Quadrados Mágicos e Matemática "Abstrata"

Augusto J. M. Wanderley

1. Definição, Fatos Históricos

Na China Antiga já há registro do aparecimento de matrizes quadradas como:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

nas quais: $S = 4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = 4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = 4 + 5 + 6 = 8 + 5 + 2 = 15$ (ver [4]).

Novos exemplos de quadrados desse tipo surgem ao longo da História. Na famosa gravura "Melancolia", de A. Dürer, no Museu Britânico, datado de 1514 aparece a matriz:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Para tal matriz, as somas acima valem $S = 34$ (ver [2], Cap. 12).

Definição: Uma matriz $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, com $a_{ij} \in \mathrm{N}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $n \in \mathrm{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$, diz-se um quadrado mágico, quando: $a_{i1} + a_{i2} + ... a_{in} = S = a_{1j} + a_{2j} + ... a_{nj}$, quaisquer que sejam i e j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ e quando, além disso, $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = S = a_{1n} + a_{2,n-1} + ... + an_1$, ou seja, quando as somas dos elementos em cada linha e as somas dos elementos em cada coluna valem S, fixo e quando, adicionalmente, as somas dos elementos em cada uma das diagonais, também valem S.

Os exemplos clássicos, de quadrados mágicos, como acima, lidam com números naturais. Várias questões interessantes podem ser colocadas para tais tipos de quadrados, algumas delas ligadas à teoria dos jogos. Uma referência tradicional sobre o assunto, já traduzida para o Português é [3]. Nessa referência são consideradas questões relativas a: métodos de construção, quadrados cuja ordem é um número primo, quadrados: latinos e eulerianos, etc. Um breve resumo, comentado, de algumas dessas situações descritas em [3] é dado em [1]. A maior parte desses resultados vale para a subclasse dos quadrados mágicos normais isto é, para a subclasse daqueles quadrados mágicos de ordem n formados por elementos retirados, obrigatoriamente, do conjunto $\{1, 2, \ldots, n^2\}$. Informações atualizadas sobre o assunto podem ser obtidas, por exemplo, em http://www.pse.che.tohuku.ac.jp/msusuki/MagicSquare.html.

2. Quadrados Mágicos de Ordem Três, Usando Números Reais, e Matemática "Abstrata"

No que segue os quadrados mágicos $A = [a_{ij}]$ serão tais eu os a_{ij} serão números reais. Assim, teremos matrizes como:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \pi - \sqrt{2} & -\pi \\ -\pi - \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} + \pi \\ \pi & \sqrt{2} - \pi & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{para as quais, } S = 0.$$

Essa nova classe de quadrados mágicos é bem mais ampla que a anterior formada por quadrados mágicos com números naturais. De fato, a nova classe é não-enumerável enquanto que a anterior é enumerável.

Apesar da ampliação da classe tradicional dos quadrados mágicos daremos, no caso de ordem três, uma regra simples para geração de tais quadrados reais. Para tal e para enfatizar a conexão de tais problemas clássicos com a "Matemática Abstrata" observe que o conjunto $M(3 \text{ x } 3)$ das matrizes reais, 3 x 3, é um espaço vetorial (real) relativamente às operações de adição de matrizes e de multiplicação de um número real por uma matriz. Tal espaço tem dimensão nove pois o conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

formado por nove elementos, é uma base para tal espaço. Trabalharemos, no que segue, com o subespaço de tal espaço. Formado pelas matrizes mágicas, com $S = 0$.

Usaremos a notação:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lema 1: Se $a = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$ é uma matriz mágica, simétrica, com $S=0$ então, $A = aU$.

Demonstração: De fato, nesse caso, $e + 2c = f + b + e = c + f + i =$ $= a + b + c = a + e + i = 0$ e assim,

(*) $e = -2c,\ f = -b + 2c,\ i = b - 3c,\ a + b = -c.$

Logo (**) $0 = a + e + i = a - 2c + b - 3c = a + b - 5c.$

Como $a + b = -c$, (**) nos dá: $0 = -c - 5c$ e, $c = 0$. Por (*), $e=0, f = -$b, i $= b, b = -a.$

Portanto $a = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{bmatrix} = a\mathrm{U}.$

Comentário: O lema nos garante que, em M(3x3) o subespaço formado pelas matrizes mágicas, simétricas, com $S = 0$, tem dimensão igual a um.

