elas não são menos reais que as positivas, mas são tomadas em um sentido oposto" (Sauri 1772, p.39).

Nota-se o defeito nesta definição: talvez para evitar a alusão ao "nada", falta-lhe toda e qualquer referências aos valores absolutos. A definição, referindo-se somente ao sinal, não permite que se decida sobre o valor, positivo ou negativo, de uma quantidade.

Não devemos esquecer que uma tentativa de esclarecimento sobre os fundamentos dos números negativos e de refutação da crítica de D'Alembert, foi levado a cabo na França nessa época; mas de fato, é na célebre obra de Condillac "La Langue des Calculs" (A Linguagem dos Cálculos) que encontramos um esforço para estabelecer uma teoria dos números negativos.

Condillac (para quem a Álgebra constitui o fundamento das Matemáticas) desenvolve, em "La Langue des Calculs", uma teoria das abstrações sucessivas, a partir das noções empíricas, e uma hierarquia das etapas de abstração e de teorização. Além disto, ele explica as ligações entre as diferentes etapas com ajuda de sua concepção de analogia (portanto a primeira formulação do "princípio de permanência" (Hankel)). O que constitui o progresso realizado por Condillac é que ele descobre a passagem das quantidades/grandezas aos números como o ponto decisivo. Encontra-se, portanto, em Condillac, pela primeira vez, uma teoria genética do nascimento do conceito de número. É claro que Condillac não realizou estudos, seja históricos ou experimentais, sobre a gênese do conceito dos números. Trata-se apenas de uma reconstrução "racional". Vejamos mais de perto como ele concebe os números negativos dentro da sua visão "operacionalista". Segundo Condillac, houve quatro etapas no processo de formação do conceito de número:

1. O primeiro cálculo efetuado é cálculo com os dedos. Enumeramos com os dedos para representar uma seqüência de unidades (grandezas). A partir deste primeiro cálculo empírico com grandezas, surgiram as quatro operações básicas. Por exemplo, a operação que *"desfaz o que a adição faz, chamamos de subtração"*. (Condillac 1981, p.14). A noção fica assim restrita por este primeiro tipo de cálculo.

2. A segunda etapa é caracterizada pela passagem aos nomes. O emprego dos nomes abre novos domínios ao cálculo, mas, acima de tudo, a passagem dos dedos aos nomes é uma condição necessária à aparição da Álgebra; porque esta passagem conduz a uma outra passagem: a das

grandezas aos números abstratos: Condillac insiste muito explicitamente sobre esta passagem, que comporta tanto uma mudança do estatuto do conceito quanto uma redução da dependência dos conceitos em relação às substâncias do mundo real:

"Essas idéias que fizemos para nós mesmos através dos dedos, a analogia nos faz portanto aplicar a pedras, a árvores, a homens; e como podemos aplicá-las a todos os objetos do universo, dizemos que são gerais, isto é, aplicáveis a tudo. Mas, a partir do momento em que passamos a considerá-las aplicáveis a tudo, nós não as aplicamos a uma coisa particular, nós as consideramos nelas mesmas, e nós as separamos de todos os objetos aos quais elas possam ser aplicadas" (ibid, p. 48-49; grifo meu, G.S.).

3. A terceira etapa compreende a invenção dos símbolos. Para calcular com grandes números necessita-se de símbolos simples. Isto é realizado pela invenção de caracteres para a numeração, isto é, pela invenção dos algarismos (a qual está na origem da Aritmética). Condillac distingue claramente entre as operações com grandezas (idéias) e as operações com números (símbolos), (ver ibid, p.223).

4. Na última etapa encontra-se a característica do que seria a Álgebra, operações com quantidades literais. Esta passagem dos algarismos às letras é que permite o aparecimento do conceito de número abstrato. Condillac insiste sobre o fato de que as operações que implicam nesse conceito teórico exigem uma redefinição das operações, ou, na terminologia que lhe é própria, supõem uma revisão da gramática necessária: *"esse dialeto (a Álgebra) tem regras que precisam ser conhecidas, e é uma nova gramática a ser aprendida"* (ibid p. 275).

É justamente dentro do contexto desta última etapa que Condillac analisa os números negativos, como uma extensão da noção, mais primitiva, de subtração, que ele redefine por sua vez como uma extensão da adição.

