Dessa forma entendido, para cada tipo de problema dessa maioria de casos, é necessário um **algoritmo** que, concebido com base em conceitos e resultados da teoria, constitui-se simplesmente num roteiro ordenado de procedimentos, do tipo "receita de bolo" (exemplo: comece de um vértice qualquer, conte quantas arestas nele incidem, registre este número, parta para outro vértice segundo "tal estratégia", ..., agora continue assim:...). Tal algoritmo específico, capaz de resolver o problema proposto, uma vez traduzido à linguagem computacional, propiciaria sua resolução executável pela máquina. No campo usual de aplicabilidade dos grafos, inclusive, é exatamente isso que os torna fundamentais — ferramenta poderosíssima! — em tão diversificados contextos: a possibilidade de rápida resolução de problemas, via computador, quando uma "abordagem visual" nem faria sentido, de tão laboriosa, ou até seria impossível.

Até o final deste artigo, portanto, o leitor nunca deve se esquecer de que, nos problemas exemplificados, quando nos valermos de resolução por inspeção visual (para a determinação de uma solução concreta), esta só terá sido possível por estarmos diante de bem pequeno número de vértices e arestas (caso contrário, precisaríamos de um algoritmo para o problema em questão — o computador seria indispensável), assim proposto aqui sempre propositadamente para, livres de outros aspectos, podermos nos direcionar permanentemente, de forma prioritária, à luz de nosso principal objetivo: o exercício da modelagem! E ainda sobre algoritmos, inclusive, mas agora para os níveis fundamental e médio, citamos Paterlini [1995]:

"Uma experiência[3] com este problema em sala de aula nos leva a algumas reflexões sobre o ensino da Matemática. Não estaríamos nós, professores, enfatizando demasiadamente a associação entre solução de um problema e obtenção de uma fórmula, em detrimento da elaboração de algoritmos? A elaboração de algoritmos desenvolve qualidades de organização e previsão, e é uma atividade que não deve ser omitida no ensino formal da Matemática."

O diagrama da figura 4 [Bria, 1996] busca reproduzir a essência da metodologia de resolução de problemas e pesquisa em grafos: *teoria &*

[3] A experiência em sala de aula, citada por Roberto Paterlini, foi em Geometria, envolvendo um retângulo reticulado por linhas paralelas aos lados, formando quadrados interiores unitários.

prática. Inclua-se, também, nas fases (II), (IV), (V) e (VI) expressas no diagrama, tudo o que envolva algoritmos e execução computacional.

