Editorial

José Paulo Q. Carneiro e Rosa M. Mazo Reis

O tema "grafos" vem sendo contemplado em diversos trabalhos e artigos, mas a comunidade de educadores matemáticos continua desejando saber mais sobre esse assunto. É o que nos propõem os professores Jorge Bria, Carlos Alberto Nunes Cosenza e Gilda Helena Bernardino de Campos, em seu artigo: "Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática , Interdisciplinaridade e Realidade".

A professora Lícia de Souza Leão Maia apresenta-nos considerações sobre a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, de uma forma simples, contribuindo assim para o desenvolvimento profissional do professor, que poderá desenvolver um novo olhar ao analisar suas atividades.

O artigo dos professores Dora Soraia Kindel, Janete Bolite Frant e Joaquin R. Gimenez nos traz intuições sobre intervalos, elaboradas por alunos de sétima série, sob mediação da primeira autora.

O professor José Paulo Q. Carneiro tece comentários instigantes sobre o uso da calculadora num trabalho com dízimas periódicas. Convidamos o leitor a uma reflexão sobre esse trabalho.

O professor Roberto R. Baldino, em seu artigo "Infinitésimos: quem ri por último?", discute um assunto polêmico, a Análise não-Padrão, ao qual o autor tem voltado mais de uma vez.

O Prof. Dr. Abraham Arcavi, do Weissman Institute of Israel, lança uma pergunta que nós, educadores matemáticos, buscamos responder em nosso íntimo: "E em Matemática, nós que ensinamos, o que construímos?" O desafio da resposta está lançado para cada um de vocês.

Você encontrará novas seções. Duas delas são dirigidas para sua sala de aula: Notas de aula e Sugestões para sua aula, para as quais aguardamos receber suas contribuições. Outras duas novas seções enfocam resenhas de tamanhos distintos. Envie a sua resenha sobre aquela obra que você leu e que gostaria de divulgar. Sugestões e críticas são sempre um estímulo, o Boletim é nosso.

Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade

JORGE BRIA, CARLOS ALBERTO NUNES COSENZA E GILDA HELENA BERNARDINO DE CAMPOS

INTRODUÇÃO

Apresentamos neste trabalho uma discussão sobre possível inserção dos *grafos e suas aplicações* no Ensino Fundamental e Médio, reproduzindo a essência da tese de Doutorado em desenvolvimento na COPPE/UFRJ por parte do primeiro autor, a partir de sua experiência acumulada, em estudos em grafos nos últimos anos, enquanto professor de Matemática de 1° e 2° graus anteriormente, em docência no Curso de Graduação em Matemática da UFF ao longo de mais de duas décadas até hoje e por seu envolvimento mais recente em projetos e pesquisas em Educação Matemática, experiência essa que se soma a significativos frutos colhidos de uma muito feliz parceria de orientadores, os dois outros autores.

Uma das principais motivações dos três autores à publicação deste artigo foi a plena consciência de que *grafos e suas aplicações* é tema completamente desconhecido da maioria dos professores. Mas não deveria sê-lo... Isto é o que pretendemos mostrar! Evidentemente de forma bastante sintética, mas suficiente para que o leitor, talvez com breve consulta à nossa *Bibliografia Sugerida*, venha a concordar conosco:

Grafos e suas aplicações seriam, inquestionavelmente, muito oportunos e viáveis no Ensino Fundamental e Médio em nosso país!

Certamente, estão os grafos altamente credenciados como um dos fortes candidatos naturais a serem incluídos como novos tópicos da Matemática para tais níveis de ensino. Propor grafos para estes (e, a partir daí, efetivamente investir em sua concreta inserção no processo formal de formação de nossas crianças, adolescentes ou jovens) é tarefa desafiadora, não resta dúvida. Mas é instigante, realmente inovadora em nosso país e nos vem estimulando de forma cada vez mais consistente, a partir de certos pressupostos que aqui explicitaremos e, principalmente, pelo quanto a idéia aponta caminhos tão promissoramente produtivos, envolvidos em rara harmonia:

Simplicidade, Beleza, Atualidade... Ciência, Arte, Educação!

E, de imediato, adiantamos ao leitor que a cogitação de abordagens em grafos no ensino obrigatório não é "invenção nossa"! Citamos já, por exemplo, Santaló [1990]:

> *"...Ainda que, em muitos países, já tenham sido introduzidos, vamos mencionar alguns temas que, obrigatoriamente, devem figurar entre aqueles acerca dos quais todo cidadão deve ter sido informado durante o período de escola obrigatória... Há que se introduzir as idéias básicas de probabilidade e estatística... Os fenômenos e situações aleatórias são os que mais aparecem na natureza e na vida cotidiana... Outro tema essencial é a introdução, o mais cedo possível, da computação...Outro exemplo pode ser a Teoria dos Grafos, muito útil em diversas áreas da ciência..."*

O Que São Grafos?