"Uma letra precedida do sinal +, indica uma quantidade acrescentada, uma adição, e eu a chamo de quantidade a mais: quando ela é precedida por um sinal -, eu a chamo de quantidade a menos, uma vez que ela é uma quantidade subtraída, uma subtração... Pouco importa que a quantidade seja a mais ou a menos: pois, a mais assim como a menos, ela é uma quantidade" (ibid, p. 277-278).

Aqui Condillac não procura reduzir os termos teóricos aos termos empíricos. Ele insiste sobre a novidade destas operações. Deste modo, tenta redefinir todas as operações em vista da Álgebra, isto é, elaborar uma gramática consistente que convenha ao "dialeto da Álgebra", sem que para isso seja necessário reduzir este "dialeto" ao da Aritmética:

> *"Portanto, falando propriamente, não há quantidades a menos nas línguas vulgares, nem na Aritmética. Mas na Álgebra, onde os símbolos são indeterminados, não saberíamos pronunciar a diferença: podemos apenas indicá-la,* e a – b *ou* b – a *é a única resposta àquele que pergunta qual é a diferença entre* a e b.
> *(...) Tudo isso é lógico, e a contradição só existe nas palavras soma e resto, que não são da Álgebra: mas o que é uma adição em Álgebra chama-se subtração em Aritmética;... Quando se misturam estes dois dialetos, não é possível evitar de cair em expressões contraditórias".* (ibid., p.295-296).

Condillac recusa também a crítica que D'Alembert faz à teoria das quantidades negativas, e anuncia a exposição de sua própria concepção operacional dos números negativos em sua obra: *"Iremos acabar de esclarecer esta teoria, assim que tratarmos das equações do segundo grau"* (ibid. p. 300). Ora, é justamente para o tratamento das equações do segundo grau que os números negativos aparecem inevitavelmente. Infelizmente, Condillac não concluiu essa obra e nós não dispomos de nenhum vestígio da continuação dessas reflexões sobre as operações e sobre os números negativos.

"La Langue des Calculs" (obra póstuma aparecida em 1798) foi vivamente discutida na França, particularmente pelos Ideólogos[1]. Esses filósofos, embora a maioria deles tenha sido discípulo de Condillac, não apreciaram muito esse tratado. Eles atribuíam a Condillac (erradamente, a meu ver) a idéia de que a Álgebra constitui "a linguagem" (portanto o modelo e a finalidade) de todas as ciências, e recusaram, com bastante ênfase, um papel metodológico tão geral para a Álgebra. Nenhum deles pesquisou a concepção de uma evolução genética dos conceitos científicos e dos diferentes estágios de abstração. Os Ideólogos colocam

[1] Ideologia designa aqui uma doutrina filosófica que podemos caracterizar pela decisão de substituir a metafísica tradicional pelo estudo das idéias por meio de uma análise científica visando a compreender sua origem e suas formas de composição. Escola de pensamento contemporânea da Revolução Francesa e do Império, contava principalmente com Destutt de Tracy e Cabanis.

todos os conceitos ("as idéias") em um mesmo nível de teoreticidade, de preferência em ligação estreita com as "sensações" de uma substância empirista. Encontramos um exemplo desta convicção em Maine de Biran, que, em 1802, reivindicou para a ideologia o papel de "orientar" e de reformar as ciências e particularmente de "limpar o campo de evidência" (ou seja, a Matemática) de "todas as obscuridades" (Biran, 1803, p.15). Entre as noções que considerava como obscuras, ele menciona a de quantidade negativa:

"O Ideologista provará que não existem realmente números negativos". (ibid. p. 22)

Em Biran, não se encontra mais a idéia de diferentes etapas na abstração, nem a de uma diferença entre grandezas e números. Os números são interpretados como grandezas geométricas, "suscetíveis de serem construídas ou traduzidas por meio de linhas".