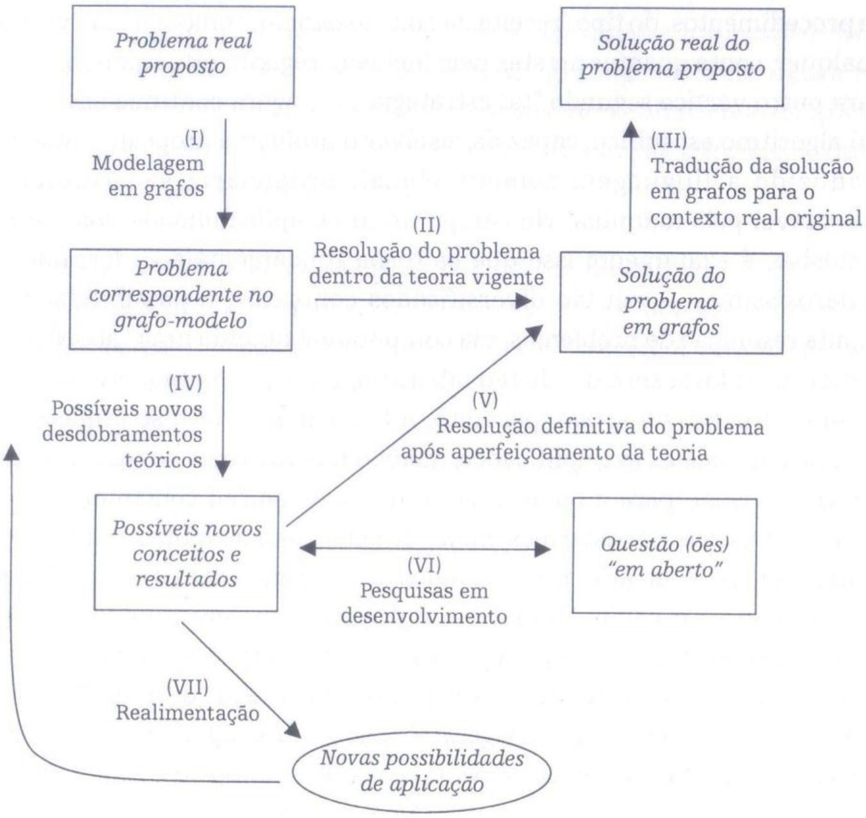

FIGURA 4 / GRAFOS: TEORIA & PRÁTICA

PRESSUPOSTOS DA PROPOSTA

Em Educação, ou em Educação Matemática de forma mais particular, quando se busca fundamentar uma proposta que se anuncia como consistente, de abrangência global em nível considerável e promissoramente produtiva, para o Ensino Fundamental e Médio, imagina-se logo a tão ampla multiplicidade de aspectos envolvidos. Neste artigo, ao contrário do que se impõe em nosso trabalho rumo à defesa de tese, não caberia analisá-los todos. Desejamos, no entanto, mesmo que de forma muito sintética, passar ao leitor, pelo menos, a essência de nossa fundamentação. Isto será iniciado agora, após breves comentários, com o estabelecimento de três pressupostos.

Sabemos que, por exemplo, quando estamos diante de uma turma do nível fundamental ou médio para mais uma aula de Matemática, podem estar à nossa frente cerca de 70% dos ouvintes — que nunca sejam apenas perplexos ouvintes mesmo! — que "lá não nasceram" com grandes afinidades com a Matemática ou que não se encaminharão profissionalmente pelos destinos puros dessa ciência. Estudantes que, no entanto, talvez gostariam de gostar mais de Matemática. Ou, simplesmente, necessitariam ter esse gosto maior, pelo menos, para lograrem condições mais favoráveis à tentativa de diminuição de suas dificuldades em aprendê-la. É claro que, também relativamente a estes, não nos podemos furtar ao trabalho de despertar talentos, estimular vocações. E assim, certamente, alcançaremos tal êxito junto a alguns estudantes, se com amor, sensibilidade e dedicação imbuirmo-nos desse espírito explorando, de forma metodológica cuidadosa, os aspectos mais centrais do saber matemático de forma específica. No entanto, igualmente não podemos direcionar nossa aula, de forma exclusiva — nem mesmo predominante —, a esse fim. Pois lá, diante de nós, estará uma turma inteira de alunos (pessoas: futuros matemáticos, médicos, bancários, professores da língua materna, motoristas, advogados, comerciantes, atores, escriturários, professores de História, agricultores, pescadores, economistas, contínuos, sociólogos, jornalistas, garçons...), à qual devemos passar uma matemática global, abrangente, diversificada, interpretativa (da realidade), conscientizadora (à cidadania), criadora (sob múltiplos aspectos)... Resumindo, não podemos deixar escapar essa tão nobre oportunidade de tentarmos propiciar aos estudantes, a todos, sem qualquer exceção, e no máximo que nos seja possível, condições favoráveis a que possam aproveitar todas as chances que suas rotinas de vida lhes venham a proporcionar para uma visão da Matemática como notável parceira, não "ameaçadora", jamais "predestinada apenas a seres privilegiados". E sempre muito útil, rica, bela!

Sem entrarmos aqui em maiores considerações sobre possíveis classificações distintas quanto à hierarquização de níveis de colaboração e integração entre disciplinas — *multi, pluri, inter, trans... disciplinaridade* —, ou discussões específicas de temas como diversidade cultural, currículo integrado, prováveis implicações e esperáveis dificuldades de sua implantação, ou de outros que, com estes, se interliguem (o leitor encontrará forte material crítico sobre isso em Santomé [1998]), esclarecemos que, sempre que usarmos o termo *interdisciplinaridade* neste artigo, esta deve ser entendida como implicando real intercâmbio entre disciplinas (ida e volta); pelo menos, em intenção inicial de enfoque, enquanto referencial, independentemente dos naturais obstáculos ou circunstâncias restritivas que possam se colocar, frente a iniciativas para sua efetiva concretização. E já julgamos oportuno citarmos Machado [1999]:

> *"...parece cada vez mais difícil o enquadramento de fenômenos que ocorrem fora da escola no âmbito de uma única disciplina. Hoje, a Física e a Química esmiuçam a estrutura da matéria, a entropia é um conceito fundamental em Termodinâmica, na Biologia e na Matemática da Comunicação, a Língua e a Matemática entrelaçam-se nos jornais diários, a propaganda evidencia a flexibilidade das fronteiras entre a Psicologia e a Sociologia, para citar apenas alguns exemplos. Em conseqüência, a idéia de Interdisciplinaridade tende a transformar-se em bandeira aglutinadora na busca de uma visão sintética, de uma reconstrução da unidade perdida..."*

Nossos principais pressupostos são:

(I) "Beleza é fundamental"... Exercer constante sedução, estimular a autonomia e educar para a criatividade são indispensáveis!

(II) O pleno exercício da interdisciplinaridade deve passar, cada vez de forma mais abrangente, de mero discurso à prática concreta!