Lema 2: Se $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz mágica, anti simétrica (logo S = 0), então A = bV.

Demonstração: Da hipótese, $S = b + c = -b + f = -c - f = 0.$

Logo, $C = -b, f = b, c = -f = -b.$

$$\text{E, } A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{bmatrix} = b\mathrm{V}.$$

Comentário: O lema anterior nos diz que, em M(3x3), o subespaço das matrizes mágicas, anti-simétricas, tem dimensão igual a um.

Lema 3: Toda matriz n x n é soma de uma matriz simétrica n x n, com outra, anti-simétrica, n x n. Se além disso, a matriz dada for mágica, com soma nula, as matrizes simétrica e anti-simétrica, da decomposição, são também mágicas.

Demonstração: Queremos para uma A, de M(n x n), decomposição (*) $A = X + Y$, com X, simétrica ($X = X^t$) e Y, anti-simétrica ($Y = Y^t$). Logo, (**) $A^t = X + Y$, (*) e (**) nos dão: $X = \frac{A + A^t}{2}$, $Y = \frac{A - A^t}{2}$.

E assim, $A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$ é a decomposição desejada.

É claro que, se para A, a soma $S = 0$, a soma S_1, para, $\frac{A + A^t}{2}$ também será nula. E, de modo análogo, a soma para, $\frac{A - A^t}{2}$, será nula.

Comentário: O Lema3 e o fato evidente de que, a única matriz simultaneamente simétrica e anti-simétrica é a matriz nula, garantem que o subespaço vetorial das matrizes mágicas de soma nula é "soma direta" dos subespaços: das matrizes mágicas de soma nula, simétricas e, das matrizes mágicas de soma nula, anti-simétricas. Portanto o subespaço das matrizes mágicas com soma nula tem dimensão 2.

Proposição: Se $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ é uma matriz mágica, com $S = 3s$, então

$$A = \begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix} = (a - s)U + \frac{b\text{-}d}{2} V.$$

Demonstração: $A - \begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix}$ é uma matriz mágica, com soma nula.

Além disso a matriz, parte simétrica da decomposição dessa matriz diferença, em soma de uma matriz simétrica com outra, anti-simétrica (Lema 3) tem como elemento a_{11}, $(a - s)$ enquanto que a sua parte anti-simétrica tem como elemento a_{12}, $\frac{b - d}{2}$. Os Lemas 1 e 2 garantem que

$$A - \begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix} = (a - s)U + \frac{b\text{-}d}{2} V.$$

As demonstrações da proposição e seus lemas dão um algoritmo para que seja efetuada a decomposição acima. Por outro lado, dão uma forma sistemática de gerarmos matrizes mágicas com soma S.

Um Exemplo: Consideremos a matriz mágica, com soma $S = 3s = 15$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Temos: $A - \begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

que é matriz mágica, com soma nula.

Efetuamos a decomposição de tal matriz em soma de matriz simétrica com matriz anti-simétrica:

$$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e,}$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Um exercício análogo vale, para, por exemplo, gerar uma matriz 3 x 3 mágica, $A = [a_{ij}]$, com soma 12 e tal que $a_{11} = 2$, $a_{12} = 8$, $a_{21} = 6$.

Bibliografia

ANDRADRE, L. de, *Mais sobre Quadrados Mágicos,* RPM 41, SBM, 1999.

BOYER, C., *Históra da Matemática,*Ed. Edgar Blücher, 1974.

KRAITCHIK, M., *A Matemática dos Jogos,* segundo volume, Coleção Saber, Publicações Europa-América, Lisboa, Portugal.

STRUICK, D., *On Ancient Chinese Mathematics, The Mathematics Teacher,* 56, pp. 424-432. 1963.