Nos anos da virada do século XIX, assistimos a uma mudança na concepção da Matemática nos filósofos franceses, sobretudo no que diz respeito a sua "arquitetura". A Álgebra é colocada num segundo plano e a Geometria é que passa a ser escolhida como fundamental, com o papel de conferir uma significação imediata aos símbolos matemáticos, enquanto a Matemática é interpretada nos termos da experiência sensível. Esta mudança é bem visível na obra de Destutt de Tracy, um dos mais importantes representantes dos Ideólogos: na versão preliminar de seus célebres "Elementos de Ideologia", ele concebe a matemática pura como sendo uma conseqüência de *"duas idéias abstratas... a idéia de unidade; e ...a idéia das figuras"* (Destutt de Tracy 1798, p.389-390). Esta concepção segundo a qual se justapõem a Álgebra e a Geometria, é suplantada na versão ulterior da obra por uma outra concepção que assegura a preponderância da Geometria. Ela é destacada expressamente numa nota à segunda edição do primeiro volume:

"Uma quantidade qualquer é portanto calculável enquanto puder ser reduzida diretamente ou indiretamente a medidas de extensão; porque esta é a propriedade mais eminentemente mensurável dos seres" (Destutt de Tracy 1804, p. 216).

Esta mudança de concepção epistemológica (que ainda não foi estudada) foi transmitida da Filosofia à Matemática e é responsável por mudanças de "mentalidades" e de prática (matemática e didática). O primeiro a transmitir esta nova visão epistemológica à Matemática foi

Lazare Carnot, inicialmente em 1801, depois sob uma forma mais desenvolvida em 1803. Carnot fez assim uma dupla escolha: ele está convencido da predominância da Geometria sobre a Álgebra e só admite o estatuto de seres matemáticos para os números absolutos, ou seja, os números que possam ser relacionados a substâncias. Assim, Carnot retém a subtração apenas para a Aritmética, e não a considera jamais como uma operação algébrica. Ele tenta substituir a Álgebra pela Geometria, ou melhor, por um novo tipo de Geometria: a geometria das correlações. Restringe as operações algébricas aos casos "executáveis"; por exemplo, a equação $(a - b).c = ac - bc$ é restrita ao caso onde $a>b$. Ele contorna em parte essas restrições, transformando a Álgebra em um cálculo efetuado a partir de linhas orientadas:

> *"A partir daí eu concluo...que toda quantidade negativa isolada é um ser de razão, e que aquelas que ocorrem no cálculo, não passam de simples formas algébricas, incapazes de representar qualquer quantidade real e efetiva. (p.xviii)...".*
>
> *"A Geometria de posição é, portanto, a doutrina propriamente dita das quantidades positivas e negativas, ou antes o meio de suplementá-la, pois esta doutrina deve ser inteiramente rejeitada. (p.22)...*
>
> *Eu diria que a Geometria de posição é aquela onde a noção de quantidades positivas e negativas isoladas, é suplementada pela noção de quantidades diretas e inversas". (p. xxxiv)* (Carnot 1803).

Carnot substitui a noção de número negativo pela correlação entre linhas diretas e inversas. Esta substituição produziu, na comunidade matemática e no público de um modo geral, a aceitação da recusa dos números negativos e de uma Álgebra poderosa, de uma maneira tal que todo mundo passou a adotar os argumentos de Carnot, sem sequer referir-se a ele. O próprio Napoleão contribuiu para difundir a idéia das operações restritas aos casos "executáveis" (vide Schubring 1986a).

Na França, raros foram aqueles que contestaram a visão de Carnot sobre as quantidades negativas. Gergonne ficou do lado dos contestadores, mas o seu artigo de 1814, onde ele se mostra favorável à doutrina das quantidades opostas, então em vigor na Alemanha (e que será tratada mais adiante), denota um posicionamento mais para tímido e defensivo. Gergonne está consciente do que houve uma ruptura e fala da "teoria antiga", substituída há alguns anos pela "nova", sustentada por Carnot (Gergonne 1814, pp. 19-20).

Esta ruptura aparece também ao longo das diferentes edições dos "Elementos de Álgebra" de S. F. Lacroix, um manual que durante muito tempo foi adotado de modo predominante nas escolas secundárias. As duas primeiras edições (1799-1800) apresenta longos trechos tirados do manual de Bezout e correspondem à concepção ambígua que encontramos na Enciclopédia:

- Lacroix distingue sinal de operação e sinal da quantidade (Lacroix 1800, p.31).