(III) A Escola não pode se omitir ou ignorar a vida lá fora... Impõe-se "eterna parceria" entre o que se aprende na Escola e o cotidiano, a realidade !

Da Metodologia e Aplicabilidade Usuais em Grafos ao Ensino Fundamental e Médio

É unanimidade, com certeza, dentre aqueles conhecedores dos grafos, que estes são de abordagem inicial acessível a todos, podem exercer forte sedução a estudantes dos diversos níveis de ensino e caracterizam-se, principalmente, por sua enorme aplicabilidade nos mais variados contextos: áreas do conhecimento humano e realidade concreta, nosso dia-a-dia! E ao que nosso trabalho se propõe, em paralelo ao que tanto já se consagrou em termos de contínua utilização dos grafos de forma usual, é também torná-los disponíveis ao Ensino Fundamental e Médio em nosso país, de forma a enriquecer ainda mais o processo ensino-aprendizagem em que estamos envolvidos.

O que passamos a apresentar agora é uma pequena amostragem do que se pode explorar com os grafos, notadamente no que envolve modelagem de problemas.

PROBLEMA 3

A figura 5 representa uma região de nosso país, da qual estão representadas cidades (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7) e estradas (os 11 segmentos de reta traçados). Marcus, há alguns anos atrás, morava numa dessas cidades e resolveu conhecer as 11 estradas, viajando de carro. Ele sabia que nenhuma dessas estradas era de *mão única*, isto é, que poderia sempre seguir nos dois sentidos. E Marcus assim o fez, inclusive conseguindo nunca passar por qualquer estrada pela qual já tivesse passado nessa viagem (não gastou combustível desnecessariamente). O interessante é que Marcus, assim que terminou sua viagem passando pela última dessas estradas, gostou tanto da cidade em que chegou, que lá mora até hoje. Em que cidade Marcus morava anteriormente? Ou, então, em que cidades poderia estar morando no exato momento do início de tal viagem? Ou será que essa história toda, que Marcus sempre repete aos amigos, é realmente uma grande mentira, posto que uma viagem assim, satisfazendo integralmente ao relato feito, seria impossível?

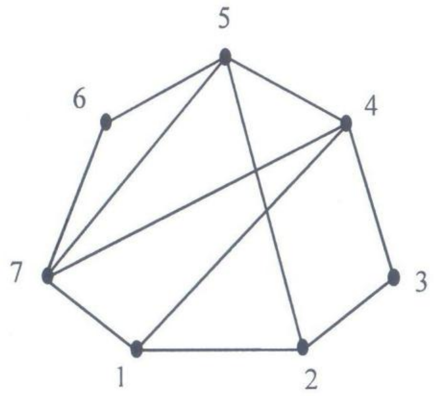

FIGURA 5

Modelagem:
Vértices - cidades (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7)
Arestas - estradas

Assim, a figura 5 passa agora a ser interpretada como a do próprio grafo-modelo do problema proposto. Após tradução à *linguagem dos grafos*, a questão "uma viagem assim, como a que Marcus repete aos amigos, seria possível?" pode ser lida como "existe um percurso, passando por todas arestas do grafo, sem que se repita nenhuma, que termine em vértice distinto do inicial?".

Vamos nos valer do mesmo resultado utilizado na resolução do Problema 2.

No grafo da figura 5, há exatamente dois vértices de grau ímpar: 1 e 2. Assim, a resposta à questão colocada (em grafos) é afirmativa. Marcus não está mentindo quando conta a tal história (pelo menos, a história seria possível!) e, ainda pelo mesmo resultado, ele morava na cidade 1 e terminou sua viagem estabelecendo-se na cidade 2; ou vice-versa.

Uma atenção especial do leitor agora... no sentido de perceber, profundamente, a riqueza do tema e o quanto podem ser abrangentes as possibilidades do professor, a partir de qualquer problema já conhecido, de associação, adaptação ou criação de novos problemas, transportando-se sem maiores dificuldades, inclusive, até de um certo contexto (o do problema inicial) a outro!

Em princípio, o Problema 3 parece só uma *charada matemática*. Mas, quando entra sua modelagem em grafos, ele passa a ser um (dentre inúmeros possíveis) representante de uma ampla classe de problemas, que pode se expressar por vários enunciados distintos (tantos quantos se queira), no mesmo contexto ou diversificados outros. Isto ocorre pelo fato de que estes diferentes enunciados, quando traduzidos à teoria em questão, transformam-se, essencialmente, num único problema em grafos. Assim, em geral, ou em número muito expressivo de ocasiões, um professor poderia traduzir (agora em sentido contrário) uma mesma situação-problema em grafos em enunciados de Química, Biologia, Lingüística, Sociologia... Ou numa atividade lúdica a ser proposta, numa situação corriqueira do cotidiano do aluno; neste caso, inclusive, aproveitando até o próprio contexto social em que o aluno estivesse inserido, sua cidade, seu bairro, sua casa, sua família, suas principais atividades exercidas ao longo da semana, seu esporte predileto, os objetos com que tem mais freqüente contato, etc.