Problema 1

A figura 1 mostra-nos diagrama representando (sem preocupações com forma ou escala exatas) as 9 estradas de certa região, onde A, B, C, D, E, F e G são cidades. Partindo de A, e sabendo que tais estradas são de pista dupla (mão nos dois sentidos), é possível visitarmos todas as outras cidades, sem repetirmos nenhuma, terminando tal viagem rodoviária justamente na cidade de partida (não considere isto como repetição)?

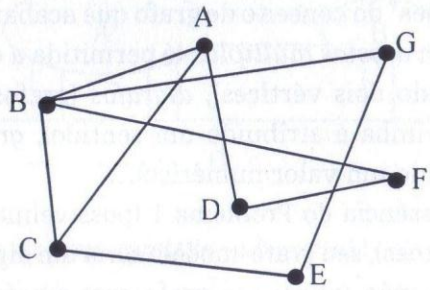

FIGURA 1

Para este nosso primeiro exemplo, basta-nos uma rápida "inspeção visual" para chegarmos à resposta. De fato, é possível. A ordenação ACEGBFDA expressa um roteiro de viagem que satisfaz às exigências impostas pelo enunciado.

Na verdade, nosso Problema 1 está aqui apenas objetivando ser ponto de partida para alguns conceitos iniciais da Teoria dos Grafos que nos interessam neste artigo.

Ao que chamamos de diagrama, no enunciado do problema, dizemos agora tratar-se de um **grafo**. O grafo da figura 1, em particular, possui 7 **vértices** (representando as cidades A, B, C, D, E, F e G) e 9 **arestas** (as estradas). Ao representarmos a situação-problema dessa forma (enfatizamos não serem importantes a forma ou o comprimento das linhas que expressam as arestas), estamos fazendo uma **modelagem em grafos** da questão proposta, concebendo um **grafo-modelo** à mesma.

O leitor deve perceber que, bem provavelmente, já desenhou grafos por inúmeras vezes em sua vida! Desenhou-os em muito diversificadas circunstâncias de seu cotidiano, sua atividade profissional ou qualquer outro contexto em que desejasse melhor "visualização" da situação a ser analisada: para simples diagnóstico, melhor abordagem, busca de alguma solução concreta...

Outros conceitos bem simples facilitarão nossa comunicação aqui. **Ordem** de um grafo é o seu número de vértices. Dizemos também que, por exemplo, a aresta AB é **incidente** nos vértices A e B. Já uma seqüência "contínua" de arestas, do tipo CEGBF, é dita um **percurso** (neste caso, **conectando** os vértices C e F). Finalmente, **grau** de um vértice é o número de arestas nele incidentes; assim, os vértices A, B, C, D, E, F e G possuem graus, respectivamente, iguais a 3, 4, 3, 2, 2, 2 e 2.

Há "generalizações" do conceito de grafo que acabamos de apresentar ao leitor: *grafos com arestas múltiplas* (é permitida a existência de mais de uma linha ligando dois vértices), *digrafos* (grafos direcionados ou orientados; a cada linha é atribuído um sentido), *grafos valorados* (a cada linha é atribuído um valor numérico)...

Preservando a essência do Problema 1 (possivelmente, alterando ou acrescentando questões), seu grafo-modelo seria um digrafo caso algumas estradas fossem de mão única; um grafo com arestas múltiplas seria utilizado se houvesse mais de uma estrada ligando duas cidades; um grafo valorado seria escolhido se o problema proposto levasse em consideração alguma valorização quantitativa a atribuir-se a cada estrada (valor numérico representando distância, nível de dificuldade ou risco de passagem por tal estrada, número de pontos turísticos interessantes, etc). Neste artigo, salvo contrária menção explícita (e já será o caso de nosso próximo problema), o termo *grafo* é usado em seu conceito mais simples, sem orientação das arestas, sem multiplicidade destas entre dois vértices, sem qualquer atribuição de valores quantitativos, sem qualquer outra imposição.

Os grafos vêm do século XVIII. A idéia de representarmos objetos através de pontos (vértices) e, fixada determinada relação a ser satisfeita por alguns pares desses objetos, sempre ligarmos dois vértices relacionados por meio de uma ou mais linhas (arestas), isto é, a idéia original dos grafos, nasceu a partir de um ***problema precursor*** **(Euler, 1707-1783)**, que se apresenta aqui como nosso.