- Afirma a existência de números negativos: as quantidades *"negativas possuem portanto uma existência tão real quanto as (quantidades) positivas"* (ibid., p. 32)

- As soluções negativas devem ser interpretadas como soluções positivas: *"toda solução negativa... indica que a quantidade procurada deve ser tomada num sentido totalmente oposto ao sentido que lhe tinha sido atribuído inicialmente"*. (ibid., p.33),

- As operações algébricas têm características que as operações aritméticas não possuem: *"a extensão que os sinais gerais empregados na (Álgebra) dão aos resultados, não permite mais sua comparação exata com os resultados (da Aritmética)...a subtração $b - a$, indicada algebricamente, não traz necessariamente a idéia de que b seja maior que a"* (ibid., p. 41-42).

Por outro lado, a partir da terceira edição (1803) (quase inteiramente revista) não encontramos mais enunciados sobre a existência de quantidades negativas ou de reflexões sobre operações. Esses enunciados foram substituídas por um recurso freqüente à palavra "absurdo" para qualificar as soluções negativas. Além disto, é apenas no contexto de sistemas lineares de equações que Lacroix trata de quantidade negativas e estabelece a regra dos sinais. Ele constata que *"a teoria das quantidades negativas é não só uma das mais importantes como também das mais espinhosas da Álgebra"* (Lacroix 1808, p. 91-92). Lacroix denuncia toda solução na forma de uma quantidade negativa isolada como "absurda", por duas razões:

A primeira razão aparece no decorrer de um problema onde se trata de resolver um sistema linear de duas equações: Lacroix constata que para uma das equações, $60 + 7y = 46$:

"A mera inspeção dessa equação revela um absurdo. Com efeito, não é possível formar o número 46 acrescentando-se qualquer coisa ao número 60, o qual, sozinho, já ultrapassa 46" (ibid., p. 86).

Ao final de uma longa discussão e depois de substituir as equações dadas por outras equações "para que o terceiro problema proposto seja possível" — mas sempre parecendo operar com números abstratos — Lacroix obtém a solução "$x = 5^{fr}$, $y = 2^{fr}$", acrescentando de repente as designações de números concretos (ibid., p. 88). Aqui está portanto uma das razões do absurdo das quantidades negativas: trata-se, na realidade, de "coisas", grandezas (francos, no caso) e não pode existir separação entre as grandezas e os números abstratos.

A segunda razão vem da restrição estrita da operação de subtração ao caso do "resto" positivo ou nulo (ibid., p.92)

Mas por outro lado, Lacroix apercebe-se bem que não pode manter esse rigor na prática matemática. Assim, ele introduz um critério totalmente diferente (a consistência interna), sem, porém, se dar conta deste ecletismo e da incompatibilidade entre os dois pontos de vista que sustenta:

"A Álgebra dispensa toda pesquisa a este respeito (a saber.: retificar o enunciado da questão), desde que se saiba operar convenientemente com as expressões afetadas pelo sinal - ; pois essas expressões, tendo sido deduzidas das equações do problema, devem satisfazer a essas equações: isto é, submetendo as expressões às operações indicadas na equação, devemos achar, para o primeiro membro, um valor igual ao do segundo" (ibid., p. 88).

Para as equações do segundo grau, Lacroix mantém a abordagem "substancialista" que havia adotado para as equações do primeiro grau: quando se obtêm duas soluções negativas, deve-se *"modificar-se o enunciado da questão para evitar o absurdo que ele contém"* (p. 100, vide p. 168); se houver soluções mistas, a solução negativa não passa, na realidade, da solução de uma outra questão (p. 175).

No capítulo "Teoria geral das equações", Lacroix somente relaxa suas exigências para as equações de graus superiores (matéria que cobre o último terço do manual, aparentemente destinada a um nível superior de ensino). É lá que ele aplica (sem sequer prevenir o leitor) o critério de satisfação interna (ex. pp. 306-307).

A refutação dos números negativos não se limitou apenas ao ensino, e sobretudo ao ensino nas escolas secundárias, mas englobou também o ensino científico superior [14].

Não analisei sistematicamente os manuais franceses da segunda metade do século 19, mas segundo J. Itard, foi Carlo Bourlet o primeiro a introduzir num manual, em 1896, "no início da Álgebra (uma exposição completa) da teoria dos números negativos" (Itard 1984, p. 356).

Nota dos editores: O artigo está incompleto, seu complemento sairá no Boletim 38, assim como as notas e a bibliografia publicada pelo autor em seu texto original.