Vamos ilustrar essa tão rica fonte, que o professor teria à sua disposição para a criação de inúmeras novas situações-problema a partir de alguma de abordagem já conhecida, propondo os Problemas 4 e 5 que, enunciados em contextos concretos (da realidade) completamente distintos, entre si e do contexto do Problema 3, resultam no mesmo tipo de situação-problema em grafos. Isto é, os Problemas 3, 4 e 5 são "iguais", se vistos apenas à luz da correspondente questão em grafos que, na verdade, se está colocando.

PROBLEMA 4

A figura 6 representa a planta de uma pequena casa, onde mora Marcus que, há alguns minutos atrás, encontrava-se no interior de um dos cômodos. Todas as portas da casa estavam abertas naquele instante, as portas de todos os cômodos e as que dão para o lado de fora da casa. Exatamente de tal cômodo, então, Marcus iniciou determinado trajeto, segundo o qual conseguiu fechar todas as 11 portas, passando por cada uma delas por uma única vez (isto é, fechada qualquer porta, não a abriu de novo) e, imediatamente após fechar a última porta, foi ao cinema em rua próxima. Em que cômodo, inicialmente, Marcus estava? Ou em que cômodos poderia ele estar naquele instante? Ou, ao contrário, tal história é realmente uma grande mentira, posto que um tal trajeto, satisfazendo integralmente ao relato feito, seria impossível?

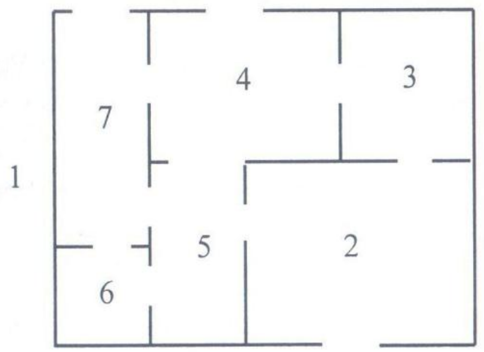

FIGURA 6 (REGIÃO 1 = EXTERIOR DA CASA)

Modelagem:
Vértices - cômodos (2, 3, 4, 5, 6 e 7) ou o exterior (1)
Arestas - portas

Mesmo grafo-modelo do Problema 3 (figura 5)! Repetem-se, também, a situação-problema em grafos (mesma questão euleriana em jogo) e o encaminhamento da resolução. Houve apenas uma imposição adicional. Marcus foi ao cinema logo depois; daí, o trajeto de "fechamento de portas" pela casa terminou do lado de fora (vértice 1), só podendo ter se iniciado, portanto, no cômodo 2. O trajeto 234567147521 satisfaz às condições impostas no enunciado. Visualize-o, no grafo da figura 5... E na casa!

E grafos são muito úteis na modelagem de inúmeros jogos[4]. O Problema 5, por exemplo, que em nada envolve cômodos ou portas de uma casa como o problema que acabamos de analisar (totalmente distinto deste, remete-nos ao conhecido jogo de dominó), de novo recai na mesma situação-problema em grafos, explorada nos Problemas 3 e 4, situação esta que, por sua vez, possui a mesma essência da envolvida no Problema 2 (das pontes de Königsberg). E, certamente, nossa ênfase não será demais aqui: margens de rio, ilhas e pontes; cidades e estradas; cômodos e portas; pedras de um jogo de dominó (isto mesmo; é o que veremos logo a seguir!). Tão distintos contextos... E uma só situação-problema em grafos suficiente para a abordagem completa desses quatro problemas concretos! Vamos, então, ao nosso.

Problema 5

Em certa noite de fortes chuvas, os irmãos Marcus e Vinicius estavam em casa, não muito inspirados sobre o que se fazer. Detestavam televisão! Por "milagre", nenhum motivo para discutirem. De fato, tratava-se de uma noite fadada ao tédio. Numa velha caixa já há muito esquecida, no entanto, encontraram pedras de um jogo de dominó. Com animada

[4] Por exemplo, também com resolução em grafos, e constituindo-se numa *questão hamiltoniana*, o problema "é possível um cavalo passar por todas as casas de um tabuleiro de jogo de xadrez, através de uma seqüência de movimentos de cavalo, sem repetir nenhuma delas e terminando tal percurso na mesma casa de onde partiu?" tem resposta afirmativa. O leitor pode encontrá-lo em [Wilson, 1990].