A Matemática nas Entrelinhas

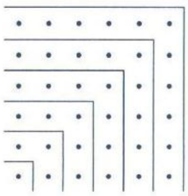
ROSANA DE OLIVEIRA E ROSA M. MAZO REIS

Esta atividade foi sugerida no Boletim 36, na seção Sugestões Para Sua Aula, e proposta no Curso de Atualização em Matemática para Professores do Ensino Médio, do Programa Pró-Ciências da FAPERJ. A disciplina que ministramos chama-se Aplicações Complementares em Sala de Aula, cuja proposta era levar aos professores sugestões de atividades para que fossem aplicadas em sua sala de aula e trouxessem para nós um retorno em forma de relato oral, e um relatório escrito.

Um primeiro momento foi vivido pelo próprios professores onde eles deveriam fazer a atividade como aprendizes e professores. Num segundo momento, deveriam aplicar a atividade em sua sala de aula.

No trabalho realizado com os professores observamos pelo menos dois aspectos. Nos encontros presenciais, observamos como o professor se comporta como aprendiz, ou seja, a sua relação com conteúdo matemático, o nosso objetivo não é avaliar sua competência e sim como ele trabalha com esse conteúdo, como este professor pensa, reflete sobre o seu saber, confronta-se com seus pares. Um outro aspecto é como o professor se utiliza desse conteúdo na sua relação com seus alunos, nesse caso comentamos o relatório escrito entregue pelos professores onde analisamos, parcialmente, como o professor estabelece as relações com seus alunos em sala de aula.

A atividade proposta foi a seguinte:



- Que idéias matemáticas podem surgir ao se observar essa figura?
- Que questionamentos deveriam ser feitos para provocar respostas

nos seus alunos?

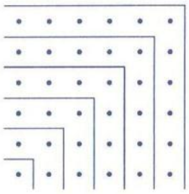
- Dentro de que conteúdos?

De uma maneira geral, os professores se preocuparam em responder a primeira pergunta. Abaixo temos um levantamento dessas respostas dadas pelo grupo de professores, seguidas de nossos comentários.

(1) Identificação da seqüência (1, 3, 5, 7, 9) finita, e da seqüência (1, 3, 5, 7, 9, ...) infinita.

(2) Números ímpares consecutivos nos dá a idéia de uma PA de razão 2 e primeiro termo 1.

(3 Números consecutivos ímpares: n, n+2, n+4, n+6. Finita?

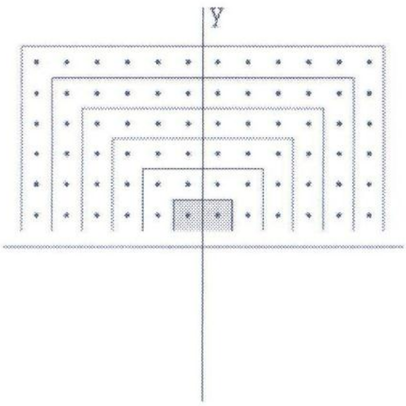


1 3 5 7 9 11 número total de pontos

A seqüência foi observada escrevendo a quantidade total de pontos que aparece em cada intervalo em forma de ⏋.

A seqüência numérica não está presente na figura, sua identificação já é uma leitura sobre o desenho com um determinado olhar, veremos que outras seqüências são identificadas com outros olhares.

(4) Simetria localizada num segundo quadrante, considerando o eixo y, como eixo de simetria, resultando uma nova seqüência: (2, 6, 10, 14...). Possibilidade de se estabelecer esta lei de formação. $a_n = 4n - 2$. Que poderia ser comparada com a anterior, e se trabalhar o dobro.