Problema 2 (Problema das Pontes de Königsberg)

Havia um rio com duas ilhas A e B. Rotulando-se as duas margens do rio, respectivamente, por C e D, tínhamos 7 pontes. Uma ligando as duas ilhas A e B, duas de A até a margem C, duas de A até a margem D, uma de B a C e a outra de B a D (mapa na figura 2). Seria possível, partindo-se de qualquer uma dessas quatro regiões, margem ou ilha, atravessarmos as sete pontes sem repetir nenhuma?

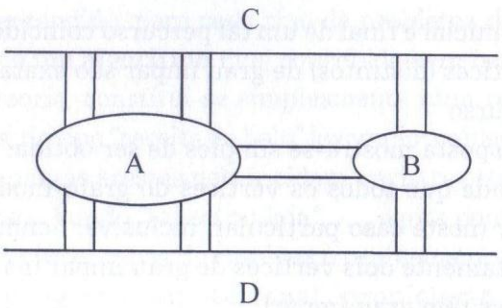

FIGURA 2

Estamos diante de uma *questão euleriana*[1] !

Modelagem:
Vértices - ilhas ou margens (A, B, C, D)
Arestas - pontes

O grafo-modelo (figura 3) deste problema é um *grafo com arestas múltiplas*, como já comentado.

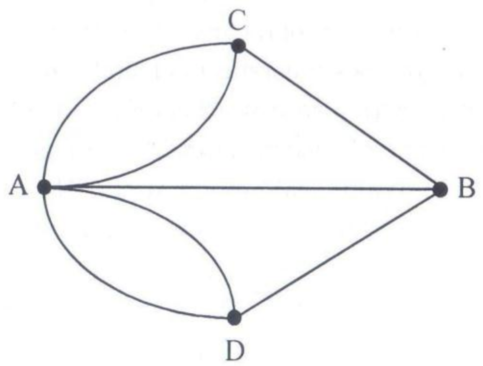

FIGURA 3

E podemos nos valer do seguinte resultado da Teoria dos Grafos:

É possível percorrer todas as arestas de um grafo, cada uma por uma única vez (sem repetição) se, e somente se, o grafo possui todos os vértices com grau par ou exatamente dois vértices de grau ímpar; no primeiro

[1] Numa primeira abordagem, simplesmente entenda-se como uma *questão euleriana* toda aquela que envolva passagem por todas as arestas do grafo sem repetição de nenhuma delas.

caso, os vértices inicial e final de um tal percurso coincidem; no segundo caso, os dois vértices (distintos) de grau ímpar são exatamente o inicial e o final do percurso.

E, assim, a resposta mostra-se simples de ser obtida: Impossível! De fato, não é verdade que todos os vértices do grafo-modelo da figura 3 tenham grau par (neste caso particular, inclusive, nenhum possui grau par) nem há exatamente dois vértices de grau ímpar (na verdade, todos os quatro vértices têm grau ímpar).

Metodologia e Aplicabilidade Usuais em Grafos

A Teoria dos Grafos compõe-se de inúmeros tópicos: árvores, percursos eulerianos, percursos hamiltonianos, planaridade, coloração... Por exemplo, assim como nosso segundo problema envolveu uma *questão euleriana*, o primeiro apresentara-nos uma *questão hamiltoniana*[2]. Cada um desses tópicos tem seu desenvolvimento próprio, com seus inúmeros conceitos ou resultados. Em geral, cada avanço científico de um tópico dá-se como produto de pesquisas, em função de possível resolução definitiva (ou aperfeiçoamento de soluções) de *questões em aberto* já existentes ou a partir de novas situações-problema propostas, dentro da própria teoria ou como tradução, à linguagem dos grafos, de outras questões concretas (da realidade) ainda não colocadas anteriormente. E uma nova situação-problema da realidade pode até motivar o desenvolvimento de novo tópico na Teoria dos Grafos.

Um aspecto de fundamental importância: Na prática usual, na esmagadora maioria das vezes, estamos lidando com número muito grande de vértices e arestas. Se isto tivesse acontecido com o Problema 1, por exemplo (se estivéssemos diante de uma região mais ampla, com muitas cidades e estradas), e ainda nos sendo exigido explicitar um tal roteiro de viagem que satisfizesse às condições impostas no enunciado, não conseguiríamos chegar a uma solução por simples inspeção visual, diante de tamanho emaranhado de pontos e linhas, com tantas "infinitas" possibilidades de percursos entre dois quaisquer vértices. E o computador seria imprescindível!

[2] Numa primeira abordagem, simplesmente entenda-se como uma *questão hamiltoniana* toda aquela que envolva passagem por todos os vértices do grafo sem repetição de nenhum deles.