o poder de sedução da Matemática sobre nossos alunos, notadamente àqueles que não possuam grandes afinidades com a mesma.

- a natural associação — abordagem opcional nos níveis propostos — dos grafos com o uso do computador, da qual o professor poderia se valer, com sensibilidade e criatividade, na medida certa, em função das possibilidades circunstanciais para a sua realização; por exemplo, até de forma indireta, através de algum trabalho criterioso com algoritmos em prol do desenvolvimento do raciocínio lógico ou para erradicar certas fórmulas matemáticas, trabalho este que poderia constituir-se bastante estimulante, visto que até em nosso cotidiano, naturalmente, já nos movimentamos muito "de forma algorítmica", não nos dando conta disso na maioria da vezes.

- a grande flexibilidade metodológica característica do estudo dos grafos, no sentido de poderem ser introduzidos e trabalhados de várias formas, conforme a ênfase com que se julgue mais conveniente orientar sua exploração: formal ou intuitivamente, através de figuras/diagramas ou estruturalmente, de forma lúdica, a partir da resolução de problemas, associando-os diretamente ao uso do computador ou não...

Sobre o ineditismo da proposta, esta não é inovadora apenas no sentido de indicar assunto, até hoje descogitado em nosso país (salvo em breves manifestações apenas ilustrativas), para o ensino da Matemática dos níveis fundamental e médio. Considerando os padrões em que está sendo fundamentada e estruturada, e será defendida, a proposta é inovadora também, e muito, se comparada à metodologia de aplicabilidade usual dos grafos, como já o comentamos. Da Pesquisa Operacional à Escola. Das muitas preocupações com problemas sobre a produção de uma fábrica à não menor importância de modelagens didáticas de situações-problema em Biologia (ou Química, Geografia, Sociologia, Lingüística...) no processo pedagógico da formação de alunos e cidadãos. Do mundialmente famoso *problema do carteiro chinês* à visão diária do jovem (adolescente, criança) ao trabalho do carteiro de sua própria rua ou ao caminhão do lixo emperrando um pouco o trânsito. Do desafiador *problema do caixeiro viajante* às "amadoras estratégias" de um iniciante no jogo de xadrez. Dos complexos planejamentos e cronogramas de uma grande empresa às corriqueiras dificuldades de cada um de nós com nossos próprios agendamentos de tarefas; ou às nossas críticas sobre a organização dos campeonatos de futebol em nosso país. Do lucro ou do ganho, do ponto de vista "sério", ao divertido *perde e ganha* (em casa, na rua) em muitos jogos tão conhecidos por nós; ou às atividades lúdicas de modo geral.

Não nos pareceu o mais apropriado abordarmos aqui qualquer possível contextualização dos *grafos e suas aplicações* já direcionada (conteúdos ou métodos específicos, alocação por série ou ciclo, etc.) ao Ensino Fundamental e Médio. Isto se indicará, necessariamente, e de forma mais oportuna, na defesa da tese a que se associa este artigo.