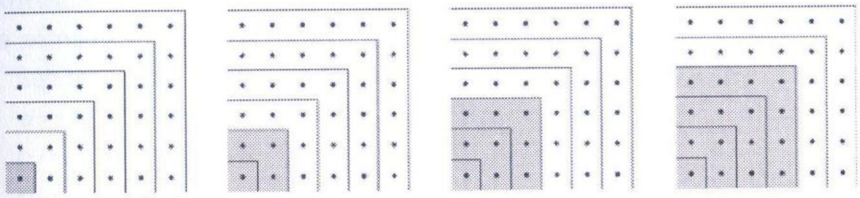


Observe que uma nova figura foi construída a partir da figura dada. Onde foi imaginado um "eixo y". Com esse olhar uma nova seqüência foi identificada. Sendo a lei de formação da seqüência anterior $b_n = 2n - 1$, esta pode ser vista como $b_n = 2\,a_n$, observe que esta é uma relação entre duas leis de formação (funções), a partir dessa observação poderíamos sistematizar a composição de funções.

(5) O número total de pontos dos quadrados, resultando uma outra seqüência: (1, 4, 9, 16...). Que tipo de seqüência estaríamos trabalhando agora? Levantar diferentes leis de formação para esta seqüência.

(6) A disposição dos pontos sugere quadrados e a quantidade dos mesmos em cada um dos quadrados visualizados, pode ser relacionada com a área da figura, assim como os pontos de cada "fila" tem relação com o lado deste quadrado.

O desenho é para ajudar o leitor a visualizar a seqüência.



1 4 9 16 ...

(7) A soma de números ímpares consecutivos a partir de um é igual a n^2.

Por exemplo:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

(8) Essa disposição está relacionada com a área do quadrado, ou seja, $1 + 3 = 4$ pontinhos, que dão a idéia de um quadrado de lado "2"

(9) Partindo da fórmula da soma dos n termos da P.A .

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2}$$

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1)\,.\,n}{2}$$

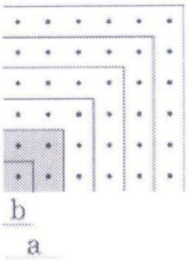
$$S_n = \frac{2n^2}{2}$$

$$S_n = n^2$$

Embora o resultado das observações (5), (6), (7) e (8) se remetam a mesma seqüência, as observações (5) e (6) enfocam as relações geométricas, enquanto as observações (7) e (8) enfatizam relações numéricas. Na observação (9), o grupo de professores parte de um conhecimento sistematizado e chega a lei de formação da mesma seqüência, num enfoque algébrico. Aqui fica evidente que as inter-relações entre os conteúdos podem e devem ser valorizadas, e fortalece a idéia de que o conhecimento não se constrói de maneira linear.

(10) $a^2 = b^2 + (a + b)$ Onde no primeiro caso b é um ponto, e a são dois pontos. Como se acrescenta "um a um" a diferença entre a e b e é sempre constante e igual a 1. Poderíamos Ter "partido" da igualdade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$? Passando para $a^2 - b^2 = (a + b)$. 1 que foi acrescentado está aqui chamado de a + b.

Vejamos uma possível interpretação. Observe que, mais uma vez o ponto de partida é um conhecimento sistematizado, adequado a situação proposta.



a=2 e b=1, números de pontos na horizontal

Nas relações numéricas temos:

$2^2=1+3$	$3^2=1+3+5$	$4^2=1+3+5+7$
$2^2=1^2+(2+1)$	$3^2=4+5$	$4^2=9+7$
$\mathbf{a^2=b^2+(a+b)}$	$3^2=2^2+5$	$4^2=3^2+7$
a=2 e b=1	$3^2=2^2+(3+2)$	$4^2=3^2+(4+3)$
	$\mathbf{a^2=b^2+(a+b)}$	$\mathbf{a^2=b^2+(a+b)}$
	a=3 e b=2	a=4 e b=3

Como a relação $a^2=b^2+(a+b)$ se mantém em todos os casos podemos escrever que $a^2-b^2=(a+b)$, sendo o número 1 elemento neutro na multiplicação podemos transformá-la em $a^2-b^2=(a+b)$. 1. Mas como (a-b) é sempre igual a 1, podemos escrever a relação como $a^2-b^2=(a+b).(a-b)$.

Mais uma vez se constata o texto Matemático produzido a partir de uma observação, em princípio "truncada". Aquilo dito nas entrelinhas e não dito explicitamente, nos leva a refletir o quanto pensamos que verbalizamos em nossas aulas e apenas dizemos nas entrelinhas. Será um aprendiz "expert" em ouvir, ler e entender o que não dissemos? Captará cada aprendiz o mesmo implícito no discurso?

(11) n + n +2 + n+ 4 + n + 6 +n +8 + n +10. Onde n=1. Verificou cada parte o que acontecia, e concluiu que a figura como um todo corresponde a esta soma. Após discussões chegamos a fórmula de somatório. S(1+2k), sendo a variação de k de zero a 5.

Nesta observação os professores têm um olhar para o total de pontos da figura, e trabalha implicitamente com a idéia de indução, mas repare, antes de enunciar como somatório, o que implica ter claro a lei de formação, ele registra a soma dos termos um a um.

n + n + 2 + n + 4 + n + 6 + n + 8 + n + 10 para n=1, esta expressão só corresponde a figura dada se n for igual a 1, o que resulta na soma dos números da seqüência 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Se fizermos:

n = 2, teremos 2, 4, 6, 8, 10, 12

n = 3 teremos 3, 5, 7, 9, 11, 13

n = 4 teremos 4 , 6, 8, 10, 12, 14

n = 5 teremos 5, 7, 9, 11, 13, 15

n = 6 teremos 6, 8, 10, 12, 14, 16

Se tomarmos a expressão n + n + 2 + n + 4 + n + 6 + n + 8 + n + 10, simplificando teremos o a expressão equivalente 6n+30, então para:

n = 2 a soma dos 6 primeiros termos é 42

n = 3 a soma dos 6 primeiros termos é 48

n = 4 a soma dos 6 primeiros termos é 54

n = 5 a soma dos 6 primeiros termos é 60

n = 6 a soma dos 6 primeiros termos é 66

Mas a variação não está no n e sim no acréscimo, ou seja, a análise que resulta na expressão do somatório é que os acréscimos são 0, 2, 4, 6, 8, 10 ou seja 2k onde k varia de 0 a 5.

Uma generalização possível seria n+2k, porém isso geraria outras seqüências, consequentemente outras figuras para n variando de 1, 2, 3, 4, 5,.... e k = 0, 1, 2, 3, 4, 5...

(12) Conjuntos universos distintos podem gerar distintas expressões para exprimir o mesmo conjunto solução:

Todas geram a mesma seqüência

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $2n + 1$------ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $2n - 1$------ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $n + 1$----- $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $n - 1$------ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

A observação (12) evidencia um outro contexto, mudando a expressão e o conjunto universo podemos gerar a mesma seqüência. A partir desse caso podemos pensar em atividades que permitam aos nossos adquirir uma certa flexibilidade em lidar com o algébrico, em particular, com leis de formação.

(13) Fórmula do termo geral de uma PA: $a_n = a_1 + (n - 1)\,r$

(14) Fórmula do termo geral desta PA: $a_n = 2n - 1$ ou $a_n = 2n + 1$. Discussão sobre N. Relação com o n, quantidade de termos e ou posição do termo na seqüência.

A observação (13) enuncia a fórmula do termo geral de uma PA como um conhecimento adquirido previamente, para a observação (14), uma leitura possível é substituindo na fórmula geral do termo de uma P.A . (progressão aritmética) o $a_1 = 1$ (1° termo) e a $r = 2$ (razão) teremos a expressão $a_n = 2n - 1$, A expressão $a_n = 2n + 1$, é uma variação sobre a primeira, mas nesse caso o que muda é o conjunto que n pertence. Se pensarmos numa seqüência, o natural seria associar o primeiro valor para n como 1, pois é a primeira posição que o termo ocupa, mas sabemos que algumas situações problemas exigem que o primeiro valor para n seja zero, que é o caso da segunda expressão.

Em resumo, se:

$a_n = 2n - 1$ então $n = 1, 2, 3, 4....$

$a_n = 2n + 1$ então $n = 0, 1, 2, 3,...$

Mostramos através desse relato comentado que o conhecimento do professor também está em constante construção, que somos todos aprendizes, numa relação contínua de ler, ouvir, refletir, falar, ouvir de novo, reconstruir a fala. Um ponto ficou evidenciado aqui, o professor precisa se imbuir da tarefa de falar, ouvir, refletir, tornar a dizer, ouvir um pouco mais, não só os seus alunos mas também seus pares. No espaço de aula, prestar atenção ao que ele e seus alunos dizem e ao que e não dizem. O não falar ou a fala "truncada" geralmente está repleta de significado, sendo uma fonte inesgotável do conhecimento em construção do aprendiz.

No boletim 38, apresentaremos os relatórios produzidos pelos professores com os comentários sobre a produção de seus alunos, a postura do professor e as características que envolvem essa relação professor-aluno-conhecimento.

Bibliografia

ARCAVI, O, O Sentido do Símbolo - Série Reflexões em Educação Matemática - Álgebra, História e Representação. Vol.3 -, MEM-USU/RJ, 1995.

CARNEIRO J. P. Q. - Sugestões para sua aula - Boletim GEPEM nº 36-pág. 109 - GEPEM 2000/RJ.

LINS, R. C. e Gimenez, J. - Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI - Papirus, 1997.

OLIVEIRA, R. - Pensando Algebricamente antes da 7ª série: Uma Outra Perspectiva sobre os Processos de Construção do Conhecimento - Dissertação de Mestrado ,USU - RJ, defendida em dezembro de 1997.

Professores Participantes do Curso de Atualização que Contribuíram com seus Trabalhos para que a Produção deste Relato Fosse Possível

1. Ana Maria Mendes Simões
2. Anderson Roberto Gomes da Silva
3. Andreia Cardoso Coelho
4. Bianca Cardoso Soares
5. Camila Luciane de Oliveira
6. Carlos Fernando Correa de Souza
7. Carlos Henrique de Carvalho
8. Charles França de Carvalho
9. Claudia Ferreira Paiva Barreto
10. Consuelo Romero
11. Denise Rodrigues Gomes dos Santos
12. Dora Soraia Kindel
13. Emília Barra Ferreira
14. Fábio Luiz Andrade Marinho

15. Frank Ermeson Titonelli Casadio
16. Georgia Martha Lobato Oliveira
17. Hélio Silveira Nunes
18. José Alexandre Ramos Pereira
19. Marcelo Ribeiro Monteiro
20. Marcio Luiz de Castro Souza
21. Maria Rosânia Nunes Pereira
22. Maria Stella Gama da Silva
23. Marli Duffles D. Moreira
24. Mírian Salgado
25. Monica Lissker Honigman
26. Nadja dos Santos Jesus Avelino
27. Nelson Roberto Barroso Perreira
28. Norton Jorge Elias Cavalcante
29. Ondina da Costa Soares
30. Paloma Miranda Gonçalves
31. Paulo Henrique da Silva
32. Ramon Ricardo Ribeiro
33. Renata Cardoso Pires de Abreu Soledade Santos
34. Renata Pinheiro Cardoso
35. Renata Serpa de Oliveira
36. Roberto de Souza Grilo
37. Rosana de Souza Rosa
38. Rosania Maria de Oliveira Lima
39. Rosemary de Souza Rosa
40. Sérgio Luiz de Souza
41. Valéria Fernandes Pedrosa de Oliveira